2023届高三一轮复习联考(四)

数 学 试 题

注意事项:

1.答卷前,考生务必将自己的姓名、考场号、座位号、准考证号填写在答题卡上。

2.回答选择题时,选出每小题答案后,用2B铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。如需改动,用橡皮擦干净后,再选涂其他答案标号。回答非选择题时,将答案写在答题卡上。写在本试卷上无效。

3.考试结束后,将本试卷和答题卡一并交回。

考试时间为120分钟,满分150分

一、选择题:本题共8小题,每小题5分,共40分。在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的。

1.已知全集 $U=\mathbf{R}$, $A=\{x\mid 1\leqslant x\leqslant 3\}$, $B=\{x\mid x>1\}$,则 $A\cap(\complement_U B)=$

A.$[-3,1]$　　B.$[1,3]$　　C.$\{1\}$　　D.$(-\infty,0]$

2.已知复数 z 满足 $z(2+\mathrm{i})=2-\mathrm{i}$,其中 i 为虚数单位,则 $|z|=$

A.$\frac{1}{3}$　　B.$\frac{1}{2}$　　C.1　　D.2

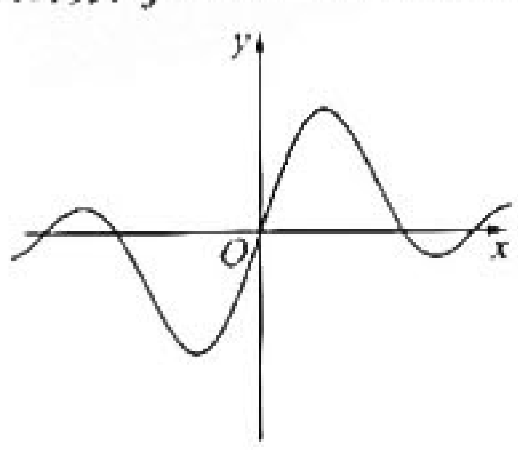
3.下列函数中,值域为 **R** 且为奇函数的是

A.$y=\frac{1}{x}$　　B.$y=\tan x$　　C.$y=1-x^3$　　D.$y=2^x$

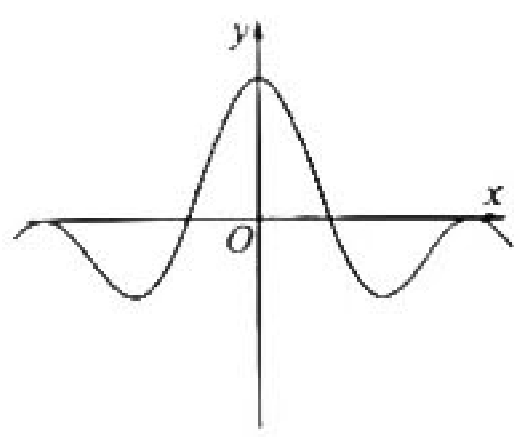
4.等差数列 $\{a_n\}$ 中,$a_1-2a_2=6$,$S_3=-27$,当 S_n 取得最小值时,n 的值为

A.4或5　　B.5或6　　C.4　　D.5

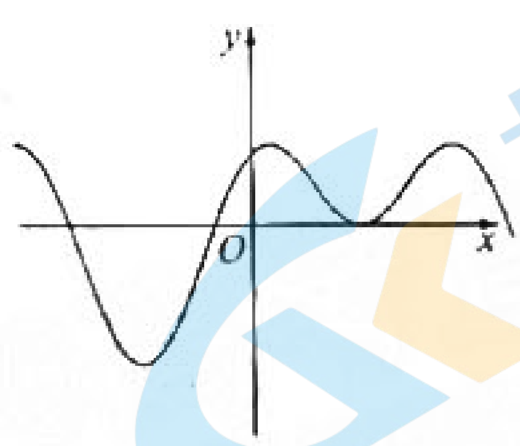
5.函数 $f(x)=\cos x+\sin 2x$ 的图象可能是



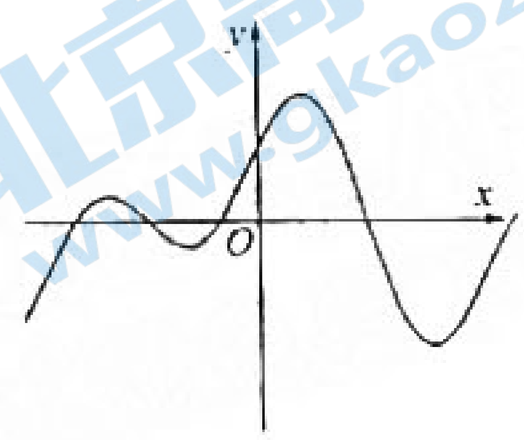
A



B



C

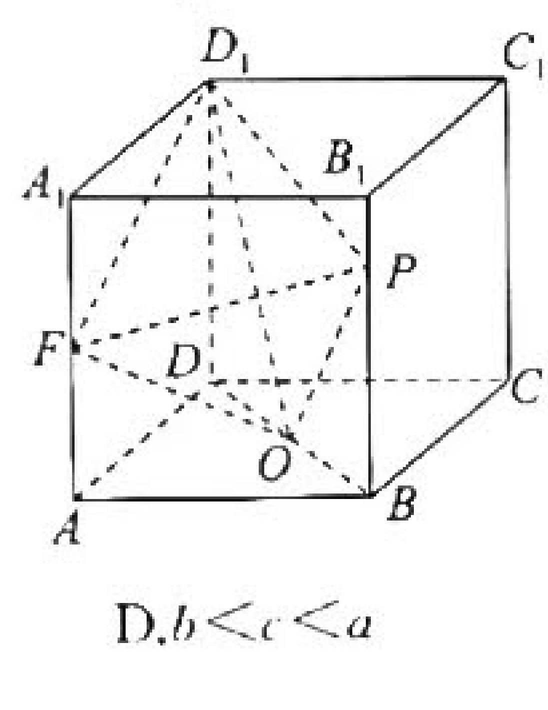


D

6.已知正数 a,b 满足 $a^2+2b^2=1$,则 ab^2 的最大值是

A.$\frac{1}{3}$　　B.$\frac{\sqrt{3}}{3}$　　C.$\frac{\sqrt{3}}{9}$　　D.$\frac{1}{9}$

7.如图所示,在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中,O,F 分别为 BD,AA_1 的中点,点 P 为棱 BB_1 上一点,设二面角 $F-D_1O-P$ 的平面角为 α,直线 OF 与平面 OPD_1 所成角为 β,则



A.$\alpha>\beta$　　B.$\alpha<\beta$

C.$\alpha=\beta$　　D.以上均有可能

8.已知 $a=\frac{\ln \pi}{\pi}$,$b=1-\frac{3}{2\pi}$,$c=\sin\frac{2\pi}{5}$,则 a,b,c 的大小关系为

A.$a<c<b$　　B.$a<b<c$　　C.$c<a<b$　　D.$b<c<a$

二、选择题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求。全部选对的得 5 分，部分选对的得 2 分，有选错的得 0 分。

