

2024 届大湾区普通高中毕业年级联合模拟考试（一）

数学

本卷共 6 页，22 小题，满分 150 分。考试时间 120 分钟。

注意事项：1. 答卷前，考生务必将自己的学校、班级、姓名、考场号、座位号和准考证号填写在答题卡上，将条形码横贴在答题卡“条形码粘贴处”。

2. 作答选择题时，选出每小题答案后，用 2B 铅笔在答题卡上将对应题目选项的答案信息点涂黑；如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其他答案。答案不能答在试卷上。

3. 非选择题必须用黑色字迹的钢笔或签字笔作答，答案必须写在答题卡各题目指定区域内相应位置上；如需改动，先划掉原来的答案，然后再写上新答案；不准使用铅笔和涂改液。不按以上要求作答无效。

4. 考生必须保证答题卡的整洁。考试结束后，将试卷和答题卡一并交回。

一、选择题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 设集合 $A = \{x | -x^2 + 4x - 3 > 0\}$, $B = \{x | 2 < x \leq 4\}$, 则 $A \cap B =$ ()

- A. $\{x | 2 < x < 3\}$ B. $\{x | x < 1 \text{ 或 } x > 2\}$ C. $\{x | 3 < x < 4\}$ D. $\{x | 1 < x \leq 4\}$

2. 复数 z 满足 $z = (z + 2)i$, 则 $z =$ ()

- A. $1 + i$ B. $1 - i$ C. $-1 + i$ D. $-1 - i$

3. 5 位同学报名参加两个课外活动小组，每位同学限报其中的一个小组，则不同的报名方法有 ()

- A. 10 种 B. 20 种 C. 25 种 D. 32 种

4. 已知向量 $\vec{a} = (2, -1)$, $\vec{b} = (1, 1)$, 则 \vec{a} 在 \vec{b} 上的投影向量为 ()

- A. $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ B. $\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ C. $(1, 1)$ D. $(-1, -1)$

5. 已知数列 $\{a_n\}$ 为等差数列， S_n 为其前 n 项和， $2 + a_5 = a_6 + a_3$, 则 $S_7 =$ ()

- A. 28 B. 14 C. 7 D. 2

6. 已知 $f(x) = \frac{e^x}{e^{ax} - 1}$ 为奇函数，则 $a =$ ()

- A. -1 B. 1 C. -2 D. 2

7. 已知双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{a^2 - 1} = 1 (a > 1)$ 的右焦点为 F , 过点 F 作直线 l 与 C 交于 A, B 两点若满足 $|AB| = 3$ 的

直线 l 有且仅有 1 条，则双曲线 C 的离心率为 ()

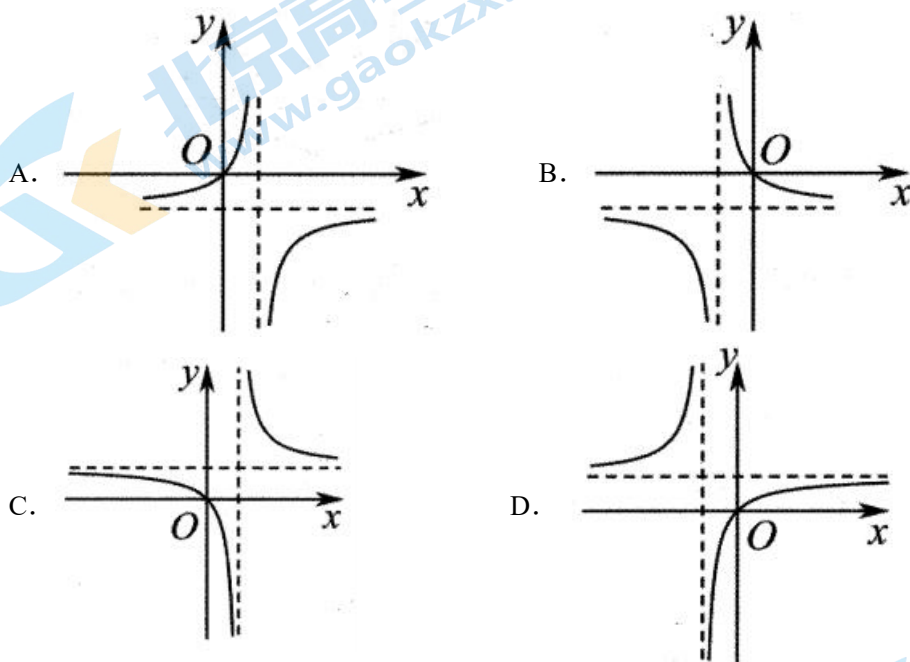
- A. $\frac{\sqrt{14}}{3}$ B. $\frac{\sqrt{7}}{2}$ C. 2 D. $\frac{\sqrt{7}}{2}$ 或 2

