高三数学参考答案

1.【答案】 C

【解析】 $\because N=\{x\mid y=\sqrt{x^2-x-6}\}=\{x\mid x^2-x-6\geqslant0\}=(-\infty,-2]\cup[3,+\infty)$，而 $M=\{-3,-2,0,1,2\}$，

$\therefore M\cap N=\{-3,-2\}$.

2.【答案】 B

【解析】 $\because z=\dfrac{1-\mathrm{i}}{1+\mathrm{i}}=\dfrac{(1-\mathrm{i})(1-\mathrm{i})}{(1+\mathrm{i})(1-\mathrm{i})}=\dfrac{-2\mathrm{i}}{2}=-\mathrm{i}$，$\therefore \bar{z}=\mathrm{i}$，即 $\bar{z}-z=2\mathrm{i}$.

3.【答案】 D

【解析】 $\because \boldsymbol{a}=(1,1)$，$\boldsymbol{b}=(1,-1)$，$\therefore \lambda\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=(1+\lambda,\lambda-1)$，$\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{b}=(1+\mu,1-\mu)$，

由 $(\boldsymbol{a}+\lambda\boldsymbol{b})/\!/(\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{b})$ 可得，$(1+\lambda)\cdot(1-\mu)=(\lambda-1)\cdot(1+\mu)$，整理得 $\lambda\mu=1$.

4.【答案】 A

【解析】 函数 $y=\ln x$ 在 $\mathbf{R}^*$ 上单调递增，而函数 $f(x)=\ln(x^2-ax)$ 在区间 $(1,+\infty)$ 上单调递增，

则有函数 $y=x(x-a)=\left(x-\dfrac{a}{2}\right)^2-\dfrac{a^2}{4}$ 在区间 $(1,+\infty)$ 上恒正且单调递增，因此 $\dfrac{a}{2}\leqslant1$ 且 $1-a\geqslant0$，

解得 $a\leqslant1$，$\therefore$ 实数 a 的取值范围是 $(-\infty,1]$.

5.【答案】 C

【解析】 由题意可得：$\left(\dfrac{4}{5}\right)^n<\dfrac{1}{5}$，$\lg\left(\dfrac{4}{5}\right)^n<\lg\dfrac{1}{5}$，$n\lg\dfrac{8}{10}<\lg\dfrac{1}{5}$，$n(3\lg2-1)<-(1-\lg2)$，

$n>\dfrac{1-0.301}{1-3\times0.301}\approx7.21$，又 $n\in\mathbf{N}$，所以 n 的最小值是 8，选项 C 正确.

6.【答案】 A

【解析】 $(x+y)^5(x-y)^6=(x-y)(x^2-y^2)^5$，

$(x^2-y^2)^5$ 展开式的通项公式为 $T_{r+1}=(-1)^r\mathrm{C}_5^r x^{10-2r}y^{2r}(0\leqslant r\leqslant5,r\in\mathbf{N})$，

$r=3$ 时，$T_4=-10x^4y^6$，所以 x^4y^7 的系数为 $-1\times(-10)=10$.

7.【答案】 D

【解析】 $\because x^2+y^2-4y-1=0$，即 $x^2+(y-2)^2=5$，可得圆心 $C(0,2)$，半径 $r=\sqrt{5}$，

过点 $A(2,0)$ 作圆 C 的切线，切点为 M,N，

$\because |AC|=\sqrt{2^2+(-2)^2}=2\sqrt{2}$，则 $|MA|=\sqrt{|AC|^2-r^2}=\sqrt{3}$，

可得 $\sin\angle MAC=\dfrac{\sqrt{5}}{2\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{10}}{4}$，$\cos\angle MAC=\dfrac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{6}}{4}$，

则 $\sin\angle MAN=\sin2\angle MAC=2\sin\angle MAC\cos\angle MAC=2\times\dfrac{\sqrt{10}}{4}\times\dfrac{\sqrt{6}}{4}=\dfrac{\sqrt{15}}{4}$，

$\cos\angle MAN=\cos2\angle MAC=\cos^2\angle MAC-\sin^2\angle MAC=\left(\dfrac{\sqrt{6}}{4}\right)^2-\left(\dfrac{\sqrt{10}}{4}\right)^2=-\dfrac{1}{4}<0$，即 $\angle MAN$ 为钝角，

$\therefore \sin\alpha=\sin(\pi-\angle MAN)=\sin\angle MAN=\dfrac{\sqrt{15}}{4}$，$\tan\alpha=\tan(\pi-\angle MAN)=-\tan\angle MAN=\sqrt{15}$.