9.下列命题中为真命题的是

A. $\exists x\in\mathbf{R}, \sin x=\frac{\sqrt{2}}{2}$ B. $\exists x\in\mathbf{R}, \ln x=-1$

C. $\forall x\in\mathbf{R}, x^2>0$ D. $\forall x\in\mathbf{R}, 3^x>0$

10.关于函数 $f(x)=2\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)$，下列说法正确的是

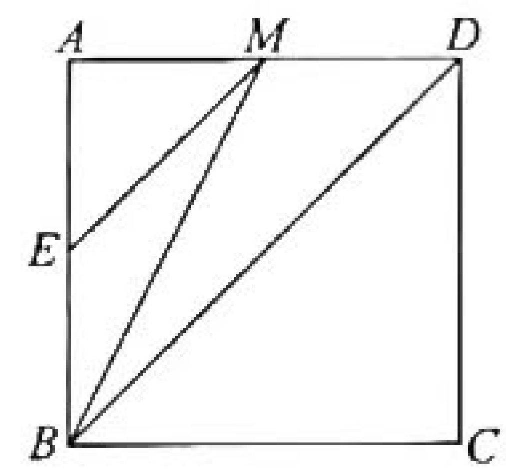
A.函数 $f(x)$ 在 $\left[\frac{\pi}{4},\frac{2\pi}{3}\right]$ 上单调递减

B.函数 $f(x)$ 的图象关于 $\left(-\frac{\pi}{6},0\right)$ 中心对称

C.函数 $f(x)$ 的对称轴方程为 $x=\frac{\pi}{6}+\frac{k\pi}{2}, k\in\mathbf{Z}$

D.将 $f(x)$ 的图象向右平移 $\frac{5\pi}{6}$ 个单位长度后，可以得到 $g(x)=2\cos 2x$ 的图象

11.如图，正方形 $ABCD$ 中，E 为 AB 中点，M 为线段 AD 上的动点，且 $\overrightarrow{BM}=\lambda\overrightarrow{BE}+\mu\overrightarrow{BD}$，则下列结论正确的是



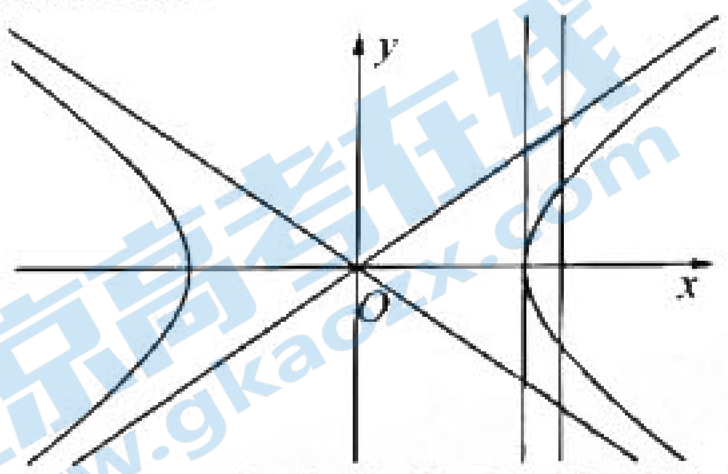
A.当 M 为线段 AD 上的中点时，$\lambda+\mu=\frac{3}{2}$

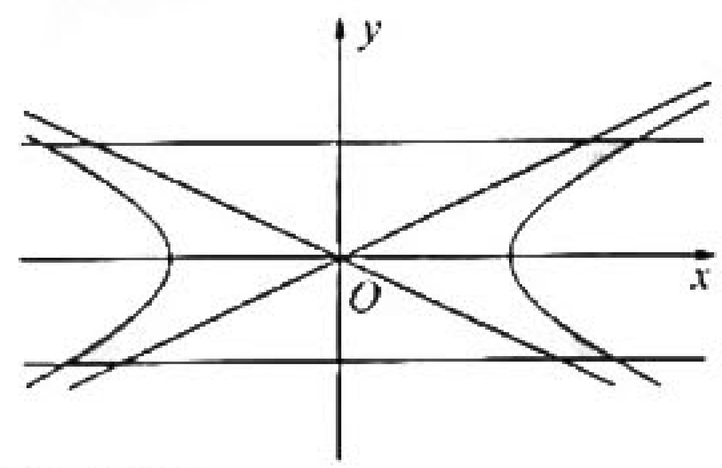
B.$\lambda\mu$ 的最大值为 $\frac{1}{2}$

C.μ 的取值范围为 $[0,1]$

D.$\lambda+\mu$ 的取值范围为 $\left[\frac{1}{2},2\right]$

12.祖暅原理也称祖氏原理，是一个涉及求几何体体积的著名数学命题.公元 656 年，唐代李淳风注《九章算术》时提到祖暅的开立圆术.祖暅在求球体积时，使用一个原理："幂势既同，则积不容异"。"幂"是截面积，"势"是几何体的高.意思是两个同高的几何体，如在等高处的截面面积相等，则体积相等.更详细点说就是，夹在两个平行平面间的两个几何体，被平行于这两个平面的任意平面所截，如果截得的两个截面的面积相等，那么这两个几何体的体积相等.上述原理在中国被称为祖暅原理，国外则一般称之为卡瓦列利原理.已知将双曲线 $C:\frac{x^2}{8}-\frac{y^2}{2}=1$ 与它的渐近线以及直线 $x=2\sqrt{2}, x=4$ 围成的图形绕 x 轴旋转一周得到一个旋转体Ⅰ，将双曲线 C 与直线 $y=\pm 2$ 围成的图形绕 y 轴旋转一周得到一个旋转体Ⅱ，则关于这两个旋转体叙述正确的是





A.由垂直于 y 轴的平面截旋转体Ⅱ，得到的截面为圆面

B.旋转体Ⅱ的体积为 $\frac{112\pi}{3}$

C.将旋转体Ⅰ放入球中，则球的表面积的最小值为 16π

D.旋转体Ⅰ的体积为 $(8-4\sqrt{2})\pi$

三、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。

13.已知数列$\{a_n\}$的前 4 项为 1,0,1,2,写出数列$\{a_n\}$的一个通项公式,$a_n=$________.

14.已知平面向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 是两两夹角均为$\frac{2\pi}{3}$的单位向量,则$|\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b}+3\boldsymbol{c}|=$________.

15.已知椭圆 $C_1:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$的右焦点 F 是抛物线 $C_2:y^2=2px$ 的焦点,抛物线 C_2 的准线与 x 轴交于点M.设点 A 为椭圆与抛物线的一个交点,以 AM 为直径的圆过点 F,则椭圆的离心率为________.

16.正实数 a,b 满足 $e^{a+1}-a=4$,$\frac{\ln(b+3)}{b}=1$,则 $b-a$ 的值为________.

四、解答题：本题共 6 小题，共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17.(10 分)记 S_n 为数列$\{a_n\}$的前 n 项和,已知 $S_n=na_n-n^2+n$.

(1)证明:$\{a_n\}$是等差数列;

(2)若 $a_1=-7$,记 $b_n=\frac{a_n+9}{n^2(n+1)}$,求数列$\{b_n\}$的前 n 项和 T_n.

18.(12 分)已知直线 $l:3x-4y-5=0$,圆 $C:x^2+y^2-2x-4y-4=0$,点 $B(1,0)$.

