2018~2019 学年度北京市大兴区高三第一次综合练习

2019.4

数学（理）

本试卷共 4 页，满分 150 分。考试时长 120 分钟。考生务必将答案答在答题卡上，在试卷上作答无效。

第一部分（选择题　共 40 分）

一、选择题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分。在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项。

（1）已知全集 $U=\mathbf{R}$，集合 $A=\{x\mid x<0\}$，$B=\{-2,-1,0,1,2\}$，那么 $(\complement_U A)\cap B$ 等于

（A）$\{0,1,2\}$　（B）$\{1,2\}$

（C）$\{-2,-1\}$　（D）$\{-2,-1,0\}$

（2）已知 $a=3^{0.4}$，$b=\log_3\frac{1}{2}$，$c=(\frac{1}{3})^{0.2}$，则

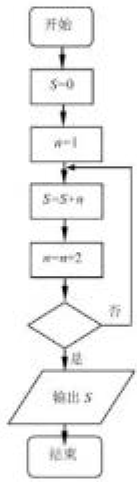
（A）$a>b>c$　（B）$c>a>b$

（C）$c>b>a$　（D）$a>c>b$

（3）若 x,y 满足 $\begin{cases}x-y-2\leqslant 0,\\ x+2y-2\geqslant 0,\\ y\leqslant 2,\end{cases}$ 则 $2x-y$ 的最大值为

（A）-6　（B）4

（C）6　（D）8



（4）执行如图所示的程序框图，则输出的 S 值为 16，则判断框内的条件为

（A）$n>6$　（B）$n\geqslant 7$

（C）$n>8$　（D）$n>9$

（5）已知抛物线 $C:y^2=x$，直线 $l:x=my+1$，则"$m\neq 0$"是"直线 l 与抛物线 C 有两个不同交点"的

（A）充分而不必要条件　（B）必要而不充分条件

（C）充分必要条件　（D）既不充分也不必要条件

（6）中国古代将物质属性分为"金、木、土、水、火"五种，其相互关系是"金克木，木克土，土克水，水克火，火克金。"将五种不同属性的物质任意排成一列，则属性相克的两种物质不相邻的排法种数为

（A）8　（B）10　（C）15　（D）20

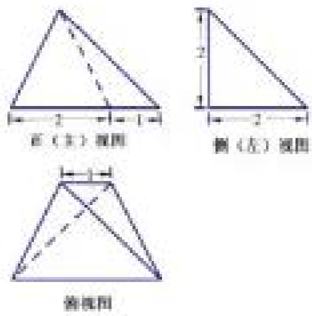
（7）某三棱锥的三视图如图所示，则该三棱锥最长棱的棱长为

（A）$\sqrt{13}$

（B）$2\sqrt{3}$

（C）3

（D）$2\sqrt{2}$



（8）设不等式组 $\begin{cases} |x|+|y|\leqslant 2 \\ y+2\leqslant k(x+1) \end{cases}$ 所表示的平面区域为 D，其面积为 S. ①若 $S=4$，则 k 的值唯一；②若 $S=\dfrac{1}{2}$，则 k 的值有 2 个；③若 D 为三角形，则 $0<k\leqslant\dfrac{2}{3}$；④若 D 为五边形，则 $k>4$. 以上命题中，真命题的个数是

（A）1　　（B）2　　（C）3　　（D）4

第二部分（非选择题　共 110 分）

二、填空题共 6 小题，每小题 5 分，共 30 分.

（9）已知复数 z 满足 $z^2+1=0$，则 $|z|=$________.

（10）若 S_n 为等比数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和，$8a_2+a_5=0$，则 $\dfrac{S_6}{S_3}=$________.

（11）在极坐标系下，点 $P(1,\dfrac{\pi}{2})$ 与曲线 $\rho=2\cos\theta$ 上的动点 Q 距离的最小值为________.