8.【答案】 C

【解析】 $\dfrac{\ln2}{2}<\dfrac{\ln3}{3}\Leftrightarrow3\ln2<2\ln3\Leftrightarrow\ln8<\ln9$，选项 A 显然正确；

设 $k(x)=\dfrac{\mathrm{e}^x}{x}$，$x>1$，则 $k'(x)=\dfrac{\mathrm{e}^x(x-1)}{x^2}>0$ 在 $(1,+\infty)$ 上恒成立，故函数 $k(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 上单调递增，

故 $k(a)>k(b)$，即 $\frac{e^a}{a}>\frac{e^b}{b}$，故 $be^a>ae^b$，选项 B 成立；

$\cos\frac{1}{4}<\frac{31}{32}\Leftrightarrow\cos\frac{1}{4}<1-\frac{1}{32}=1-\frac{1}{2}(\frac{1}{4})^2$，构造 $f(x)=\cos x-1+\frac{1}{2}x^2$，$f'(x)=x-\sin x\geqslant 0$，$f(x)$ 单调递增，

$\therefore f(x)\geqslant f(0)=0$，$f(\frac{1}{4})=\cos\frac{1}{4}-\frac{31}{32}>0$，选项 C 不成立；

$\sin\frac{7}{2}+\frac{7}{2}>\pi\Leftrightarrow\sin\frac{7}{2}>\pi-\frac{7}{2}\Leftrightarrow\sin(\pi-\frac{7}{2})>\pi-\frac{7}{2}\Leftrightarrow\sin(\frac{7}{2}-\pi)<\frac{7}{2}-\pi$，

构造函数 $f(x)=x-\sin x$，$x\in(0,1)$，$f'(x)=1-\cos x\geqslant 0$，$f(x)$ 单调递增，

$\therefore f(\frac{7}{2}-\pi)>f(0)=0$，$\frac{7}{2}-\pi>\sin(\frac{7}{2}-\pi)$，选项 D 成立.

9.【答案】 AB

【解析】 数据 $-1,1,3,5,6,7,9,x,10,10$ 的 80% 分位数为 $\frac{x+10}{2}$，

数据 $-1,1,3,5,6,7,9,10,10$ 的 80% 分位数为 10，$\therefore x=10$，选项 A 正确；

根据平均值定义可知选项 B 正确；

$D(X)=\frac{3}{2}$，$D(2X+3)=4D(X)=6$，故选项 C 错误；

相关系数 $|r|$ 越大，两个变量线性相关性越强，选项 D 错误.

10.【答案】 BC

【解析】 根据题意：选项 A 中，$-1\leqslant f(x)\leqslant 1$，不满足②；

选项 B 中，满足①②③；

选项 C 中，满足①②③；

选项 D 中，没有最大值，不满足③；故选项 BC 正确.

11.【答案】 ACD

【解析】 设 G 为 CD 中点，则截面图形是 A_1BGE 为等腰梯形，F_1,F_2 分别为 C_1D_1,C_1C 的中点，由于

B_1F//平面 A_1BE，则平面 $B_1F_1F_2$//平面 A_1BE，故点 F 的轨迹为线段 F_1F_2，且 $|F_1F_2|=\frac{\sqrt{2}}{2}$，选项 A 正确；

$V_{F-A_1BE}=V_{B_1-A_1BE}=V_{E-A_1BB_1}=\frac{1}{6}$，选项 B 错误；

当点 F 为 F_1F_2 中点时，满足 $B_1F\perp CD_1$，此时直线 B_1F 与直线 BC 所成角的正弦值恰好为 $\frac{1}{3}$；

当点 F 与 F_1 或 F_2 重合时，此时直线 B_1F 与直线 BC 所成角的正弦值恰好为 $\frac{\sqrt{5}}{5}$，选项 CD 正确.