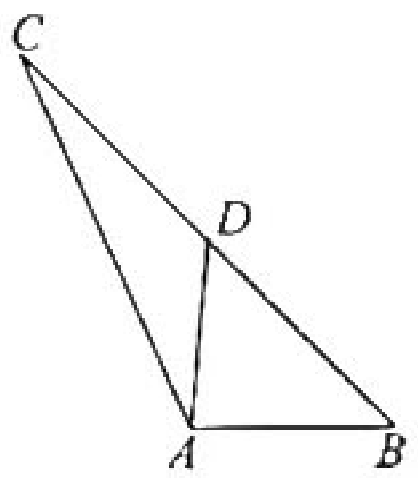
(1)求过点 B 且与 x 轴,圆 C 都相切的圆 D 的方程;

(2)点 P 为直线l 上的动点,点 E,F 为圆C 上的两点,且直线 EF 将圆C 分成了面积相等的两部分,求$\overrightarrow{PE}\cdot\overrightarrow{PF}-|\overrightarrow{BE}|^2$ 的最小值.

19.(12 分)如图,在$\triangle ABC$ 中$\angle B=\frac{\pi}{4}$,$AC=2AB$,D 为线段 BC 上一点,$\angle CAD=\frac{\pi}{6}$.

(1)求$\frac{CD}{AD}$的值;

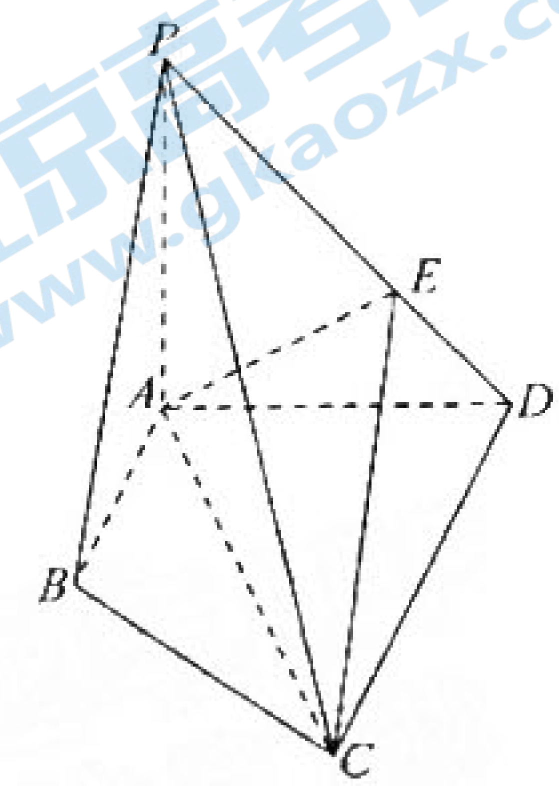
(2)当 $AD=4$ 时,求线段 AC 的长.



20.(12分)已知四棱锥 $P-ABCD$ 中，$PA\perp$底面 $ABCD$，平面 $PAD\perp$平面 PCD，$AB\parallel CD$，$\overrightarrow{PE}=2\overrightarrow{ED}$.

(1)求证：$AB\perp$平面 PAD；

(2)若 $PA=AB=AD=\frac{1}{2}CD=1$，求二面角 $A-EC-D$ 的余弦值.



21.(12分)已知双曲线 $C:\frac{x^2}{a^2}-y^2=1$ 的右焦点为 F，点 M,N 分别为双曲线 C 的左、右顶点，过点 F 的直线 l 交双曲线的右支于 P,Q 两点，设直线 MP,NP 的斜率分别为 k_1,k_2，且 $k_1k_2=\frac{1}{3}$.

(1)求双曲线 C 的方程；

(2)当点 P 在第一象限，且 $\frac{\tan\angle MPN}{\tan\angle MQN}=\frac{1}{2}$ 时，求直线 l 的方程.

22.(12分)已知函数 $f(x)=e^{2x}-ax^2-\frac{1}{2}$，$g(x)=2x^2(e^x-x^2+x)$.

(1)若 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递增，求 a 的取值范围；

(2)当 $a=-1$ 时，证明：$f(x)>g(x)$.

2023届高三一轮复习联考(四)

数学参考答案及评分意见

1.C 【解析】$A=[1,3]$, $\complement_U B=(-\infty,1]$, $A\cap(\complement_U B)=\{1\}$.故选 C.

2.C 【解析】$z(2+\mathrm{i})=2-\mathrm{i}$, $z=\dfrac{2-\mathrm{i}}{2+\mathrm{i}}=\dfrac{(2-\mathrm{i})(2-\mathrm{i})}{5}=\dfrac{3-4\mathrm{i}}{5}$, $|z|=\sqrt{\left(\dfrac{3}{5}\right)^2+\left(-\dfrac{4}{5}\right)^2}=\sqrt{\dfrac{25}{25}}=1$.故选 C.

3.B 【解析】A 选项,$y=\dfrac{1}{x}$,值域为$(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$,奇函数,故排除;

B 选项,$y=\tan x$,值域为 $\mathbf{R}$,奇函数,符合题意;

C 选项,$y=1-x^3$,值域为 $\mathbf{R}$,非奇非偶函数,故排除;

D 选项,$y=2^x$,值域为$(0,+\infty)$,非奇非偶函数,故排除.故选 B.

4.A 【解析】设等差数列$\{a_n\}$的首相为 a_1,公差为 d,$\begin{cases}a_1-2(a_1+d)=6,\\3a_1+\dfrac{3\times(3-1)}{2}d=-27,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}a_1=-12,\\d=3,\end{cases}$ 则 $a_n=3n-15$,令 $a_n\leqslant0$,解得 $n\leqslant$ 5.故选 A.

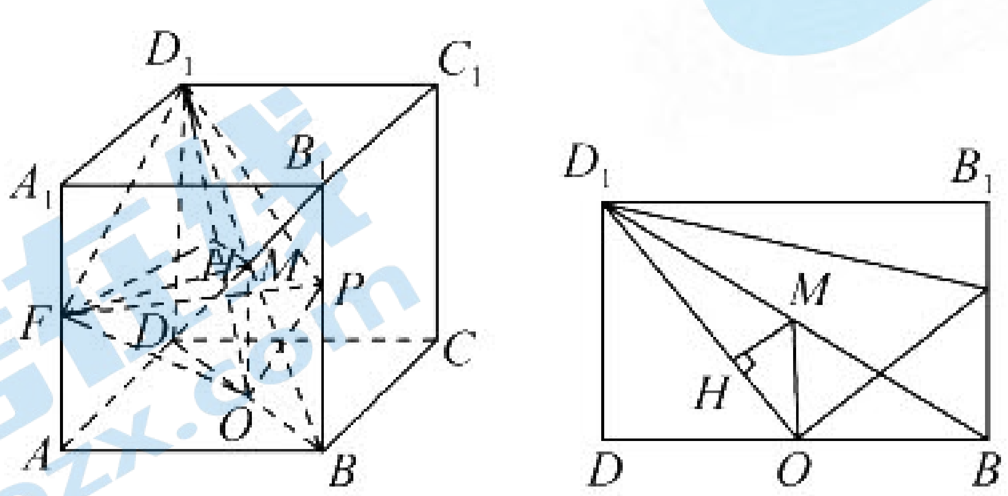
5.D 【解析】$f(x)=\cos x+\sin 2x$ 是非奇非偶函数,故排除 A、B,$f\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=\cos\dfrac{\pi}{2}+\sin\pi=0$,当 $x\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$时,$f(x)>0$,当 $x\in\left(\dfrac{\pi}{2},\pi\right)$时,$f(x)=\cos x+\sin 2x<0$,结合图象可排除 C.故选 D.