（12）已知函数 $f(x)=\sin(\pi x+\varphi)$，若存在一个非零实数 t，对任意的 $x\in\mathbf{R}$，都有 $f(x+t)=f(x)$，则 t 的一个值可以是________.

（13）已知点 $O(0,0)$，$A(1,1)$，点 P 在双曲线 $x^2-y^2=1$ 的右支上，则 $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OP}$ 的取值范围是________.

（14）在某些竞赛活动中，选手的最终成绩是将前面所有轮次比赛成绩求算术平均获得的. 同学们知道这样一个事实：在所有轮次的成绩中，如果由高到低依次去掉一些高分，那么平均分降低；反之，如果由低到高依次去掉一些低分，那么平均分提高. 这两个事实可以用数学语言描述为：若有限数列 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 满足 $a_1\leqslant a_2\leqslant\cdots\leqslant a_n$，且 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 不全相等，则①________；②________.

三、解答题

（15）（本小题 13 分）

在锐角 ΔABC 中，角 A，B，C 所对应的边分别是 a，b，c，$a\sin B=\sqrt{3}b\cos A$．

（Ⅰ）求 $\angle A$ 的大小；

（Ⅱ）若 $a=\sqrt{21}$，$b=5$，求 c 的值．

（16）（本小题 13 分）

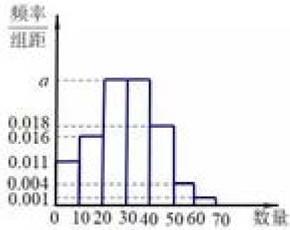
某机构对 A 市居民手机内安装的“APP”(英文 Application 的缩写，一般指手机软件)的个数和用途进行调研，在使用智能手机的居民中随机抽取了 100 人，获得了他们手机内安装 APP 的个数，整理得到如图所示频率分布直方图：

（Ⅰ）从 A 市随机抽取一名使用智能手机的居民，试估计该居民手机内安装 APP 的个数不低于 30 的概率；

（Ⅱ）从 A 市随机抽取 3 名使用智能手机的居民进一步做调研，用 X 表示这 3 人中手机内安装 APP 的个数在[20,40)的人数．

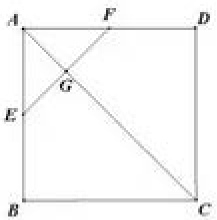
①求随机变量 X 的分布列及数学期望；

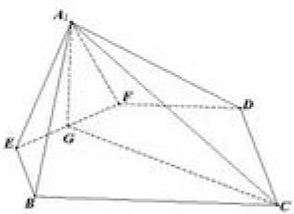
②用 Y_1 表示这 3 人中安装 APP 个数低于 20 的人数，用 Y_2 表示这 3 人中手机内安装 APP 的个数不低于 40 的人数．试比较 EY_1 和 EY_2 的大小．(只需写出结论)



（17）（本小题 14 分）

如图 1，正方形 $ABCD$ 的边长为 2，E，F 分别为 AB，AD 的中点，AC 与 EF 交于点 G，将 ΔAEF 沿 EF 折起到 ΔA_1EF 的位置，使平面 $A_1EF\perp$ 平面 $EFDCB$，如图 2．





（Ⅰ）求证：平面 $A_1GC\perp$ 平面 A_1EF；

（Ⅱ）求二面角 $F-A_1E-B$ 的余弦值；

（Ⅲ）判断线段 A_1C 上是否存在点 M，使 FM // 平面 A_1EB？若存在，求出 $\dfrac{A_1M}{A_1C}$ 的值；若不存在，说明理由．

（18）（本小题 14 分）

已知椭圆 $C:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的离心率为 $\dfrac{1}{2}$，M 是椭圆 C 的上顶点，F_1,F_2 是椭圆 C 的焦点，ΔMF_1F_2 的周长是 6。