8. 已知直三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 的侧棱长为 2, $AB \perp BC, AB = BC = 2$, 过 AB, BB_1 的中点 E, F 作平面 α 与平面 AA_1C_1C 垂直, 则平面 α 截该三棱柱所得截面的周长为 ()

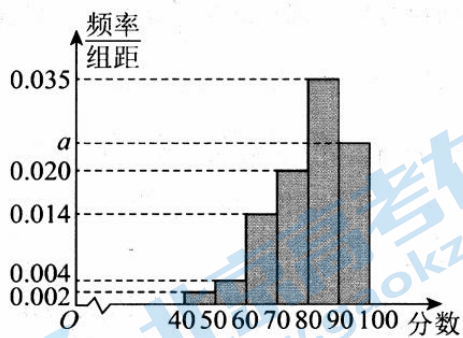
- A. $2\sqrt{2} + \sqrt{6}$ B. $\sqrt{2} + 2\sqrt{6}$ C. $3\sqrt{2} + \sqrt{6}$ D. $3\sqrt{2} + 2\sqrt{6}$

二、选择题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分. 在每小题给出的选项中, 有多项符合题目要求. 全部选对的得 5 分, 部分选对的得 2 分, 有选错的得 0 分.

9. 下列图象中, 函数 $f(x) = \frac{x}{x+a}$ 的图象可能是 ()



10. 为了解居民对社区环保工作的满意度, 居委会从社区全体居民中随机抽取若干居民进行评分调查 (满分为 100 分). 根据调查数据制成如图所示的频率分布直方图, 已知评分在 $[80, 100]$ 内的居民有 180 人. 则 ()



- A. $a = 0.025$
 B. 调查的总人数为 4000
 C. 从频率分布直方图中, 可以估计本次评分的中位数大于平均数

D. 根据以上抽样调查数据, 可以认为该社区居民对社区环保工作的满意度符合“评分低于 65 分的居民不超过全体居民的 20%”的规定

11. 已知直线 $l: 2kx - 2y - kp = 0$ 与抛物线 $C: y^2 = 2px (p > 0)$ 相交于 A, B 两点, 点 $M(-1, -1)$ 是抛物线 C 的准线与以 AB 为直径的圆的公共点, 则 ()

A. $p = 2$ B. $k = -2$ C. $\triangle MAB$ 的面积为 $5\sqrt{5}$ D. $|AB| = 5$

12. 已知函数 $f(x) = \frac{x}{\ln x}$, 则 ()

A. $f(3) < f(2)$

B. 当 $x > 1$ 时, $f(x) > x^{\frac{3}{4}}$

C. 存在 $x_0 > 1$, 当 $x > x_0$ 时, $f(x) > x^{\frac{99}{100}}$

D. 若直线 $y = kx + \left(\frac{1}{2} - k\right)e^2$ 与 $y = f(x)$ 的图象有三个公共点, 则 $0 < k < \frac{1}{4}$

三、填空题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分.

13. 若角 α 的终边在第四象限, 且 $\cos \alpha = \frac{4}{5}$, 则 $\tan\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right) =$ _____.