6.C 【解析】解法一:因为 $a^2+2b^2=a^2+b^2+b^2\geqslant3\sqrt[3]{a^2b^2b^2}$,所以 $\sqrt[3]{a^2b^4}\leqslant\dfrac{1}{3}$,当且仅当 $a=b=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$时等号成立,所以 $ab^2\leqslant\dfrac{\sqrt{3}}{9}$,故选 C.

解法二:$a^2+2b^2=1$,$ab^2=\dfrac{1}{2}a(1-a^2)=\dfrac{1}{2}(a-a^3)$,令 $f(x)=\dfrac{1}{2}(x-x^3)$,$x\in(0,1)$,则 $f'(x)=\dfrac{1}{2}(1-3x^2)$,

当 $x\in\left(0,\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right)$时,$f'(x)>0$,当 $x\in\left(\dfrac{\sqrt{3}}{3},1\right)$时,$f'(x)<0$,故当 $x=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$时,$f(x)$在$(0,1)$上取得最大值 $f\left(\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right)=\dfrac{1}{2}\times\left[\dfrac{\sqrt{3}}{3}-\left(\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right)^3\right]=\dfrac{\sqrt{3}}{9}$.故选 C.

7.A 【解析】设点 M 为 B_1D 与 BD_1 的交点,易知 $FM\perp$平面 BB_1D_1D,即 $FM\perp$平面 OPD_1,所以$\angle FOM=\beta$,过点 F 作 D_1O 的垂线 FH,垂足为 H,则 $MH\perp D_1O$,所以$\angle FHM=\alpha$,从而 $\tan\alpha=\dfrac{MF}{MH}$,$\tan\beta=\dfrac{MF}{MO}$,在 Rt$\triangle MOH$ 中,$MO>MH$,所以 $\tan\alpha>\tan\beta$,所以 $\alpha>\beta$.故选 A.

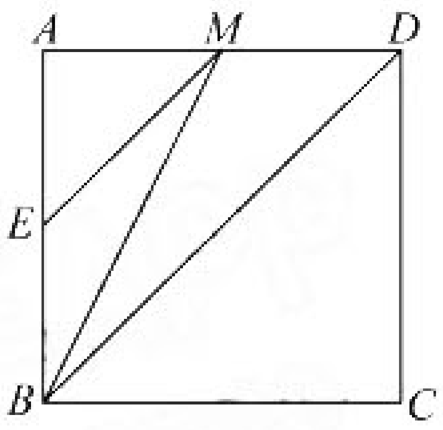


8.B 【解析】设函数 $f(x)=\dfrac{\ln x}{x}$,$f'(x)=\dfrac{1-\ln x}{x^2}$,当 $x>\mathrm{e}$ 时,$f'(x)<0$,函数 $f(x)$在$(\mathrm{e},+\infty)$上单调递减,$\pi>\mathrm{e}$,$\therefore f(\pi)<f(\mathrm{e})$,即 $\dfrac{\ln\pi}{\pi}<\dfrac{1}{\mathrm{e}}$,$\because 2<\dfrac{2\pi}{3}<3$,$\therefore \dfrac{1}{2}<1-\dfrac{3}{2\pi}<\dfrac{2}{3}<\dfrac{\sqrt{3}}{2}=\sin\dfrac{\pi}{3}<\sin\dfrac{2\pi}{5}$,综上,$a<\dfrac{1}{\mathrm{e}}<\dfrac{1}{2}<b<\dfrac{2}{3}<c$,即 $a<b<c$.故选 B.

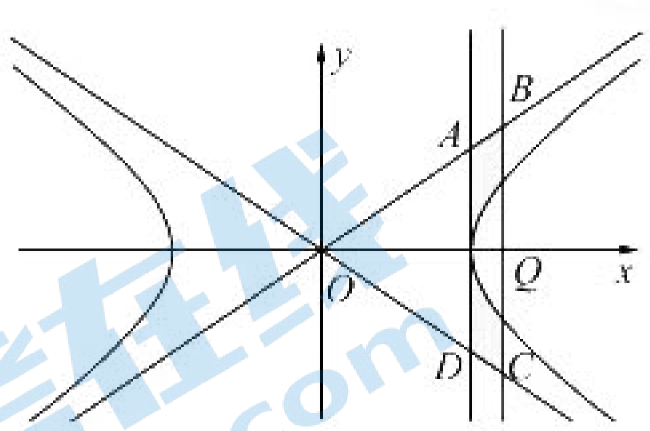
9.ABD 【解析】对于 A,因为$-1\leqslant\sin x\leqslant1$,故正确;对于 B,当 $x=\dfrac{1}{\mathrm{e}}$时,等式成立,故正确;对于 C,当 $x=0$ 时,$x^2=0$,故错误;对于 D,$\forall x\in\mathbf{R}$,$3^x>0$,成立,故正确.故选 ABD.

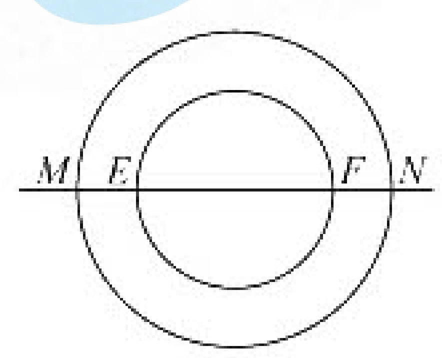
10.ACD 【解析】对于 A，$f(x)=2\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)$，当 $x\in\left[\frac{\pi}{4},\frac{2\pi}{3}\right]$时，$2x+\frac{\pi}{6}\in\left[\frac{2\pi}{3},\frac{3\pi}{2}\right]$，$f(x)$在区间$\left[\frac{\pi}{4},\frac{2\pi}{3}\right]$上单调递减，A 选项正确；对于 B，当 $x=-\frac{\pi}{6}$时，$f\left(-\frac{\pi}{6}\right)=2\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)=-1\neq0$，B 选项错误；对于 C，令 $2x+\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{2}+k\pi$ 可得对称轴为 $x=\frac{\pi}{6}+\frac{k\pi}{2}$，$k\in\mathbf{Z}$，所以 C 选项正确；将 $f(x)$的图象向右平移$\frac{5\pi}{6}$个单位长度后即得 $f\left(x-\frac{5\pi}{6}\right)=2\sin\left[2\left(x-\frac{5\pi}{6}\right)+\frac{\pi}{6}\right]=2\sin\left(2x-\frac{3\pi}{2}\right)=2\cos 2x$，D 选项正确.故选 ACD.