（Ⅰ）求椭圆 C 的标准方程；

（Ⅱ）过动点 $P(1,t)$ 作直线交椭圆 C 于 A,B 两点，且 $|PA|=|PB|$，过 P 作直线 l，使 l 与直线 AB 垂直，证明：直线 l 恒过定点，并求此定点的坐标。

（19）（本小题 13 分）

已知函数 $f(x)=ae^x$ 图象在 $x=0$ 处的切线与函数 $g(x)=\ln x$ 图象在 $x=1$ 处的切线互相平行。

（Ⅰ）求 a 的值；

（Ⅱ）设 $h(x)=f(x)-g(x)$，求证：$h(x)>2$。

（20）（本小题 13 分）

已知集合 $A=\{a_1,a_2,\cdots,a_{1000}\}$，其中 $a_i\in N^*(i=1,2,\cdots,1000)$，$a_1<a_2<\cdots<a_{1000}\leqslant 2019$。如果集合 A 满足：对于任意的 $m+n\in A(m,n=1,2,\cdots,1000)$，都有 $a_m+a_n\in A$，那么称集合 A 具有性质 P。

（Ⅰ）写出一个具有性质 P 的集合 A；

（Ⅱ）证明：对任意具有性质 P 的集合 A，$2000\notin A$；

（Ⅲ）求具有性质 P 的集合 A 的个数。

参考答案及评分标准

数学（理）

一、选择题（共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分）

题号	1	2	3	4	5	6	7	8
答案	A	D	C	C	A	B	B	C

二、填空题（共 6 小题，每小题 5 分，共 30 分）

（9）1　　（10）-7

（11）$\sqrt{2}-1$　　（12）2（答案不唯一）

（13）$(0,+\infty)$

（14）$\dfrac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}>\dfrac{a_1+a_2+\cdots+a_m}{m}(1\leqslant m<n)$；

$\dfrac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}<\dfrac{a_{m+1}+a_{m+2}+\cdots+a_n}{n-m}(1\leqslant m<n)$（答案形式不唯一）

三、解答题（共 6 小题，共 80 分）

（15）（共 13 分）

解：（Ⅰ）在 ΔABC 中，由正弦定理 $\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}$，……2 分

得 $a\sin B=b\sin A$．

又 $a\sin B=\sqrt{3}b\cos A$，得 $\tan A=\sqrt{3}$．……4 分

由于 $0<A<\dfrac{\pi}{2}$，所以 $A=\dfrac{\pi}{3}$．……6 分

（Ⅱ）$a=\sqrt{21}$，$b=5$，$A=\dfrac{\pi}{3}$，

在 ΔABC 中，由余弦定理 $a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$，……3 分

得 $21=5^2+c^2-2\cdot5\cdot c\cdot\dfrac{1}{2}$，即 $c^2-5c+4=0$，

解得 $c=1$，或 $c=4$．……5 分

当 $c=1$ 时，$\cos B=\dfrac{1^2+(\sqrt{21})^2-5^2}{2\cdot1\cdot\sqrt{21}}<0$．

此时，ΔABC 为钝角三角形，舍去．

经检验，$c=4$ 满足题意．……7 分

（16）（共 13 分）

解：（Ⅰ）由 $(0.011+0.016+a+a+0.018+0.004+0.001)\times 10=1$，

得 $a=0.025$． ……1 分

从 A 市随机抽取一名使用智能手机的居民，该居民手机内安装"APP"的数量不低于 30 的概率估计为

$P=(0.025+0.018+0.004+0.001)\times 10=0.48$． ……3 分

（Ⅱ）①从 A 市随机抽取一名使用智能手机的居民，该居民手机内安装"APP"的数量在 $[20,40)$ 的概率估计为 $P=(0.025+0.025)\times 10=0.5$． ……1 分

