2023北京通州高一（上）期中

数　学

本试卷共 4 页，共 150 分.考试时长 120 分钟.考生务必将答案答在答题卡上，在试卷上作答无效.考试结束后，请将答题卡交回.

第一部分（选择题共 40 分）

一、选择题共 10 小题，每小题 4 分，共 40 分.在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项.

1. 已知集合 $A=\{3,4,5,7\},B=\{4,5,6\}$，则 $A\cap B=$（　）

A. $\{3,4,5,6,7\}$　　B. $\{4,5\}$

C. $\{x|4\le x\le 5\}$　　D. $\{x|3\le x\le 7\}$

2. 命题: $\exists x>0,x^2-x+1<0$ 的否定是（　）

A. $\exists x\le 0,x^2-x+1\ge 0$　　B. $\forall x\le 0,x^2-x+1\ge 0$

C. $\exists x>0,x^2-x+1\ge 0$　　D. $\forall x>0,x^2-x+1\ge 0$

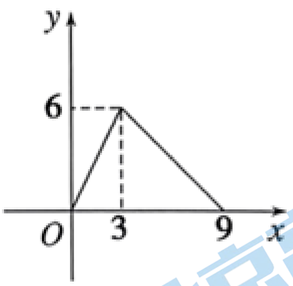
3. 下列函数中，既是奇函数又在区间 $(0,+\infty)$ 上单调递增的是（　）

A. $y=x^{\frac{1}{2}}$　　B. $y=2^{-x}$

C. $y=x+\frac{1}{x}$　　D. $y=x^3$

4. 已知函数 $y=f(x)$ 的对应关系如下表所示，函数 $y=g(x)$ 的图象如图所示,则 $f(g(3))$ 的值为（　）

x	0	3	6
$f(x)$	3	0	6



A. 9　　B. 6　　C. 3　　D. 0

5. 有限集合 M 中元素的个数记作 $card(M)$，若 A,B 都为有限集合,则“ $A\cap B=A$ ”是“$card(A)\le card(B)$”的（　）

A. 充分不必要条件　　　　B. 必要不充分条件

C. 充分必要条件　　　　D. 既不充分也不必要条件

6. 设函数 $y=x^2+2ax$ 在区间 $(2,+\infty)$ 上是增函数，则实数 a 的取值范围是（　）

A. $\{a|\ a\geq 2\}$　　　　B. $\{a|\ a\leq 2\}$

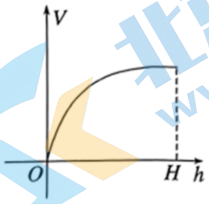
C. $\{a|\ a\geq -2\}$　　　　D. $\{a|\ a\leq -2\}$

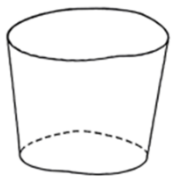
7. 下列命题中正确的是（　）

A. 若 $ac^2>bc^2$，则 $|a|>|b|$　　　　B. 若 $a>b,c>d$，则 $a-c>b-d$

C. 若 $a>b$，则 $\dfrac{1}{a}<\dfrac{1}{b}$　　　　D. 若 $a>b>0,c<d<0$，则 $\dfrac{a}{d}<\dfrac{b}{c}$

8. 向体积相同且高为 H 的花瓶中，注水注满为止.如果注水量 V 与水深 h 的函数关系式如图所示，那么花瓶的形状是（　）



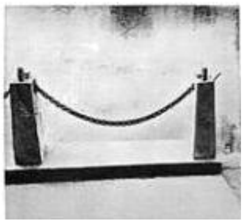
A. 　B. 　C. 　D. 

9. 我们知道函数 $y=f(x)$ 的图象关于坐标原点成中心对称图形的充要条件是函数 $y=f(x)$ 为奇函数，有同学发现可以将其推广为:函数 $y=f(x)$ 的图像关于点 $H(a,b)$ 成中心对称图形的充要条件是函数 $y=f(x+a)-b$ 为奇函数，则函数 $f(x)=x+\dfrac{1}{x+1}$ 的对称中心是（　）

A. $(-1,-1)$　　　　B. $(1,1)$

C. $(0,0)$　　　　D. $(-1,1)$

10. 公园内常设有如图所示的护栏，柱与柱之间是一条均匀悬链.数学中把这种两端固定的一条(粗细与质量分布)均匀、柔软的链条，在重力的作用下所具有的曲线形状称为悬链线.在恰当的坐标系中，这类函数的表达式可以为 $f(x)=ae^x+be^{-x}$ (其中 a,b 为非零常数, e 为无理数, $e=2.718\cdots$)，则以下结论正确的是（　）