12.【答案】 ACD

【解析】 因为 $a_{n+1}-a_n=\frac{a_n+\sqrt{a_n^2+1}}{2}-a_n=\frac{\sqrt{a_n^2+1}-a_n}{2}>0$，即 $a_{n+1}>a_n$，

所以数列 $\{a_n\}$ 为递增数列，可得 $a_{2024}>a_{2023}$，选项 A 正确；

因为数列 $\{a_n\}$ 为递增数列且 $a_n\geqslant 1>0$，则 $\left\{\frac{1}{a_n^2}\right\}$ 为递减数列，选项 B 错误；

因为 $a_{n+1}=\frac{a_n+\sqrt{a_n^2+1}}{2}$，则 $2a_{n+1}-a_n=\sqrt{a_n^2+1}$，两边平方整理得 $4a_{n+1}^2-1=4a_{n+1}a_n$，选项 C 正确.

因为 $4a_{n+1}^2-1=4a_{n+1}a_n$，整理得 $a_n=a_{n+1}-\dfrac{1}{4a_{n+1}}$，

两边平方得 $a_n^2=a_{n+1}^2+\dfrac{1}{16a_{n+1}^2}-\dfrac{1}{2}>a_{n+1}^2-\dfrac{1}{2}$，即 $a_{n+1}^2-a_n^2<\dfrac{1}{2}$，

可得 $a_{2024}^2-a_{2023}^2<\dfrac{1}{2}$，$a_{2023}^2-a_{2022}^2<\dfrac{1}{2}$，……，$a_2^2-a_1^2<\dfrac{1}{2}$，

所以 $a_{2024}^2-a_1^2<\dfrac{1}{2}\times(2024-1)=1011.5$，

即 $a_{2024}^2-1<1011.5$，所以 $a_{2024}^2<1012.5<1013$，故 D 正确.

13.【答案】 78

【解析】 (1)上午 2 节，下午一节，共有 $3\times3A_3^3=54$ 种；

(2)上午 1 节，下午 2 节，共有$4A_3^3=24$，故不同的排课方案共有 $54+24=78$ 种.

14.【答案】 $\sqrt{3}$

【解析】 由图象可得 $A=f(x)_{\max}=2$，函数 $y=f(x)$ 的最小正周期为 $T=2\times\left(\dfrac{\pi}{3}+\dfrac{\pi}{6}\right)=\pi$，

$\therefore\ \omega=\dfrac{2\pi}{T}=\dfrac{2\pi}{\pi}=2$，则 $f(x)=2\sin(2x+\varphi)$，

$\because f\left(-\dfrac{\pi}{6}\right)=2\sin\left[2\times\left(-\dfrac{\pi}{6}\right)+\varphi\right]=2\sin\left(\varphi-\dfrac{\pi}{3}\right)=0$，

$\therefore\ \varphi-\dfrac{\pi}{3}=2k\pi(k\in\mathbf{Z})$，即 $\varphi=\dfrac{\pi}{3}+2k\pi(k\in\mathbf{Z})$，

由于 $|\varphi|<\dfrac{\pi}{2}$，$\therefore\ k=0$，$\varphi=\dfrac{\pi}{3}$，

$\therefore f(x)=2\sin\left(2x+\dfrac{\pi}{3}\right)$，故 $f\left(\dfrac{\pi}{6}\right)=2\sin\dfrac{2\pi}{3}=\sqrt{3}$.

15.【答案】 $\dfrac{\sqrt{5}+\sqrt{2}}{3}$

【解析】 $\because\ \overrightarrow{F_1B}\perp\overrightarrow{F_2B}$，$\therefore\ |\overrightarrow{F_1B}|=|\overrightarrow{F_2B}|=\sqrt{2}c$，

又 $\overrightarrow{F_2A}=-2\overrightarrow{F_2B}$，$\therefore\ |\overrightarrow{F_2A}|=2\sqrt{2}c$，则 $|\overrightarrow{AF_1}|=2a+2\sqrt{2}c$，

$\therefore\ |\overrightarrow{AF_1}|-|\overrightarrow{AF_2}|=2a$，即 $2\sqrt{5}c-2\sqrt{2}c=2a$，

$\therefore\ \dfrac{c}{a}=\dfrac{1}{\sqrt{5}-\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{5}+\sqrt{2}}{3}$.