11.ABC 【解析】对于 A 选项，$\overrightarrow{BM}=\frac{1}{2}\overrightarrow{BA}+\frac{1}{2}\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{BE}+\frac{1}{2}\overrightarrow{BD}$，$\lambda=1$，$\mu=\frac{1}{2}$，$\lambda+\mu=\frac{3}{2}$，则 A 正确；对于 B 选项，$\overrightarrow{BM}=\frac{\lambda}{2}\overrightarrow{BA}+\mu\overrightarrow{BD}$，$\frac{\lambda}{2}+\mu=1$，$\lambda\mu=2\cdot\frac{\lambda}{2}\mu\leqslant2\left(\frac{\frac{\lambda}{2}+\mu}{2}\right)^2=\frac{1}{2}$，当且仅当$\frac{\lambda}{2}=\mu=\frac{1}{2}$时，等号成立，则 B 正确；对于 C 选项，$M$ 为线段 AD 上的动点，则 μ 的取值范围为$[0,1]$；对于 D 选项，由选项 B，C 可知，$\mu=1-\frac{\lambda}{2}\in[0,1]$，即 $\lambda\in[0,2]$，$\lambda+\mu=\lambda+1-\frac{\lambda}{2}=1+\frac{\lambda}{2}\in[1,2]$，所以 D 不正确.故选 ABC.



12.ACD 【解析】$y=h(-2<h<2)$与双曲线的交点为 $P(\sqrt{8+4h^2},h)$，$Q(-\sqrt{8+4h^2},h)$，则用垂直于 y 轴的平面截旋转体Ⅱ的截面为圆面，故 A 正确；截面圆的半径为 $\sqrt{8+4h^2}$，截面面积为$(8+4h^2)\pi$，$y=h(-2<h<2)$与双曲线的渐近线的交点为$(\pm2h,h)$，所以 $4h^2\pi$ 是用垂直于 y 轴的平面截两条渐近线绕 y 轴旋转得到的旋转体的截面面积，$y=\pm2$，$y=\pm\frac{1}{2}x$ 绕 y 轴旋转得到的旋转体(两个圆锥)的体积为 $2\times\frac{1}{3}\times2\times16\pi=\frac{64\pi}{3}$，因为底面半径为 $2\sqrt{2}$ 的圆柱的截面面积为 8π，此等高圆柱的体积为 $4\times8\pi=32\pi$，所以旋转体Ⅱ的体积为 $V=4\times8\pi+\frac{64\pi}{3}=\frac{160}{3}\pi$，故 B 错误；双曲线 $C:\frac{x^2}{8}-\frac{y^2}{2}=1$ 的右顶点为$(2\sqrt{2},0)$，渐近线的方程为 $y=\pm\frac{1}{2}x$，当 $x=4$ 时，$y=\pm2$，由对称性可知，若将旋转体Ⅰ放入球中时，当球的表面积最小时，A，B，C，D 均在球面上或球内，且此时球的半径与四边形 $ABCD$ 的外接圆的半径相等，四边形 $ABCD$ 的外接圆的圆心在 x 轴上，不妨设为点 Q，由图可知对应的球的半径至少为 2，由图象可知此时 $Q(4,0)$，$|QB|=2$，$|QA|=\sqrt{(4-2\sqrt{2})^2+(\sqrt{2})^2}=\sqrt{26-16\sqrt{2}}<2$，所以 A，B，C，D 均在球面上或球内，所以 C 正确；$x=m(2\sqrt{2}<m<4)$与渐近线交于点 $M\left(m,\frac{1}{2}m\right)$，$N\left(m,-\frac{1}{2}m\right)$，与双曲线交于点 $E\left(m,\sqrt{\frac{m^2}{4}-2}\right)$，$F\left(m,-\sqrt{\frac{m^2}{4}-2}\right)$，则用垂直于 x 轴的平面截旋转体Ⅰ的截面应为圆环，其内径为 $EF=2\sqrt{\frac{m^2}{4}-2}$，外径为 $MN=m$，截面积为$\left(\frac{1}{2}|MN|\right)^2\pi-\left(\frac{1}{2}|EF|\right)^2\pi=2\pi$，根据祖暅原理旋转体Ⅰ的体积为$(4-2\sqrt{2})\times2\pi=(8-4\sqrt{2})\pi$，故 D 正确，故选 ACD.





13.$a_n=\cos\frac{n\pi}{2}+1$ 或 $a_n=\begin{cases}1,n=1,\\n-2,n\geqslant2,n\in\mathbf{N}^*.\end{cases}$（答案不唯一） 【解析】因为 $\cos\frac{\pi}{2}=0$，$\cos\pi=-1$，$\cos\frac{3\pi}{2}=0$，$\cos2\pi=1$，所以数列的通项公式可以为 $a_n=\cos\frac{n\pi}{2}+1$；发现数列第 2 项，第 3 项，第 4 项，每一项都是项数减 1，只有第一项不符合，所以数列的通项公式也可以写为 $a_n=\begin{cases}1,n=1,\\n-2,n\geqslant2,n\in\mathbf{N}^*.\end{cases}$

14.$\sqrt{3}$ 【解析】因为平面向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{c}$ 两两夹角均为$\frac{2}{3}\pi$，$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}=\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}=1\times1\times\left(-\frac{1}{2}\right)=-\frac{1}{2}$，

且 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{0}$，$|\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b}+3\boldsymbol{c}|^2=|\boldsymbol{b}+2\boldsymbol{c}|^2=\boldsymbol{b}^2+4\boldsymbol{c}^2+4\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}=1+4+4\times\left(-\frac{1}{2}\right)=3$，所以 $|\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b}+3\boldsymbol{c}|=\sqrt{3}$，故答案为 $\sqrt{3}$.

15.$\sqrt{2}-1$ 【解析】解法一：以 AM 为直径的圆过点 F，所以三角形 AFM 为直角三角形，$AF\perp MF$，则 $F(c,0)$，$AF=\frac{b^2}{a}$，又 A 为椭圆和抛物线的交点，F 为椭圆右焦点，同时是抛物线的焦点，故准线方程为 $x=-c$，由抛物线定义 $\frac{b^2}{a}=2c$，即 $b^2=2ac$，所以 $a^2-c^2=2ac$，所以 $1-e^2=2e$，解得 $e=\sqrt{2}-1$(舍掉负值)，所以椭圆的离心率为 $\sqrt{2}-1$.

解法二：由题意知 $\frac{p}{2}=c$，点 M 即为椭圆的左焦点，设 $A(x_0,y_0)$，则 $\frac{x_0^2}{a^2}+\frac{y_0^2}{b^2}=1$，所以 $|AF|=\sqrt{(x_0-c)^2+y_0^2}=\sqrt{x_0^2-2cx_0+c^2+b^2-\frac{b^2}{a^2}x_0^2}=a-\frac{c}{a}x_0$，过点 A 作垂直于准线的直线 AN，垂足为 N，则 $|AF|=|AN|=x_0+\frac{p}{2}=x_0+c$，所以 $x_0+c=a-\frac{c}{a}x_0$，解得 $x_0=\frac{a(a-c)}{a+c}$，以 AM 为直径的圆过点 F，所以 $AF\perp MF$，即 $x_0=c$，所以 $\frac{a(a-c)}{a+c}=c$，化简得 $c^2+2ac-a^2=0$，所以 $e^2+2e-1=0$，解得 $e=\sqrt{2}-1$(舍掉负值)，所以椭圆的离心率为 $\sqrt{2}-1$.