A. 若 $a=b$，则 $y=f(x)$ 为奇函数

B. 若 $ab=1$，则函数 $y=f(x)$ 的最小值为 2

C.若 $ab>0$，则方程 $f(x)=0$ 没有实数根

D. 若 $ab<0$，则函数 $y=f(x)$ 为单调递增函数

第二部分（非选择题共 110 分）

二、填空题共 5 小题，每小题 5 分，共 25 分.

11. 函数 $f(x)=\sqrt{x-2}$ 的定义域是_______.

12. 不等式 $\dfrac{x-1}{x}<0$ 的解集为_____________.

13. 能说明“$\exists x\in \mathrm{R}, ax^2-ax-1\geq 0$”为假命题的一个实数 a 的值为_______.

14. 设函数 $f(x)=\begin{cases}2^x-3, x\leq a\\ \dfrac{a}{x}, x>a\end{cases}$，若当 $a=5$ 时，存在实数 m，使得 $f(m)=0$，则 2^{2m+1} 的值为_______.

若 $f(x)$ 存在最大值，则实数 a 的最小值为_______.

15. 狄利克雷函数 $D(x)$ 定义为:当自变量取有理数时，函数值为 1 当自变量取无理数时，函数值为 0.以下关于狄利克雷函数 $D(x)$ 的性质:

①$D(x)$ 的值域为 $\{0,1\}$；

②若 $x,y\in\mathrm{R}$，则有 $D(x+y)\geq D(x)+D(y)$ 成立；

③函数 $D(x)$ 的图象关于 y 轴对称；

④不存在 $A(x_1,f(x_1)),B(x_2,f(\dot{x}_2)),C(x_3,f(x_3))$，使得 $\triangle ABC$ 为等腰直角三角形.

其中表述正确的是_______.

三、解答题共 6 小题，共 85 分.解答应写出文字说明，演算步骤或证明过程.

16. 已知全集 $U=\mathbf{R}$，集合 $A=\{x|3x-1<8\}, B=\{x|2<x<5\}$.

（1）求 $A\cap B$ 和 $(\complement_U A)\cup B$；

（2）设集合 $C=\{x|\ a-1<x<a+1\}$，若 $C\cap B=\varnothing$，求实数 a 的取值范围.

17. 已知指数函数 $y=f(x)$ 的图象过点 $(-2,9)$.

（1）求函数 $f(x)$ 的解析式

（2）试比较 $f(-0.3), f(0.3), 1$ 这三个数的大小，并说明理由;

（3）若 $f(-m^2+m+1)<1$，求实数 m 的取值范围.

18. 已知函数 $f(x)=\dfrac{2|x|+2}{x^2-1}$.

（1）证明: $f(x)$ 为偶函数;

（2）用定义证明: $f(x)$ 在区间 $(1,+\infty)$ 上单调递减.

19. 刚刚结束的 2023 年杭州亚运会给人们留下了深刻印象，也带火了很多杭州特色产品.某小组通过对一款杭州特产龙井茶的某官网销售情况的调查发现:该商品在过去 30 天内，销售单价 $P(x)$ (单位:百元)与时间 x (单位:天)的函数关系近似满足 $P(x)=1+\dfrac{k}{x}$ (k 为常数),日销售量 $Q(x)$ (单位:件)与时间 x 的部分数据如下表所示:

x	5	10	15	20	25	30
$Q(x)$	180	310	390	420	400	330

已知第 5 天的日销售收入为 216 百元.

（1）求 k 的值;

（2）给出以下三种函数模型(1) $Q(x)=ax+b$；(2) $Q(x)=ax^2+bx$；(3) $Q(x)=a\cdot b^x$.

请根据上表中的数据，选择你认为最合适的一种函数来描述 $Q(x)$ 与 x 的变化关系，并求出函数 $Q(x)$ 的解析式;

（3）记该商品在这 30 天内的日销售收入为 $H(x)$ (单位:百元)，求 $H(x)$ 的最大值.