16.【答案】 $12\sqrt{3}-\dfrac{10}{3}\pi$

【解析】 构建一个底面边长为 $2\sqrt{3}$，高为 2 的正三棱柱，其内切球正好半径为 1，球外部分体积为 $V_1=V_{柱}-V_{球}=6\sqrt{3}-\dfrac{4}{3}\pi$；

法一：本题中的小球未到达的区域还包括三条侧棱与球的空间区域，其中 V_2 为底面是两个边长为 $\sqrt{3}$，1 拼接而成的四边形，其中两个对角为 90°，另外两个对角分别为 60°和 120°，高为 2 的曲边柱体，$V_2=3\times2\left(\sqrt{3}-\dfrac{1}{3}\pi\right)$，

所以小球未能达到的空间体积为 $V_1+V_2=6\sqrt{3}-\dfrac{4}{3}\pi+3\times2\left(\sqrt{3}-\dfrac{1}{3}\pi\right)=12\sqrt{3}-\dfrac{10}{3}\pi$.

法二：球在上下移动中所形成的空间几何体为球+圆柱，

其体积为：$V_{柱}+V_{球}=\pi\cdot1^2\cdot(4-2)+\frac{4}{3}\pi\cdot1^3=\frac{10}{3}\pi$，

所以剩下体积：$V=\frac{\sqrt{3}}{4}(2\sqrt{3})^2\cdot4-\frac{10}{3}\pi=12\sqrt{3}-\frac{10}{3}\pi$.

17.【解析】 (1)由 $\sin A-\sin B=\sin(C-B)$ 可知，$\sin(C+B)-\sin(C-B)=\sin B$，

则 $2\cos C\sin B-\sin B=0$，

$\because \sin B\neq0$，

$\therefore \cos C=\frac{1}{2}$，即 $C=\frac{\pi}{3}$； ……………………………………………………………… (4 分)

(2) $\because S=\frac{1}{2}ab\sin C=\frac{\sqrt{3}}{4}ab=\frac{\sqrt{3}}{6}c^2$，

$\therefore c^2=\frac{3}{2}ab$， ……………………………………………………………………………… (6 分)

又 $c^2=a^2+b^2-ab=\frac{3}{2}ab$，则 $2a^2-5ab+2b^2=0$，

$\therefore a=2b$ 或 $2a=b$， ……………………………………………………………………… (8 分)

$\therefore$ 当 $a=2b$ 时，$\frac{c}{b}=\sqrt{3}$；

当 $2a=b$ 时，$\frac{c}{b}=\frac{\sqrt{3}}{2}$. ……………………………………………………………… (10 分)

18.【解析】 (1) $\because a_n^2+2a_n=4S_n-1$，

$\therefore a_{n-1}^2+2a_{n-1}=4S_{n-1}-1,(n\geqslant2)$，

两式相减可得：$a_n^2-a_{n-1}^2+2(a_n-a_{n-1})=4a_n,(n\geqslant2)$，

$\therefore (a_n+a_{n-1})(a_n-a_{n-1}-2)=0,(n\geqslant2)$，又 $a_n>0$，

$\therefore a_n-a_{n-1}=2,(n\geqslant2)$，

又 $a_1^2+2a_1=4a_1-1$，

$\therefore a_1=1$，

$\therefore$ 数列 $\{a_n\}$ 是以首项为 1，公差为 2 的等差数列，

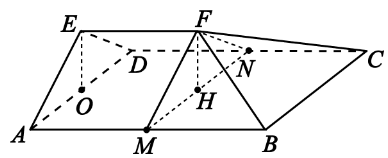
$\therefore a_n=2n-1$，

可得 $S_n=n^2$； ……………………………………………………………………………… (6 分)

(2)由题意可得，$b_n=\frac{4(n+2)}{2n\cdot2(n+1)\cdot2^{n+1}}=\frac{2(n+1)-n}{n(n+1)\cdot2^{n+1}}=\frac{1}{n\cdot2^n}-\frac{1}{(n+1)\cdot2^{n+1}}$

$\therefore b_1+b_2+\cdots\cdots+b_9=\frac{1}{2}-\frac{1}{10\times2^{10}}=\frac{5119}{10240}$. ………………………………………… (12 分)