X 所有的可能取值为 0，1，2，3，则 $X\sim B(3,\frac{1}{2})$． ……2 分

$P(X=0)=C_3^0(\frac{1}{2})^0(1-\frac{1}{2})^3=\frac{1}{8}$， ……3 分

$P(X=1)=C_3^1(\frac{1}{2})^1(1-\frac{1}{2})^2=\frac{3}{8}$， ……4 分

$P(X=2)=C_3^2(\frac{1}{2})^2(1-\frac{1}{2})^1=\frac{3}{8}$， ……5 分

$P(X=3)=C_3^3(\frac{1}{2})^3(1-\frac{1}{2})^0=\frac{1}{8}$． ……6 分

所以 X 的分布列为

X	0	1	2	3
P	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$

所以 X 的数学期望为

$EX=0\times\frac{1}{8}+1\times\frac{3}{8}+2\times\frac{3}{8}+3\times\frac{1}{8}=\frac{3}{2}$． ……8 分

（或者 $EX=3\times\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$．）

② $EY_1>EY_2$． ……10 分

（17）（共 14 分）

解：（Ⅰ）因为正方形 $ABCD$ 中，E，F 分别为 AB、AD 的中点，

所以 $EF\,/\!/\,BD$，$AC\perp BD$．

所以 $AC\perp EF$．

所以 $GC\perp EF$． ……2 分

又因为 $GC\subset$ 平面 $EFDCB$．

平面 $A_1EF\perp$ 平面 $EFDCB$，

平面 $A_1EF\cap$ 平面 $EFDCB=EF$，

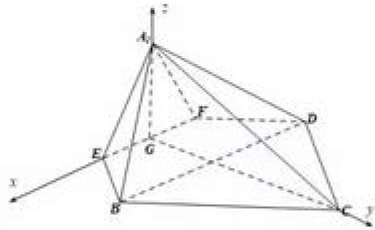
所以 $GC\perp$ 平面 A_1EF，

又因为 $GC\subset$ 平面 A_1GC，

所以平面 $A_1GC\perp$ 平面 A_1EF．……4 分

（Ⅱ）因为 GE、GC、GA_1 两两垂直，所以，以 G 为原点，建立空间直角坐标系 $G\text{-}xyz$，

如图，……1 分



则 $G(0,0,0)$， $A_1(0,0,\frac{\sqrt{2}}{2})$，

$E(\frac{\sqrt{2}}{2},0,0)$ $F(-\frac{\sqrt{2}}{2},0,0)$

$B(\sqrt{2},\frac{\sqrt{2}}{2},0)$，$C(0,\frac{3\sqrt{2}}{2},0)$，

所以 $\overrightarrow{A_1E}=(\frac{\sqrt{2}}{2},0,-\frac{\sqrt{2}}{2})$，$\overrightarrow{EB}=(\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2},0)$，

由（Ⅰ）知， $\overrightarrow{GC}=(0,\frac{3\sqrt{2}}{2},0)$ 是平面 A_1EF 的一个法向量，……2 分

设平面 A_1EB 的法向量为 $\vec{n}=(x,y,z)$，

则 $\begin{cases}\overrightarrow{A_1E}\cdot\vec{n}=0\\ \overrightarrow{EB}\cdot\vec{n}=0\end{cases}$， 即 $\begin{cases}\frac{\sqrt{2}}{2}x-\frac{\sqrt{2}}{2}z=0\\ \frac{\sqrt{2}}{2}x+\frac{\sqrt{2}}{2}y=0\end{cases}$，

令 $x=1$，则 $y=-1$， $z=1$． 所以 $\vec{n}=(1,-1,1)$． ……3 分

$$\cos<\overrightarrow{GC},\vec{n}>=\frac{\overrightarrow{GC}\cdot\vec{n}}{|\overrightarrow{GC}|\cdot|\vec{n}|}=\frac{-\frac{3\sqrt{2}}{2}}{\frac{3\sqrt{2}}{2}\times\sqrt{3}}=-\frac{\sqrt{3}}{3}，$$ ……4 分