20. 设函数 $f(x)=x^2+2mx+m$，函数 $g(x)=2x+2.\forall x\in\mathrm{R}$，用 $M(x)$ 表示 $f(x), g(x)$ 中的较大者，记为 $M(x)=\max\{f(x), g(x)\}$，再从条件（1）、条件（2）这两个条件中选择一个作为已知.

条件（1）: $f(-3)=f(1)$

条件（2）: $\forall x\in\mathrm{R}, f(x)\geq f(-1)$ 恒成立.

（1）求不等式 $f(x)>g(x)$ 的解集;

（2）当 $x\in[1,4]$ 时，关于 x 的不等式 $M(x)>m(g(x)-2)$ 恒成立，求实数 m 的取值范围;注:如果选择多个符合要求的条件分别解答，按第一个解答计分.

21. 已知正整数集合 $S=\{a_1,a_2,\cdots,a_n\}(n\geq 2, n\in\mathrm{N}), 0<a_1<a_2<\cdots<a_n$,对任意 $a_i,a_j\in S$，定义

$d\left(a_i,a_j\right)=\left|\frac{1}{a_i}-\frac{1}{a_j}\right|$.若存在正整数$k$，使得对任意$a_i,a_j\in S\left(a_i\ne a_j\right)$，都有$d\left(a_i,a_j\right)\ge\frac{1}{k^2}$,则称集合S具有性质$F_k$.记$d\left(S\right)$是集合中的$\left\{d\left(a_i,a_j\right)\middle|a_i,a_j\in S\right\}$最大值.

（1）判断集合$A=\{1,2,3\}$和集合$B=\{4,6\}$是否具有性质F_3，直接写出结论；

（2）若集合S具有性质F_4，求证：$d\left(S\right)\ge\frac{n-1}{16}$；

（3）若集合S具有性质F_k，求n的最大值.

参考答案

第一部分（选择题共 40 分）

一、选择题共 10 小题，每小题 4 分，共 40 分.在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项.

1. 【答案】B

【分析】根据交集的含义即可.

【详解】根据交集的含义知 $A\cap B=\{4,5\}$，

故选：B

2. 【答案】D

【分析】根据存在量词命题的否定为全称量词命题判断即可.

【详解】命题：$\exists x>0,x^2-x+1<0$ 为存在量词命题，

其否定为：$\forall x>0,x^2-x+1\geq 0$.

故选：D

3. 【答案】D

【分析】根据幂函数、指数函数以及对勾函数的奇偶性和单调性即可得到答案.

【详解】对 A，函数 $y=x^{\frac{1}{2}}$ 的定义域为 $[0,+\infty)$，不关于原点对称，则其不是奇函数，故 A 错误；

对 B，$y=2^{-x}=\left(\frac{1}{2}\right)^x$，根据指数函数的性质知其不是奇函数，故 B 错误；

对 C，设 $f(x)=x+\frac{1}{x}$，$f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}+\frac{1}{\frac{1}{2}}=\frac{5}{2}$，而 $f(1)=1+\frac{1}{1}=2<f\left(\frac{1}{2}\right)$，则 $y=x+\frac{1}{x}$ 在区间 $(0,+\infty)$ 不是单调递增，故 C 错误；

对 D，根据幂函数的图象与性质知 $y=x^3$ 是奇函数且其在区间 $(0,+\infty)$ 上单调递增，故 D 正确.

故选：D.

4. 【答案】B

【分析】直接根据函数图像和表格计算得到答案.

【详解】$f(g(3))=f(6)=6$.

故选：B.

5. 【答案】A

【分析】根据集合新定义以及集合交集、子集的含义即可判断.

【详解】因为 $A\cap B=A$，所以 $A\subseteq B$，又因为 A,B 都为有限集合，

所以 $card(A)\leq card(B)$，则正向可以推出，

若 $card\left(A\right)\le card\left(B\right)$，举例 $A=\{1,2\}$， $B=\{3,4,5\}$，但 $A\cap B\ne A$，则反向无法推出，

则“ $A\cap B=A$ ”是“ $card\left(A\right)\le card\left(B\right)$ ”的充分不必要条件.

故选：A.

6.【答案】C

【分析】根据二次函数的单调性即可得到不等式，解出即可.

【详解】 $y=x^2+2ax$ 的对称轴为 $x=-\dfrac{2a}{2\times1}=-a$，且开口向上，

则要使其在区间 $(2,+\infty)$ 上是增函数，需 $-a\le2$，解得 $a\ge-2$，

则其取值范围为 $\{a|\ a\ge-2\}$，

故选：C.