16.1 【解析】解法一：由 $e^{a+1}-a=4$，$\frac{\ln(b+3)}{b}=1$，得 $\ln(a+4)=a+1$，$\ln(b+3)=b$，所以 b，$a+1$ 是方程 $\ln(x+3)=x$ 的两个解，设函数 $f(x)=\ln(x+3)-x(x>0)$，$f'(x)=\frac{1}{x+3}-1=\frac{-2-x}{x+3}<0$，所以函数 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递减，方程只有一个解，所以 $b=a+1$，故 $b-a=1$.

解法二：因为 $e^{a+1}-a=4$，所以 $e^{a+1}-(a+1)-3=0$，因为 $\frac{\ln(b+3)}{b}=1$，所以 $b-\ln(b+3)=0$ 即 $e^{\ln(b+3)}-\ln(b+3)-3=0$，设函数 $f(x)=e^x-x-3\ (x>0)$，当 $x>0$ 时，$f'(x)=e^x-1>0$，所以函数 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，$\because a+1>0$，$\ln(b+3)>0$，$\therefore f(a+1)=f[\ln(b+3)]$，$\therefore a+1=\ln(b+3)$，$e^{a+1}=b+3$，$\therefore b-a=e^{a+1}-3-a=4-3=1$.

17.【解析】(1) $S_n=na_n-n^2+n$，

当 $n\geqslant 2$ 时，$S_{n-1}=(n-1)a_{n-1}-(n-1)^2+n-1$，…… 2 分

两式相减得 $a_n=na_n-(n-1)a_{n-1}-2n+2(n\geqslant 2)$，…… 4 分

$(n-1)a_n-(n-1)a_{n-1}=2(n-1)$，则有 $a_n-a_{n-1}=2(n\geqslant 2)$，

故 $\{a_n\}$ 是以 2 为公差的等差数列. …… 5 分

(2) $a_1=-7$，则 $a_n=-7+2(n-1)=2n-9$，

所以 $b_n=\frac{a_n+9}{n^2(n+1)}=\frac{2n}{n^2(n+1)}=\frac{2}{n(n+1)}=2\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)$，…… 8 分

数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和 $T_n=2\times\left(1-\frac{1}{2}\right)+2\times\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\cdots+2\times\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)=2\left(1-\frac{1}{n+1}\right)=\frac{2n}{n+1}$. …… 10 分

18.【解析】(1)把圆 $C:x^2+y^2-2x-4y-4=0$，化简成标准方程为 $C:(x-1)^2+(y-2)^2=9$，则圆心 $C(1,2)$，半径为 3. …… 1 分

设所求圆 D 的圆心 $D(a,b)$，半径为 r，因为圆 D 过点 B 且与 x 轴相切，则 $r=|b|$，$a=1$. …… 2 分

因为点 B 在圆 C 内部，且圆 D 与圆 C 相切，则 $\sqrt{(1-1)^2+(2-b)^2}=3-|b|$，

解得 $b=\frac{5}{2}$ 或 $b=-\frac{1}{2}$，…… 4 分

所以圆 D 的方程为 $(x-1)^2+\left(y-\frac{5}{2}\right)^2=\frac{25}{4}$ 或 $(x-1)^2+\left(y+\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{4}$. …… 6 分

(2)因为点 E，F 为圆 C 上的两点，且直线 EF 将圆 C 分成了面积相等的两部分，所以 EF 为圆 C 的直径，$\overrightarrow{PE}\cdot\overrightarrow{PF}=(\overrightarrow{PC}+\overrightarrow{CE})\cdot(\overrightarrow{PC}+\overrightarrow{CF})=|\overrightarrow{PC}|^2-9$，…… 8 分

点 $B(1,0)$ 在圆内，从而当 $|\overrightarrow{PC}|$ 取最小值，$|\overrightarrow{BE}|$ 取最大值时，

$\overrightarrow{PE}\cdot\overrightarrow{PF}-|\overrightarrow{BE}|^2$ 取最小值，…… 9 分

$|\overrightarrow{PC}|_{\min}=\dfrac{|3\times1-4\times2-5|}{\sqrt{3^2+4^2}}=2$, …………………………………………………… 10 分

$|\overrightarrow{BE}|_{\max}=5$, …………………………………………………… 11 分

所以 $\overrightarrow{PE}\cdot\overrightarrow{PF}-|\overrightarrow{BE}|^2$ 的最小值是 $2^2-9-25=-30$. …………………………………………………… 12 分

19.【解析】(1)在 $\triangle ADC$ 中,由正弦定理可得 $\dfrac{CD}{\sin\angle CAD}=\dfrac{AC}{\sin\angle ADC}$,

即 $CD=\dfrac{AC}{\sin\angle ADC}\cdot\sin\dfrac{\pi}{6}$. …………………………………………………… 2 分

在 $\triangle ADB$ 中,由正弦定理可得 $\dfrac{AD}{\sin B}=\dfrac{AB}{\sin\angle ADB}$,即 $AD=\dfrac{AB}{\sin\angle ADB}\cdot\sin\dfrac{\pi}{4}$. …………………………………………………… 4 分

因为 $\angle ADC+\angle ADB=\pi$,所以 $\sin\angle ADC=\sin\angle ADB$, …………………………………………………… 5 分

所以 $\dfrac{CD}{AD}=\dfrac{AC\sin\dfrac{\pi}{6}}{AB\sin\dfrac{\pi}{4}}=\dfrac{AC}{\sqrt{2}AB}$,

因为 $AC=2AB$,所以 $\dfrac{CD}{AD}=\sqrt{2}$. …………………………………………………… 6 分

(2)当 $AD=4$ 时,由(1)可知 $CD=4\sqrt{2}$. …………………………………………………… 7 分

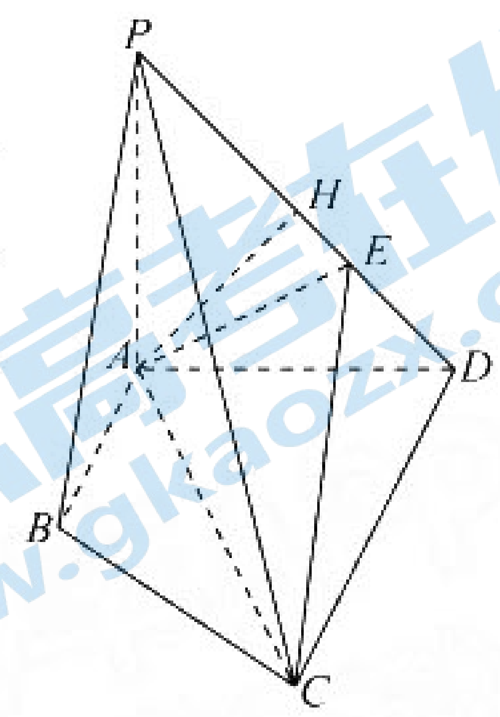
设 $AB=x$,则 $AC=2x$,

在 $\triangle ADC$ 中,由余弦定理可得 $CD^2=AC^2+AD^2-2AC\cdot AD\cos\dfrac{\pi}{6}$, …………………………………………………… 10 分