由图可知所求二面角为钝角，

所以二面角 $F-A_1-EB$ 的余弦值为 $-\frac{\sqrt{3}}{3}$． ……5 分

（Ⅲ）设 $\overrightarrow{A_1M}=\lambda\overrightarrow{A_1C}$（$0\le\lambda\le1$）， ……1 分

$$\overrightarrow{FM}=\overrightarrow{FA_1}+\overrightarrow{A_1M}=\overrightarrow{FA_1}+\lambda\overrightarrow{A_1C}=(\frac{\sqrt{2}}{2},0,\frac{\sqrt{2}}{2})+\lambda(0,\frac{3\sqrt{2}}{2},-\frac{\sqrt{2}}{2})$$

$$=(\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{3\sqrt{2}}{2}\lambda,\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}\lambda)，$$ ……2 分

若使 FM // 平面 A_1EB，则 $\vec{n}\cdot\overrightarrow{FM}=0$． ……3 分

即 $\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{3\sqrt{2}}{2}\lambda+(\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}\lambda)=\sqrt{2}-2\sqrt{2}\lambda=0$，解得 $\lambda=\frac{1}{2}$．……4 分

所以存在点 M，使 FM // 平面 A_1EB，此时 $\frac{A_1M}{A_1C}$ 的值为 $\frac{1}{2}$．……5 分

（18）（共 14 分）

解：（Ⅰ）由于 M 是椭圆 C 的上顶点，由题意得 $2a+2c=6$，……1 分

又椭圆离心率为 $\frac{1}{2}$，即 $\frac{c}{a}=\frac{1}{2}$，……2 分

解得 $a=2$，$c=1$，……2 分

又 $b^2=a^2-c^2=3$，

所以椭圆 C 的标准方程 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$。……4 分

（Ⅱ）当直线 AB 斜率存在，设 AB 的直线方程为 $y-t=k(x-1)$，……1 分

联立 $\begin{cases}3x^2+4y^2=12\\ y-t=k(x-1)\end{cases}$，得

$(3+4k^2)x^2+8k(t-k)x+4(t-k)^2-12=0$，……2 分

由题意，$\Delta>0$，

设 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，

则 $x_1+x_2=-\frac{8k(t-k)}{3+4k^2}$，……3 分

因为 $|PA|=|PB|$，所以 P 是 AB 的中点．……4 分

即 $\frac{x_1+x_2}{2}=1$，得 $-\frac{8k(t-k)}{3+4k^2}=2$，

$3+4kt=0$ ……① ……5 分

又 $l\perp AB$，l 的斜率为 $-\frac{1}{k}$，

直线 l 的方程为 $y-t=-\frac{1}{k}(x-1)$ ……② ……6 分

把①代入②可得：$y=-\frac{1}{k}(x-\frac{1}{4})$ ……8 分

所以直线 l 恒过定点 $(\frac{1}{4},0)$．……9 分

当直线 AB 斜率不存在时，直线 AB 的方程为 $x=1$，

此时直线 l 为 x 轴，也过 $(\frac{1}{4},0)$．……10 分

综上所述直线 l 恒过点 $(\frac{1}{4},0)$．

（19）（共 13 分）

解：（Ⅰ）由 $f(x)=ae^x$，得 $f'(x)=ae^x$，所以 $f'(0)=a$．……1 分

由 $g(x)=\ln x$，得 $g'(x)=\frac{1}{x}$，所以 $g'(1)=1$．……2 分

由已知 $f'(0)=g'(1)$，得 $a=1$．……3 分

经检验，$a=1$ 符合题意．……4 分

（Ⅱ）$h(x)=f(x)-g(x)=e^x-\ln x$，$x>0$，

$h'(x)=e^x-\frac{1}{x}$，设 $\varphi(x)=e^x-\frac{1}{x}$，……1 分