7.【答案】D

【详解】举例说明判断 ABC，利用不等式性质推理判断 D.

【分析】对于 A，由 $ac^2>bc^2$，得 $a>b$，取 $a=0,b=-1$，显然 $|a|=0<1=|b|$，A 错误；

对于 B，由 $a>b,c>d$，取 $a=2,b=1,c=-1,d=-4$，显然 $a-c=3<5=b-d$，B 错误；

对于 C，由 $a>b$，取 $a=1,b=-1$，显然 $\dfrac{1}{a}=1>-1=\dfrac{1}{b}$，C 错误；

对于 D，由 $c<d<0$，得 $\dfrac{1}{d}<\dfrac{1}{c}<0$，则 $-\dfrac{1}{d}>-\dfrac{1}{c}>0$，而 $a>b>0$，

因此 $-\dfrac{a}{d}>-\dfrac{b}{c}$，所以 $\dfrac{a}{d}<\dfrac{b}{c}$，D 正确.

故选：D

8.【答案】B

【分析】确定花瓶形状为下宽上窄的形状，对比选项得到答案.

【详解】根据函数图像知：开始阶段相同的高度下体积增加得快，结束阶段增加得慢，

故花瓶形状为下宽上窄的形状，对比知 B 满足.

故选：B

9.【答案】A

【分析】 $g\left(x\right)=f(x+a)-b=x+a+\dfrac{1}{x+a+1}-b$，根据定义域得到 $a=-1$，根据 $g\left(x\right)=-g\left(-x\right)$ 得到 $b=-1$，得到对称中心.

【详解】 $f(x)=x+\dfrac{1}{x+1}$， $g\left(x\right)=f(x+a)-b=x+a+\dfrac{1}{x+a+1}-b$ 为奇函数，

定义域为 $\{x|x\ne-a-1\}$ 关于原点对称，故 $a=-1$， $g\left(x\right)=x-1+\dfrac{1}{x}-b=\dfrac{x^2-\left(b+1\right)x+1}{x}$，

$g(x)=-g(-x)$，即 $\frac{x^2-(b+1)x+1}{x}=-\frac{(-x)^2+(b+1)x+1}{-x}$，

即 $\frac{x^2-(b+1)x+1}{x}=\frac{x^2+(b+1)x+1}{x}$，故 $-(b+1)=b+1$，

故 $b=-1$，即对称中心为 $(-1,-1)$.

故选：A.

10.【答案】C

【分析】根据给定的函数，结合函数的相关概念逐项分析判断即可得解.

【详解】显然函数 $f(x)=ae^x+be^{-x}$ 的定义域为 **R**，

对于 A，当 $a=b$ 时，$f(-x)=ae^{-x}+be^x=ae^x+be^{-x}=f(x)$，函数 $f(x)$ 是偶函数，A 错误；

对于 B，当 $a<0,b<0$，$ab=1$，函数 $f(x)=ae^x+be^{-x}<0$，B 错误；

对于 C，由 $ab>0$，得 $a<0,b<0$ 或 $a>0,b>0$，当 $a<0,b<0$ 时，$f(x)=ae^x+be^{-x}<0$，

当 $a>0,b>0$ 时，$f(x)=ae^x+be^{-x}>0$，因此方程 $f(x)=0$ 没有实数根，C 正确；

对于 D，当 $a<0,b>0$ 时，有 $ab<0$，而函数 $y=ae^x$ 是减函数，$y=be^{-x}$ 也为减函数，

因此函数 $f(x)=ae^x+be^{-x}$ 是减函数，D 错误.

故选：C

第二部分（非选择题共 110 分）

二、填空题共 5 小题，每小题 5 分，共 25 分.

11.【答案】$[2,+\infty)$

【分析】函数 $f(x)=\sqrt{x-2}$ 的定义域满足 $x-2\geq 0$，解得答案.

【详解】函数 $f(x)=\sqrt{x-2}$ 的定义域满足 $x-2\geq 0$，解得 $x\geq 2$，故函数定义域为 $[2,+\infty)$.

故答案为：$[2,+\infty)$

12.【答案】$\{x|0<x<1\}$

【分析】根据分式的运算性质分类讨论求出不等式的解集.

【详解】$\frac{x-1}{x}<0\Rightarrow\begin{cases}x-1<0\\x>0\end{cases}$ 或 $\begin{cases}x-1>0\\x<0\end{cases}$，解第一个不等式组，得 $0<x<1$，第二个不等式组的解集为空集.