19.【解析】 (1)分别取 AB 与 CD 的中点 M,N，连接 MN,MF,NF，则平面 FMN 将五面体分割成两部分，棱柱 $ADE-MNF$ 和棱锥 $F-MBCN$，故 $V_{五面体}=V_{ADE-MNF}+V_{F-MBCN}$，



取 AD 中点为 O，易知 $EO\perp$ 平面 $ABCD$，

则 $AB=2AD=2EF=4$，$AE=DE=\sqrt{2}$，$FH=ED=1$，

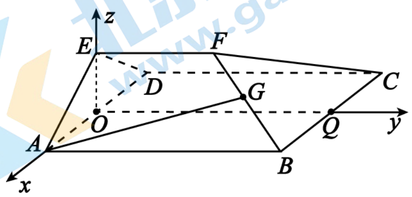
则 $V_{F-MBCN}=\frac{1}{3}S_{MBCN}\cdot FH=\frac{1}{3}\times4\times1=\frac{4}{3}$，

$V_{ADE-MNF}=S_{\triangle ADE}\cdot AM=1\times2=2$，

$V_{五面体}=V_{F-MBCN}+V_{ADE-MNF}=\dfrac{10}{3}$; ………………………………………………………………………… (5 分)

(2)解法一:

取 BC 中点 Q,连接 OQ,



$\because AE=ED=\sqrt{2}, AD=2$,

$\therefore \angle AED=90°$,

$\because O$ 为 AD 中点,$\therefore EO\perp AD$,

$\because \triangle ADE\perp$ 平面 $ABCD$,

$\therefore EO\perp$ 平面 $ABCD$,$OQ\perp AD$,OA、OE、OQ 两两垂直,

以 O 为坐标原点,OA 为 x 轴,OQ 为 y 轴,OE 为 z 轴建立如图所示的空间直角坐标系;

则 $B(1,4,0)$,$C(-1,4,0)$,$A(1,0,0)$,$E(0,0,1)$,$\overrightarrow{BC}=(-2,0,0)$,

$\because$ 几何体是五面体,$AB/\!/CD$,$AB/\!/$平面 $CDEF$,平面 $ABFE\cap$平面 $CDEF=EF$,

$\therefore AB/\!/EF$,

$\because EF=2$,

$\therefore F(0,2,1)$,$\overrightarrow{BF}=(-1,-2,1)$ ………………………………………………………………… (6 分)

设平面 BCF 的法向量 $\boldsymbol{m}=(x,y,z)$,

可得$\begin{cases}\overrightarrow{BC}\cdot\boldsymbol{m}=0,\\ \overrightarrow{BF}\cdot\boldsymbol{m}=0,\end{cases}$,则$\begin{cases}-2x=0,\\ -x-2y+z=0,\end{cases}$

取 $x=0$,得 $y=1$,$z=1$,

解得平面 BCF 的一个法向量 $\boldsymbol{m}=(0,1,2)$, ……………………………………………………… (8 分)

$\because G$ 在 $\overrightarrow{BF}$ 上,设 $\overrightarrow{BG}=\lambda\overrightarrow{BF}=\lambda(-1,-2,1)=(-\lambda,-2\lambda,\lambda)$,

$\therefore G(1-\lambda,4-2\lambda,\lambda)$,则 $\overrightarrow{AG}=(-\lambda,4-2\lambda,\lambda)$,

设直线 AG 与平面 BCF 所成角为 θ,

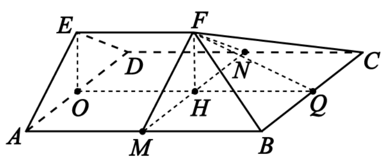
$$\sin\theta=|\cos\langle\overrightarrow{AG},\boldsymbol{m}\rangle|=\left|\frac{\boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{AG}}{|\boldsymbol{m}||\overrightarrow{AG}|}\right|=\left|\frac{4-2\lambda+2\lambda}{\sqrt{5}\cdot\sqrt{\lambda^2+(4-2\lambda)^2+\lambda^2}}\right|=\left|\frac{4}{\sqrt{5}\cdot\sqrt{6\lambda^2-16\lambda+16}}\right|=\frac{2\sqrt{30}}{15},$$