代入化简可得 $x^2-2\sqrt{3}x-4=0$,解得 $x=\sqrt{3}+\sqrt{7}$ 或 $x=\sqrt{3}-\sqrt{7}$(舍), …………………………………………………… 11 分

所以 $AC=2\sqrt{3}+2\sqrt{7}$. …………………………………………………… 12 分

20.【解析】(1)证明:因为平面 $PAD\perp$ 平面 PCD,平面 $PAD\cap$ 平面 $PCD=PD$,在平面 PAD 内作 $AH\perp PD$,

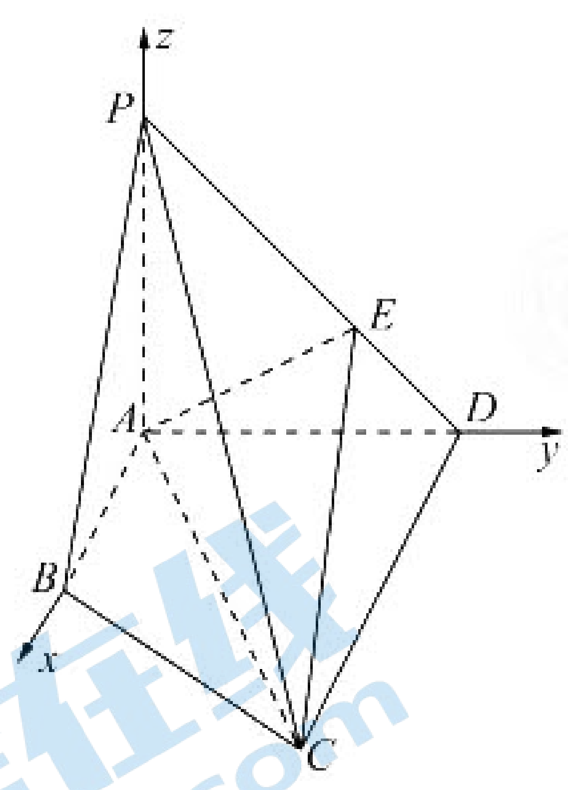


则 $AH\perp$ 平面 PCD,所以 $AH\perp CD$. …………………………………………………… 2 分

因为 $PA\perp$ 底面 $ABCD$,所以 $PA\perp CD$, …………………………………………………… 3 分

$AH\cap PA=A$,则 $CD\perp$ 平面 PAD,因为 $AB/\!/DC$,$\therefore AB\perp$ 平面 PAD. …………………………………………………… 4 分

(2)由(1)可知,$AB\perp AD$,以 A 为原点建立如图所示的空间直角坐标系,



因为 $PA=AB=AD=\dfrac{1}{2}CD=1$,$\overrightarrow{PE}=2\overrightarrow{ED}$,则 $A(0,0,0)$,$C(2,1,0)$,$D(0,1,0)$,$E\left(0,\dfrac{2}{3},\dfrac{1}{3}\right)$,

所以 $\overrightarrow{AC}=(2,1,0)$,$\overrightarrow{AE}=\left(0,\dfrac{2}{3},\dfrac{1}{3}\right)$,$\overrightarrow{DC}=(2,0,0)$,$\overrightarrow{DE}=\left(0,-\dfrac{1}{3},\dfrac{1}{3}\right)$, …………………………………………………… 6 分

设平面 AEC 的法向量为 $\boldsymbol{n}_1=(x_1,y_1,z_1)$,则 $\begin{cases}\boldsymbol{n}_1\cdot\overrightarrow{AC}=0,\\ \boldsymbol{n}_1\cdot\overrightarrow{AE}=0,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}2x_1+y_1=0,\\ \dfrac{2}{3}y_1+\dfrac{1}{3}z_1=0,\end{cases}$ 取 $\boldsymbol{n}_1=(1,-2,4)$, …………………………………………………… 8 分

设平面 DEC 的法向量为 $\boldsymbol{n}_2=(x_2,y_2,z_2)$,则$\begin{cases}\boldsymbol{n}_2\cdot\overrightarrow{DC}=0,\\\boldsymbol{n}_2\cdot\overrightarrow{DE}=0,\end{cases}$ 即$\begin{cases}2x_2=0,\\-\frac{1}{3}y_1+\frac{1}{3}z_1=0,\end{cases}$ 取 $\boldsymbol{n}_2=(0,1,1)$, ………………………… 10 分

所以 $\cos\langle\boldsymbol{n}_1,\boldsymbol{n}_2\rangle=\frac{\sqrt{42}}{21}$,由图可知二面角 $A-EC-D$ 为锐二面角,

所以二面角 $A-EC-D$ 的余弦值为$\frac{\sqrt{42}}{21}$. ………………………………………………………… 12 分

21.【解析】(1)设 $P(x_1,y_1)$,$M(-a,0)$,$N(a,0)$,$k_1=\frac{y_1}{x_1+a}$,$k_2=\frac{y_1}{x_1-a}$,$k_1\cdot k_2=\frac{y_1}{x_1+a}\cdot\frac{y_1}{x_1-a}=\frac{y_1^2}{x_1^2-a^2}=\frac{1}{3}$. ………… 2 分

因为点 P 是双曲线上的点,所以$\frac{x_1^2}{a^2}-y_1^2=1$,$\therefore\frac{y_1^2}{x_1^2-a^2}=\frac{1}{a^2}$,$\therefore a^2=3$, ………………………………………………… 3 分

所以双曲线 C 的方程为$\frac{x^2}{3}-y^2=1$. ………………………………………………………………………… 4 分

(2)设点 $P(x_1,y_1)$,$Q(x_2,y_2)$,点 P 在第一象限,则 $x_1>0$,$y_1>0$,$\tan\angle MPN=-\tan(\angle PMN+\angle PNM)=-\frac{\tan\angle PMN+\tan\angle PNM}{1-\tan\angle PMN\cdot\tan\angle PNM}$,

又 $\tan\angle PMN=k_{PM}=\frac{y_1}{x_1+\sqrt{3}}$,$\tan\angle PNM=-k_{PN}=\frac{-y_1}{x_1-\sqrt{3}}$,

故 $\tan\angle MPN=-\frac{\frac{y_1}{x_1+\sqrt{3}}-\frac{y_1}{x_1-\sqrt{3}}}{1+\frac{y_1}{x_1+\sqrt{3}}\times\frac{y_1}{x_1-\sqrt{3}}}=\frac{2\sqrt{3}y_1}{x_1^2+y_1^2-3}=\frac{2\sqrt{3}y_1}{4y_1^2}=\frac{\sqrt{3}}{2y_1}$,同理可得 $\tan\angle MQN=-\frac{\sqrt{3}}{2y_2}$,$\frac{\tan\angle MPN}{\tan\angle MQN}=\frac{1}{2}=-\frac{y_2}{y_1}$,

即 $y_1=-2y_2$, ………………………………………………………………………………………………… 6 分

由(1)可知 $F(2,0)$,设直线 $l:x=my+2(m>0)$,联立$\begin{cases}x=my+2,\\\frac{x^2}{3}-y^2=1,\end{cases}$ ………………………………………… 7 分

