

# 2019 北京朝阳高一（上）期末

## 数 学

（考试时间 120 分钟 满分 150 分）

本试卷分为选择题（共 50 分）和非选择题（共 100 分）两部分

第一部分（选择题 共 50 分）

一、选择题：本大题共 10 小题，每小题 5 分，共 50 分。在每小题给出的四个选项中，选出符合题目要求的一项。

1.  $\sin 120^\circ$  的值是

- A.  $-\frac{1}{2}$       B.  $\frac{1}{2}$       C.  $-\frac{\sqrt{3}}{2}$       D.  $\frac{\sqrt{3}}{2}$

2. 设集合  $A = \{1, 2\}$ ,  $B = \{2, 3, 4\}$ , 则  $A \cap B =$

- A.  $\{2\}$       B.  $\{2, 3, 4\}$       C.  $\{1, 3, 4\}$       D.  $\{1, 2, 3, 4\}$

3. 下列各式中，化简的结果为  $\sin x$  的是

- A.  $\cos(-x)$       B.  $\cos(\pi+x)$       C.  $\cos(\frac{\pi}{2}-x)$       D.  $\cos(\pi-x)$

4. 下列函数中，值域是  $(0, +\infty)$  的是

- A.  $y = x^2$       B.  $y = \frac{1}{x^2+1}$       C.  $y = -2$       D.  $y = \lg(x+1) (x > 0)$

5. 已知  $\tan \alpha = \frac{3}{4}$ , 则  $\tan(\alpha + \frac{\pi}{4}) =$

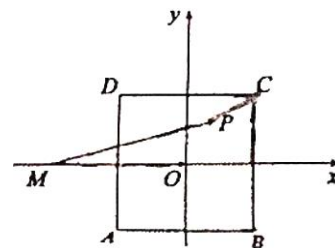
- A.  $-7$       B.  $-1$       C.  $\frac{3}{4}$       D.  $7$

6. 已知非零向量  $m, n$  满足  $|m| = 2|n|$ ,  $m, n$  夹角的余弦值是  $\frac{1}{3}$ , 若  $(tm+n) \perp n$ , 则实数  $t$  的值是

- A.  $\frac{3}{2}$       B.  $\frac{2}{3}$       C.  $\frac{1}{2}$       D.  $\frac{1}{3}$

7. 如图，在平面直角坐标系  $xOy$  中，点  $P$  在边长为 2 的正方形  $ABCD$  内部及其边界上运动，已知点  $M(-2, 0)$ ,  $B(1, -1)$ ,  $C(1, 1)$  则  $\overrightarrow{MO} \cdot \overrightarrow{MP}$  的最大值是

- A. 2      B. 4      C. 6      D.  $2\sqrt{10}$



8. 苏格兰数学家纳皮尔发明了对数表，这一发明为当时的天文学家处理“大数运算”

做出了巨大贡献，法国著名数学家和天文学家拉普拉斯曾经说过“对数倍增了天文学家的寿命”。比如在下面的部分对数表中，16, 256 对应的幂指数分别为 4, 8, 而幂指数和 12 对应的幂为 4069, 因此  $16 \times 156 = 4096$ , 根据此表，推算  $512 \times 16384 =$

$x$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$y=2^x$	2	4	8	16	32	64	128	256	512	1024
$x$	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
$y=2^x$	2048	4096	8192	16384	32768	65536	131072	262144	524288	1048576
$x$	21		22		23		24		25	
$y=2^x$	2097152		4194304		8388608		16777216		33554432	

- A. 524288      B. 8388608      C. 16777216      D. 33554432

9. 给出以下四个方程：①  $\ln x = 1 - x$ ; ②  $0 = \frac{1}{x}$ ; ③  $2 - x^2 = \lg|x|$ ; ④  $\cos = |x| + 1$ , 其中有唯一解的是

- A. ①②③      B. ①②④      C. ①③④      D. ②③④

10. 设函数  $f(x)$  的定义域为  $\mathbb{R}$ , 且  $f(\frac{\pi}{2})=0, f(0) \neq 0$ . 若对于任意函数  $x, y$ , 有  $f(x) + f(y) = 2f(\frac{x+y}{2}) \cdot f(\frac{x-y}{2})$ . 则下列说法中不正确的是

- A.  $f(0) = 1$       B.  $f(x) = f(-x)$   
 C.  $f(x+2\pi)$       D.  $f(2x) = 2f(x) - 1$