则 $\varphi'(x)=e^x+\frac{1}{x^2}>0$，所以 $\varphi(x)$ 在区间 $(0,+\infty)$ 单调递增，……3 分

又 $\varphi(1)=e-1>0$，$\varphi(\frac{1}{2})=\sqrt{e}-2<0$，……4 分

所以 $\varphi(x)$ 在区间 $(0,+\infty)$ 存在唯一零点，

设零点为 x_0，则 $x_0\in(\frac{1}{2},1)$，且 $e^{x_0}=\frac{1}{x_0}$．……5 分

当 $x\in(0,x_0)$ 时，$h'(x)<0$；当 $x\in(x_0,+\infty)$，$h'(x)>0$．

所以，函数 $h(x)$ 在 $(0,x_0)$ 递减，在 $(x_0,+\infty)$ 递增，……6 分

$h(x)\geqslant h(x_0)=e^{x_0}-\ln x_0=\frac{1}{x_0}-\ln x_0$，……7 分

由 $e^{x_0}=\frac{1}{x_0}$，得 $\ln x_0=-x_0$

所以 $h(x_0)=\frac{1}{x_0}+x_0\geqslant 2$，……8 分

由于 $x_0\in(\frac{1}{2},1)$，$h(x_0)>2$

从而 $h(x)>2$，命题得证．……9 分

（20）（共 13 分）

解：（Ⅰ）$A=\{1,2,\cdots,1000\}$ ……3 分

（Ⅱ）证明：假设存在 $a_k \in A$，使得 $a_k = 2000$，显然 $k \leqslant 1000$，取 $i = j = 1000$，则

$1000 + 1000 = 2000 = a_k \in A$，由题意 $a_{1000} + a_{1000} = 2a_{1000} \in A$，而 a_{1000} 为集合 A 中

元素的最大值，所以，$2a_{1000} \notin A$，矛盾，假设不成立，

所以，不否存在 $a_k \in A$，使得 $a_k = 2000$．……5 分

（Ⅲ）设 k 为使得 $a_k < 2000$ 的最大正整数，则 $a_{1000} > a_{999} > \cdots > a_{k+1} \geqslant 2001$．

若 $a_k > 1000$，则存在正整数 i，使得 $a_k = 1000 + i \in A$，所以 $a_{1000} + a_i \in A$．

同（Ⅱ）$a_{1000} + a_i > a_{1000}$ 不可能属于集合 A．

于是 $a_i \leqslant 1000 (i = 1, 2, \cdots, k)$，由题意知 $a_i \geqslant i (i = 1, 2, \cdots, 1000)$，

所以，$a_k \geq k$，集合 A 中大于 2000 的元素至多有 19 个，所以 $k \geqslant 1000 - 19 = 981$．

下面证明 $a_k > k$ 不可能成立．

假设 $a_k > k$，则存在正整数 i，使得 $a_k = k + i \in A$，显然 $i \leqslant 19$，

所以存在正整数 m 使得 $a_m = a_k + a_i < 2a_k < 2000$．

而 $2000 > a_m = a_i + a_k > a_k$ 与 k 为使得 $a_k < 2000$ 的最大正整数矛盾，所以 $a_k > k$

不可能成立．即 $a_k = k$ 成立．

当 $a_k = k$ 时，对于任意的 $1 \leqslant i, j \leqslant k \leqslant 1000$ 满足 $i + j \in A$ 显然有 $a_i + a_j \in A$ 成

立．

若 $a_i \geqslant 2001$，则 $k < i + j \leqslant 2000$，即 $i + j \notin A$，

所以，$A = \{1, 2, \cdots k, a_{k+1}, a_{k+2}, \cdots, a_{1000}\}$，其中 $a_i > 2000 (i = k+1, k+2, \cdots, 1000)$

均为符合题意的集合．

而 k 可能取的值为 981，982，…，1000，故符合条件的集合个数为

$C_{19}^{0} + C_{19}^{1} + \cdots C_{19}^{18} + C_{19}^{19} = 2^{19}$．

因此，满足条件的集合 A 的个数为 2^{19}．……5 分