化简得 $(m^2-3)y^2+4my+1=0$, ………………………………………………………………………… 8 分

则 $m^2-3\neq0$,$\Delta=16m^2-4(m^2-3)=12m^2+12>0$,$y_1+y_2=\frac{-4m}{m^2-3}$,$y_1y_2=\frac{1}{m^2-3}<0$, ……………………… 9 分

$\therefore m^2<3$,$\because y_1=-2y_2>0$,代入韦达定理得$\begin{cases}y_1+y_2=\frac{-4m}{m^2-3}=-y_2,\\y_1y_2=\frac{1}{m^2-3}=-2y_2^2,\end{cases}$ ………………………………………… 10 分

所以$-2\left(\frac{-4m}{m^2-3}\right)^2=\frac{1}{m^2-3}$,解得 $m=\frac{\sqrt{11}}{11}$. ………………………………………………… 11 分

所以直线 l 的方程为 $\sqrt{11}x-y-2\sqrt{11}=0$. ………………………………………………………… 12 分

22.【解析】(1)$f(x)$在 $\mathbf{R}$ 上单调递增,所以 $f'(x)=2e^{2x}-2ax\geqslant0$ 恒成立,令 $h(x)=e^{2x}-ax$,$\therefore h(x)\geqslant0$ 恒成立. ………… 1 分

当 $a=0$ 时,$h(x)=e^{2x}>0$ 恒成立; ……………………………………………………………………… 2 分

当 $a<0$ 时,$h'(x)=2e^{2x}-a>0$,所以 $h(x)$在 $\mathbf{R}$ 上单调递增,$h\left(\frac{1}{a}\right)=e^{\frac{2}{a}}-1<0$,

所以 $x<-\frac{1}{a}$时,$h(x)<0$,故不符合题意; ………………………………………………………… 3 分

当 $a>0$ 时,令 $h'(x)=2e^{2x}-a=0$,解得 $x=\frac{1}{2}\ln\frac{a}{2}$,当 $x>\frac{1}{2}\ln\frac{a}{2}$时,$h'(x)>0$,$h(x)$单调递增;

当 $x<\frac{1}{2}\ln\frac{a}{2}$时,$h'(x)<0$,$h(x)$单调递减,所以 $h(x)_{\min}=h\left(\frac{1}{2}\ln\frac{a}{2}\right)=\frac{a}{2}-\frac{a}{2}\ln\frac{a}{2}\geqslant0$,

解得 $0<a\leqslant2e$, ……………………………………………………………………………………………… 4 分

综上，a 的取值范围是 $[0,2e]$. …… 5分

(2)当 $a=-1$ 时，$f(x)=e^{2x}+x^2-\frac{1}{2}$，要证 $f(x)>g(x)$，即证 $e^{2x}+x^2-\frac{1}{2}>2x^2\cdot e^x-2x^4+2x^3$，

只需证 $e^{2x}-2x^2\cdot e^x+x^4+x^4-2x^3+x^2>\frac{1}{2}$，即证 $2[(e^x-x^2)^2+(x^2-x)^2]>1$， …… 6分

令 $t(x)=e^x-2x^2+x$，$t'(x)=e^x-4x+1$，令 $p(x)=t'(x)$，$p'(x)=e^x-4$，

当 $x\in(-\infty,\ln 4)$ 时，$p'(x)<0$，当 $x\in(\ln 4,+\infty)$ 时，$p'(x)>0$，

所以 $t'(x)_{最小值}=5-8\ln 2<0$， …… 7分

$t'\left(\frac{1}{2}\right)=\sqrt{e}-1>0$，$t'(1)=e-3<0$，$t'(2)=e^2-7>0$，

故存在 $x_1\in\left(\frac{1}{2},1\right)$，$x_2\in(1,2)$ 使得 $t'(x_1)=e^{x_1}-4x_1+1=0$，$t'(x_2)=e^{x_2}-4x_2+1=0$，

即 $t(x)$ 在 $x\in(-\infty,x_1)$，$x\in(x_2,+\infty)$ 时递增，在 $x\in(x_1,x_2)$ 时递减， …… 8分

令 $q(x)=-2x^2+5x-1$，则二次函数 $q(x)$ 关于直线 $x=\frac{5}{4}$ 对称，函数图象开口向下，且 $q\left(\frac{1}{2}\right)=q(2)=1>0$，

故当 $x\in\left(\frac{1}{2},2\right)$ 时，$q(x)>0$，又 $x_1,x_2\in\left(\frac{1}{2},2\right)$，

$\therefore t(x_1)=e^{x_1}-2x_1^2+x_1=-2x_1^2+5x_1-1>0$，$t(x_2)=e^{x_2}-2x_2^2+x_2=-2x_2^2+5x_2-1>0$，

又 $t(-1)=e^{-1}-3<0$，$t(0)=1>0$，所以函数在 $(-1,0)$ 上存在唯一零点 x_0，使得 $e^{x_0}-x_0^2=x_0^2-x_0$. …… 9分

$2[(e^x-x^2)^2+(x^2-x)^2]\geqslant(e^x-x^2)^2+(x^2-x)^2+2(e^x-x^2)(x^2-x)=[(e^x-x^2)+(x^2-x)]^2=(e^x-x)^2$，

当且仅当 $x=x_0$ 时等号成立①. …… 10分

令 $m(x)=e^x-x$，则 $m'(x)=e^x-1$，当 $x\in(0,+\infty)$ 时，$m'(x)>0$，$m(x)$ 单调递增；当 $x\in(-\infty,0)$ 时，$m'(x)<0$，$m(x)$ 单调递减，所以 $x=0$ 时，$m(x)\geqslant m(0)=1$，

即 $e^x-x\geqslant 1$，当且仅当 $x=0$ 时等号成立②. …… 11分

①②取等号的条件不一致，故 $f(x)>g(x)$. …… 12分

关于我们

北京高考在线创办于 2014 年，隶属于北京太星网络科技有限公司，是北京地区极具影响力的中学升学服务平台。主营业务涵盖：北京新高考、高中生涯规划、志愿填报、强基计划、综合评价招生和学科竞赛等。

北京高考在线旗下拥有网站门户、微信公众平台等全媒体矩阵生态平台。平台活跃用户 40W+，网站年度流量数千万量级。用户群体立足于北京，辐射全国 31 省市。

北京高考在线平台一直秉承 “ 精益求精、专业严谨 ” 的建设理念，不断探索“K12 教育+互联网+大数据”的运营模式，尝试基于大数据理论为广大中学和家长提供新鲜的高考资讯、专业的高考政策解读、科学的升学规划等，为广大高校、中学和教科研单位提供“衔接和桥梁纽带”作用。

平台自创办以来，为众多重点大学发现和推荐优秀生源，和北京近百所中学达成合作关系，累计举办线上线下升学公益讲座数百场，帮助数十万考生顺利通过考入理想大学，在家长、考生、中学和社会各界具有广泛的口碑影响力

未来，北京高考在线平台将立足于北京新高考改革，基于对北京高考政策研究及北京高校资源优势，更好的服务全国高中家长和学生。