故答案为：$\{x|0<x<1\}$

【点睛】本题考查了分式不等式的解集，考查了数学运算能力，属于基础题.

13.【答案】0（答案不唯一）

【分析】取 $a=0$ 得到 $ax^2-ax-1=-1$，$-1<0$ 恒成立，得到答案.

【详解】取 $a=0$，则 $ax^2-ax-1=-1$，$-1<0$ 恒成立，故“$\exists x\in R, ax^2-ax-1\geq 0$”为假命题.

故答案为：0

14.【答案】 ①. 18 ②. 0

【分析】根据给定条件，求得 $2^m=3$，再利用指数运算计算即得；分段讨论函数 $f(x)$ 的取值情况，求出 $f(x)$ 有最大值的 a 的范围即得.

【详解】当 $a=5$ 时，$f(x)=\begin{cases}2^x-3, x\leq 5\\ \dfrac{5}{x}, x>5\end{cases}$，由 $f(m)=0$，得 $2^m-3=0$，解得 $2^m=3$，

所以 $2^{2m+1}=\left(2^m\right)^2\times 2=3^2\times 2=18$；

当 $x\leq a$ 时，$f(x)=2^x-a$ 在 $(-\infty,a]$ 上单调递增，$\forall x\in(-\infty,a], f(x)\leq f(a)=2^a-3$，

当 $a<0$ 时，$f(x)=\dfrac{a}{x}$ 在 $(a,0)$，$(0,+\infty)$ 上单调递增，当 $x\in(a,0)$ 时，$f(x)>1$，

当 $x\in(0,+\infty)$，$f(x)<0$ 恒成立，又 $f(a)=2^a-3<-2$，则 $f(x)$ 不存在最大值，即 $a<0$ 不符合题意，

当 $a=0$ 时，当 $x\in(a,+\infty)$ 时，恒有 $f(x)=0$，而 $f(a)=2^a-3=-2$，则函数 $f(x)$ 有最大值 0，符合题意，

当 $a>0$ 时，$f(x)=\dfrac{a}{x}$ 在 $(a,+\infty)$ 上单调递减，$\forall x\in(a,+\infty)$，$0<f(x)<1$，

当 $f(a)=2^a-3\geq 1$，即 $a\geq 2$ 时，函数 $f(x)$ 有最大值 2^a-3，

因此函数 $f(x)$ 有最大值时 $a\in\{0\}\cup[2,+\infty)$，

所以实数 a 的最小值为 0.

故答案为：18；0

15.【答案】①③④

【分析】根据狄利克雷函数的性质一一分析即可.

【详解】对于①，函数的值域为 $\{0,1\}$，故①正确；

对于②，若 x,y 均为有理数，则 $x+y$ 为有理数，$D(x+y)=1$，$D(x)=1$，$D(y)=1$，

则 $D(x+y)<D(x)+D(y)$，故②错误；

对于③，若 x 是有理数，则 $-x$ 是有理数，则 $f(-x)=1=f(x)$，

若 x 是无理数，则 $-x$ 是无理数，则 $f(-x)=0=f(x)$，

故对任意 $x\in\mathbf{R}$，都有 $f(-x)=f(x)$，故函数 $f(x)$ 是偶函数，③正确；

对于④，若 $\triangle ABC$ 为等腰直角三角形，不妨设角 B 为直角，

则 $f(x_1), f(x_2), f(x_3)$ 的值 R 可能性只能为 $f(x_1)=0, f(x_2)=1, f(x_3)=0$ 或

$f(x_1)=1, f(x_2)=0, f(x_3)=1$，

由等腰直角三角形的性质得$|x_2-x_1|=1$，所以 $f(x_1)=f(x_2)$，这与 $f(x_1)\neq f(x_2)$矛盾，

故不存在 $A(x_1,f(x_1)),B(x_2,f(\dot{x}_2)),C(x_3,f(x_3))$，使得 $\triangle ABC$ 为等腰直角三角形.

故答案为：①③④.

三、解答题共 6 小题，共 85 分.解答应写出文字说明，演算步骤或证明过程.

16.【答案】(1) $A\cap B=\{x|2<x<3\}$，$(\complement_U A)\cup B=\{x|x>2\}$；

(2) $a\le 1$或$a\ge 6$.