14. 某圆锥的侧面展开图是面积为 3π , 圆心角为 $\frac{2\pi}{3}$ 的扇形, 则该圆锥的轴截面的面积为 _____.

15. 知数列 $\{a_n\}$ 的前 8 项为 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 令 $f(x) = \sum_{i=1}^8 (x - a_i)^2$, 则 $f(x)$ 取最小值时, $x =$ _____.

16. 已知 $P(x, y)$ 为函数 $y = x^2 + \frac{4}{3}$ 图象上一动点, 则 $\frac{\sqrt{3x+y}}{\sqrt{x^2+y^2}}$ 的最大值为 _____.

四、解答题: 本题共 6 小题, 共 70 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

17. (10 分)

已知锐角 $\triangle ABC$ 的三个内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c , 且满足 $b = 5, c = 4, \sin B = \frac{5\sqrt{7}}{16}$.

(1) 求 $\cos A$;

(2) 若 $\overrightarrow{BD} = 2\overrightarrow{DC}$, 求 AD 的长.

18. (12 分)

已知数列 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 满足: $a_1 = 1, a_n + b_n = a_{n+1}, a_n - b_n = \lambda$ (λ 为常数, 且 $\lambda \neq 1$).

(1) 证明: 数列 $\{b_n\}$ 为等比数列;

(2) 若 $n=3$ 和 $n=4$ 时, 数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 S_n 取得最大值, 求 S_n .

19. (12分)

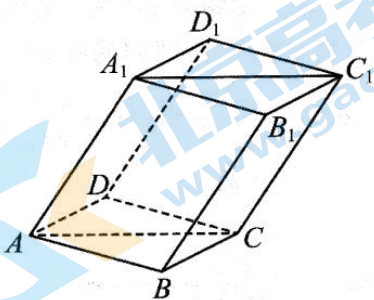
有两个盒子, 其中1号盒子中有3个红球, 2个白球; 2号盒子中有6个红球, 4个白球. 现按照如下规则摸球. 从两个盒子中任意选择一个盒子, 再从盒中随机摸出2个球, 摸球的结果是一红一白.

(1) 你认为较大可能选择的是哪个盒子? 请做出你的判断, 并说明理由;

(2) 如果你根据(1)中的判断, 面对相同的情境, 作出了5次同样的判断, 记判断正确的次数为 X , 求 X 的数学期望 (实际选择的盒子与你认为较大可能选择的盒子相同时, 即为判断正确).

20. (12分)

如图, 平行六面体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的体积为6, 截面 ACC_1A_1 的面积为6.



(1) 求点 B 到平面 ACC_1A_1 的距离;

(2) 若 $AB=AD=2, \angle BAD=60^\circ, AA_1=\sqrt{6}$, 求直线 BD_1 与平面 CC_1D_1D 所成角的正弦值.

21. (12分)

已知椭圆 C 的中心在坐标原点, 焦点在 x 轴上, 离心率为 $\frac{1}{2}$, 右焦点到右顶点的距离为1.

(1) 求椭圆 C 的标准方程;

(2) 若动直线 l 与椭圆 C 有且仅有一个公共点, 试问, 在 x 轴上是否存在两定点, 使其到直线 l 的距离之积为定值? 若存在, 求出两定点坐标; 若不存在, 请说明理由.

22. (12分)

黎曼猜想是解析数论里的一个重要猜想, 它被很多数学家视为是最重要的数学猜想之一. 它与函数

$f(x) = \frac{x^{s-1}}{e^x - 1}$ ($x > 0, x > 1, s$ 为常数) 密切相关, 请解决下列问题.

(1) 当 $1 < s \leq 2$ 时, 讨论 $f(x)$ 的单调性;

(2) 当 $s > 2$ 时;

① 证明 $f(x)$ 有唯一极值点;

② 记 $f(x)$ 的一极值点为 $g(s)$, 讨论 $g(s)$ 的单调性, 并证明你的结论.