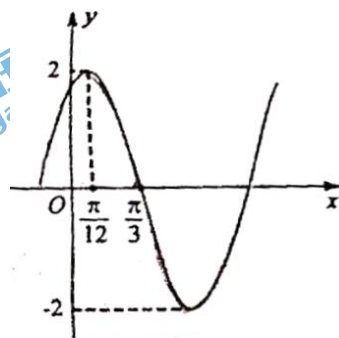
第二部分 (非选择题 共 100 分)

二、填空题: 本大题共 6 小题, 每小题 5 分, 共 30 分。

11. 已知平面向量  $a = (3, m), b = (-1, 2)$ , 若  $a \parallel b$ , 则实数  $m =$  \_\_\_\_\_

12. 已知  $x \in (0, \pi), \cos x = -\frac{1}{3}$ , 则  $\sin x =$  \_\_\_\_\_;  $\sin 2x =$  \_\_\_\_\_.

13. 已知函数  $f(x) = A \sin(\omega x + \varphi)$  ( $A > 0, \omega > 0, |\varphi| < \frac{\pi}{2}$ ) 的部分图象如图所示, 则  $A =$  \_\_\_\_\_;  $\varphi =$  \_\_\_\_\_



第 13 题图

14. 设函数  $f(x) = \sin \frac{\pi x}{3}$ , 则  $f(1) + f(2) + f(3) + \dots + f(100) =$  \_\_\_\_\_

15. 设集合  $M = \{1, 3, 6, 9, 12, 15\}$ , 集合  $N$  满足: ①有两个元素; ②若  $x \in N$ , 则  $x+3 \in M$  且  $x-3 \in M$ . 请写出两个满足条件的集合  $N =$  \_\_\_\_\_

16. 已知函数  $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{3}|x|, & x \geq a \\ 2x - x^2, & x < a \end{cases} \quad a \in \mathbb{R}$

- (1) 若  $f(x)$  在  $(-\infty, +\infty)$  上时单调函数, 则  $a =$  \_\_\_\_\_;  
 (2) 若对任意函数  $k$ , 方程  $f(x) - k = 0$ , 总有解, 则  $a$  的取值范围是 \_\_\_\_\_

三、解答题: 本大题共 4 小题, 共 70 分, 解答应写出文字说明, 演算步骤或证明过程。

17. (本小题满分 16 分)

设全集是实数集  $\mathbb{R}$ , 集合  $A = \{x | \frac{1}{2} \leq x \leq 2\}, \{x | x - a < 0\}$

- (I) 当  $a=1$  时, 分别求  $A \cap B$  与  $A \cup B$   
 (II) 若  $A \subseteq B$ , 求实数  $a$  的取值范围;  
 (III) 若  $(C_B A) \cap B = B$ , 求实数  $a$  的最大值.

18. (本小题满分 18 分)

已知函数  $f(x) = \cos^2 x + \sin x \cos x$

- (I) 求  $f(0), f(\frac{\pi}{4})$  的值;  
 (II) 求  $f(x)$  的最小正周期及对称轴方程;  
 (III) 当  $x \in [0, \pi]$  时, 求  $f(x)$  的单调递增区间

19. (本小题满分 18 分)

已知函数  $f(x) = -x^2 + mx + 1, m \in \mathbb{R}$

(I) 当  $m=2$  时, 求  $f(x)$  的最大值;

(II) 若函数  $h(x) = f(x) + 2x$  为偶函数, 求  $m$  的值;

(III) 设函数  $g(x) = 2\sin(x + \frac{\pi}{6})$ , 若对任意  $x_1 \in [1, 2]$ , 总有  $x_2 \in [0, \pi]$ , 使得  $g(x_2) = f(x_1)$ , 求  $m$  的取值范围.

20. (本小题满分 18 分)

如果函数  $f(x)$  在定义域内的某个区间  $[m, n]$  上的值域恰为  $[m, n]$ , 则称函数  $f(x)$  为  $[m, n]$  上的等域函数,  $[m, n]$  称为函数  $f(x)$  的一个等域区间.

(I) 已知函数  $f(x) = a^x + (a-k)x + b$ , 其中  $a > 0$  且  $a \neq 1, k > 0, b \in \mathbb{R}$

(i) 当  $a=k$  时, 若函数  $f(x)$  是  $[0, 1]$  上的等域函数, 求  $f(x)$  的解析式;

(ii) 证明: 当  $0 < a < 1, k \geq a+1$  时, 函数  $f(x)$  不存在等域区间;

(II) 判断函数  $g(x) = \frac{1}{4} \log_2 x$  是否存在等域区间? 若存在, 写出该函数的一个等域区间; 若不存在, 请说明理由.