【分析】(1) 化简集合 A，利用交集、补集、并集的定义求解即得.

(2) 利用交集运算的结果列出不等式求解即可.

【小问 1 详解】

依题意，$A=\{x|x<3\},B=\{x|2<x<5\}$，则 $A\cap B=\{x|2<x<3\}$，

$\complement_U A=\{x|x\ge 3\}$，所以$(\complement_U A)\cup B=\{x|x>2\}$.

【小问 2 详解】

集合$C=\{x|\ a-1<x<a+1\}$，而$C\cap B=\varnothing$，

因此$a+1\le 2$或$a-1\ge 5$，解得$a\le 1$或$a\ge 6$，

所以实数a的取值范围是$a\le 1$或$a\ge 6$.

17.【答案】(1) $f(x)=\left(\frac{1}{3}\right)^x$

(2) $f(-0.3)>1>f(0.3)$，理由见解析

(3) $\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2},\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)$

【分析】(1) 设函数为 $f(x)=a^x$，代入数据计算得到答案.

(2) 根据指数函数的单调性计算得到答案.

(3) 根据指数函数单调性得到$-m^2+m+1>0$，解得答案.

【小问 1 详解】

设函数为 $f(x)=a^x$，则 $f(-2)=a^{-2}=9$，解得 $a=\frac{1}{3}$，即 $f(x)=\left(\frac{1}{3}\right)^x$；

【小问 2 详解】

函数 $f(x)=\left(\frac{1}{3}\right)^x$ 在 R 上单调递减，且$1=f(0)$，

故 $f(-0.3)>f(0)>f(0.3)$，即 $f(-0.3)>1>f(0.3)$；

【小问 3 详解】

函数 $f\left(x\right)=\left(\frac{1}{3}\right)^{x}$ 在 R 上单调递减，$f\left(-m^{2}+m+1\right)<1$，即 $f\left(-m^{2}+m+1\right)<f\left(0\right)$，

故 $-m^{2}+m+1>0$，解得 $\frac{1-\sqrt{5}}{2}<m<\frac{1+\sqrt{5}}{2}$，即 $m\in\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2},\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)$.

18.【答案】（1）证明见解析

（2）证明见解析

【分析】（1）利用奇偶函数的判定方法即可；

（2）利用定义法进行取值作差变形判定即可.

【小问 1 详解】

因为 $f(x)=\frac{2|x|+2}{x^{2}-1}$，所以 $f(x)$ 的定义域为 $D=\{x|\ x\neq\pm1\}$.

对于任意 $x\in D,-x\in D$，因为 $f(-x)=\frac{2|-x|+2}{(-x)^{2}+1}=\frac{2|x|-2}{x^{2}-1}=f(x)$，

所以 $f(x)$ 为偶函数.

【小问 2 详解】

当 $x\in(1,+\infty)$ 时，$f(x)=\frac{2x+2}{x^{2}-1}=\frac{2}{x-1}$.

任取 $x_1,x_2\in(1,+\infty)$，且 $x_1<x_2$，

那么 $f\left(x_1\right)-f\left(x_2\right)=\frac{2}{x_1-1}-\frac{2}{x_2-1}=\frac{2\left(x_2-x_1\right)}{\left(x_1-1\right)\left(x_2-1\right)}$，

因为 $1<x_1<x_2$，所以 $x_2-x_1>0,\left(x_1-1\right)\left(x_2-1\right)>0$，从而 $f\left(x_1\right)-f\left(x_2\right)>0$，

即 $f\left(x_1\right)>f\left(x_2\right)$.所以 $f(x)$ 是 $(1,+\infty)$ 上的减函数.

19.【答案】（1）$k=1$

（2）$Q(x)=-x^{2}+41x$，$\left(x\in\mathrm{N}^*,1\leq x\leq30\right)$

（3）441

【分析】（1）由 $P\left(5\right)\cdot Q\left(5\right)=216$ 代入计算可得；

（2）首先判断 $Q\left(x\right)=ax^{2}+bx$，再代入数据计算可得；

（3）由 $H\left(x\right)=P\left(x\right)Q\left(x\right)$ 求出 $H\left(x\right)$ 的解析式，再根据二次函数的性质计算可得.

【小问 1 详解】

由题意得 $P\left(5\right)\cdot Q\left(5\right)=\left(1+\frac{k}{5}\right)\times180=216$，解得 $k=1$.

【小问 2 详解】

由表中的数据知，当时间变化时，该商品的日销售量有增有减，并不单调，

而①，③中的函数为单调函数，故只能选②，即 $Q(x)=ax^2+bx$.

由表中数据可得 $Q(5)=180$ ， $Q(10)=310$ ，

即 $\begin{cases}25a+5b=180\\100a+10b=310\end{cases}$ ，解得 $\begin{cases}a=-1\\b=41\end{cases}$ ，

故 $Q(x)=-x^2+41x$ ， $(x\in N^*,1\le x\le 30)$.

【小问 3 详解】

由（1）可得 $P(x)=1+\frac{1}{x}\ (x\in N^*,1\le x\le 30)$ ，

依题意 $H(x)=P(x)Q(x)=\left(1+\frac{1}{x}\right)(-x^2+41x)$

$=-x^2-x+41x+41$

$=-x^2+40x+41$

$=-(x-20)^2+441$ ， $(x\in N^*,1\le x\le 30)$ ，

所以当 $x=20$ 时 $H(x)$ 取得最大值，即 $H(x)_{max}=H(20)=441$ ，

即 $H(x)$ 的最大值为 441 .

20.【答案】（1） $(-\infty,-1)\cup(1,+\infty)$

（2） $a<2$

【分析】（1）选择条件①代入计算即可求得 m 值，再列出不等式解出即可；选择条件②根据二次函数的最值即可得到 m 的值；

（2）求出分段函数 $M(x)$ ，再分离参数，利用基本不等式即可得到答案.

【小问 1 详解】

若选择条件①因为 $f(-3)=f(1)$ ，

所以 $9-5m=1+3m$ ，故 $m=1$.

所以 $f(x)=x^2+2x+1,g(x)=2x+2$ ，

因为 $f(x)>g(x)$ ，故 $x^2+2x+1>2x+2$ ，

解得 $x<-1$ 或 $x>1$ ，

所以不等式解集为 $(-\infty,-1)\cup(1,+\infty)$.

若选择条件② $\forall x\in R,f(x)\ge f(-1)$ 恒成立，故 $f(x)$ 最小值为 $f(-1)$ ，

所以对称轴方程为 $x=-1$ ，所以 $x=-m=-1$ ，故 $m=1$.以下同条件条件①.

【小问 2 详解】

不论是条件①或是条件②均可以得到 $m=1$ ，

因为 $\forall x\in\mathrm{R}, M(x)=\max\{f(x),g(x)\}$，

根据（1）中条件①的同种方法即可得到当 $-1<x<1$ 时， $f(x)<g(x)$，

所以 $M(x)=\begin{cases}x^2+2x+1, x\ge -1\\ 2x+2, -1<x<1\\ x^2+2x+1, x\le 1\end{cases}$，

又因为当 $x\in[1,4]$，不等式 $M(x)>a(g(x)-2)$ 恒成立，

故当 $x\in[1,4]$，不等式 $x^2+2x+1>2ax$ 恒成立，

即 $2a<x+\dfrac{1}{x}+2$ 恒成立， $x\in[1,4]$.

因为 $x+\dfrac{1}{x}+2\ge 2\sqrt{x\cdot\dfrac{1}{x}}+2=4$，

当且仅当 $x=1$ 时等号成立，故 $2a<4$，即 $a<2$.

21.【答案】（1）集合 $A=\{1,2,3\}$ 具有性质 F_3；集合 $B=\{4,6\}$ 不具有性质 F_3；

（2）证明见解析　（3） $2k-1$

【分析】（1）根据定义直接判断得到答案.

（2）确定 $d(S)=\dfrac{1}{a_1}-\dfrac{1}{a_n}$，变换 $d(S)=\dfrac{1}{a_1}-\dfrac{1}{a_n}=\left|\dfrac{1}{a_1}-\dfrac{1}{a_2}\right|+\left|\dfrac{1}{a_2}-\dfrac{1}{a_3}\right|+\cdots+\left|\dfrac{1}{a_{n-1}}-\dfrac{1}{a_n}\right|$，计算得到证明.

（3）确定 $d(a_i,a_n)\ge\dfrac{n-i}{k^2}$，得到 $\dfrac{1}{a_i}>\dfrac{n-i}{k^2}$，确定 $\dfrac{1}{i}>\dfrac{n-i}{k^2}$，再根据均值不等式计算最值得到答案.

【小问 1 详解】

$A=\{1,2,3\}$，则 $d(a_1,a_2)=d(a_2,a_1)=\left|\dfrac{1}{1}-\dfrac{1}{2}\right|=\dfrac{1}{2}\ge\dfrac{1}{9}$；

$d(a_3,a_2)=d(a_2,a_3)=\left|\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{2}\right|=\dfrac{1}{6}\ge\dfrac{1}{9}$； $d(a_1,a_3)=d(a_3,a_1)=\left|\dfrac{1}{1}-\dfrac{1}{3}\right|=\dfrac{2}{3}\ge\dfrac{1}{9}$，

故集合 $A=\{1,2,3\}$ 具有性质 F_3；

$B=\{4,6\}$，故 $d(b_1,b_2)=d(b_2,b_1)=\left|\dfrac{1}{4}-\dfrac{1}{6}\right|=\dfrac{1}{12}<\dfrac{1}{9}$，

故集合 $B=\{4,6\}$ 不具有性质 F_3；

【小问 2 详解】

$S=\{a_1,a_2,\cdots,a_n\}(n\ge 2,n\in\mathrm{N}), 0<a_1<a_2<\cdots<a_n$，

故 $\dfrac{1}{a_1}>\dfrac{1}{a_2}>\cdots>\dfrac{1}{a_n}>0$，故 $d(a_i,a_j)_{\max}=\dfrac{1}{a_1}-\dfrac{1}{a_n}$，即 $d(S)=\dfrac{1}{a_1}-\dfrac{1}{a_n}$，

集合S具有性质F_4，故$d\left(a_i,a_j\right)\geq\frac{1}{16}$，

$$d\left(S\right)=\frac{1}{a_1}-\frac{1}{a_n}=\left|\frac{1}{a_1}-\frac{1}{a_2}\right|+\left|\frac{1}{a_2}-\frac{1}{a_3}\right|+\cdots+\left|\frac{1}{a_{n-1}}-\frac{1}{a_n}\right|\geq\frac{1}{16}+\frac{1}{16}+\cdots+\frac{1}{16}=\frac{n-1}{16}.$$

【小问3详解】

集合S具有性质F_k，则$d\left(a_i,a_j\right)\geq\frac{1}{k^2}$，$a_1\geq1$，$a_i\geq i$，$i\in\mathrm{N}^*$，

$$d\left(a_i,a_n\right)=\left|\frac{1}{a_i}-\frac{1}{a_n}\right|=\frac{1}{a_i}-\frac{1}{a_n}=\left|\frac{1}{a_i}-\frac{1}{a_{i+1}}\right|+\left|\frac{1}{a_{i+1}}-\frac{1}{a_{i+2}}\right|+\cdots+\left|\frac{1}{a_{n-1}}-\frac{1}{a_n}\right|\geq\frac{n-i}{k^2},$$

故$\frac{1}{a_i}>\frac{n-i}{k^2}$，

又$a_i\geq i$，故$\frac{1}{a_i}\leq\frac{1}{i}$，即$\frac{1}{i}>\frac{n-i}{k^2}$，$i\in\mathrm{N}^*$，$k^2>i\left(n-i\right)\geq\left(\frac{i+n-i}{2}\right)^2=\frac{n^2}{4}$，

当n为偶数时当且仅当$i=n-i$，即$n=2i$时等号成立，

当n为奇数时等号不成立，$\left[i\left(n-i\right)\right]_{\max}=\frac{n^2-1}{4}$，故$k^2>\frac{n^2-1}{4}$，即$n^2<4k^2+1$，

故$n\leq2k-1$，

综上所述：$n\leq2k-1$，故n的最大值为$2k-1$.

【点睛】关键点睛：本题考查了集合综合应用，意在考查学生的计算能力，转换能力和综合应用能力，其中根据集合中元素的大小关系，确定$\frac{1}{a_1}>\frac{1}{a_2}>\cdots>\frac{1}{a_n}>0$，再利用绝对值的性质计算是解题的关键.

北京高一高二高三期中试题下载

京考一点通团队整理了【**2023 年 10-11 月北京各区各年级期中试题&答案汇总**】专题，及时更新最新试题及答案。

通过【**京考一点通**】公众号，对话框回复【**期中**】或者点击公众号底部栏目<**试题专区**>，进入各年级汇总专题，查看并下载电子版试题及答案！