$\therefore 3\lambda^2-8\lambda+5=0$,$\therefore \lambda=1$ 或 $\lambda=\dfrac{5}{3}$(舍去),

$\therefore |\overrightarrow{BG}|=|\overrightarrow{BF}|=\sqrt{6}$,

故存在 G 点,当 $BG=\sqrt{6}$,即 G 与 F 重合时,AG 与平面 BCF 所成角的正弦值为$\dfrac{2\sqrt{30}}{15}$. …… (12 分)

解法二:



Q 为 BC 中点,连接 OQ 交 MN 于 H,如右图所示,

$HF\perp$平面 $ABCD$,$AD/\!/BC$,$BC\subset$平面 BCF,$AD\not\subset$平面 BCF,

$\therefore AD/\!/$平面 BCF,

A 到平面 BCF 的距离$=O$ 到平面 BCF 的距离$=2\times H$ 到平面 BCF 的距离$=\dfrac{4}{\sqrt{5}}$,

假设 G 点存在,设 $BG=x$,$x\in[0,\sqrt{6}]$,

由 AG 与平面 BCF 所成角正弦值为$\dfrac{2\sqrt{30}}{15}$,

$\therefore AG=\sqrt{6}$, ………………………………………………………………………………………（8 分）

由于 $\cos\angle ABF=\dfrac{\sqrt{6}}{3}$，

$\therefore AG^2=AB^2+BG^2-2\cdot AB\cdot BG\cdot\cos\angle ABF$，

$\therefore x^2-\dfrac{8\sqrt{6}}{3}x+10=0$，

解得 $x=\sqrt{6}$ 或 $\dfrac{5\sqrt{6}}{3}$（舍去），…………………………………………………………（10 分）

存在点 G 满足条件，此时 $BG=\sqrt{6}$. ……………………………………………………（12 分）

20.【解析】（1）有放回抽样会有 16 个等可能的样本

$\bar{t}$	$t_{(1)}=5$	$t_{(2)}=6$	$t_{(3)}=7$	$t_{(4)}=8$
$t_{(1)}=5$	5	5.5	6	6.5
$t_{(2)}=6$	5.5	6	6.5	7
$t_{(3)}=7$	6	6.5	7	7.5
$t_{(4)}=8$	6.5	7	7.5	8

样本均值的分布列为：

$\bar{t}$	5	5.5	6	6.5	7	7.5	8
P	$\dfrac{1}{16}$	$\dfrac{1}{8}$	$\dfrac{3}{16}$	$\dfrac{1}{4}$	$\dfrac{3}{16}$	$\dfrac{1}{8}$	$\dfrac{1}{16}$

$\therefore$ 均值 $E(\bar{t})=5\times\dfrac{1}{16}+5.5\times\dfrac{1}{8}+6\times\dfrac{3}{16}+6.5\times\dfrac{1}{4}+7\times\dfrac{3}{16}+7.5\times\dfrac{1}{8}+8\times\dfrac{1}{16}=6.5$. ………………………（4 分）

（2）无放回抽样会有 12 个等可能的样本，

$\bar{t}$	$t_{(1)}=5$	$t_{(2)}=6$	$t_{(3)}=7$	$t_{(4)}=8$
$t_{(1)}=5$		5.5	6	6.5
$t_{(2)}=6$	5.5		6.5	7
$t_{(3)}=7$	6	6.5		7.5
$t_{(4)}=8$	6.5	7	7.5	

样本均值的分布列为：

$\bar{t}$	5.5	6	6.5	7	7.5
P	$\dfrac{1}{6}$	$\dfrac{1}{6}$	$\dfrac{1}{3}$	$\dfrac{1}{6}$	$\dfrac{1}{6}$

样本均值超过总体均值的概率为 $\dfrac{1}{6}+\dfrac{1}{6}=\dfrac{1}{3}<0.5$，

所以样本均值超过总体均值的概率不会大于 0.5. ……………………………………………（8 分）

（3）样本均值与总体均值的误差不超过 0.5 的概率 $P(6\leqslant\bar{t}\leqslant7)$，

有放回的抽样，$P(6\leqslant\bar{t}\leqslant7)=\dfrac{5}{8}$；无放回的抽样，$P(6\leqslant\bar{t}\leqslant7)=\dfrac{2}{3}$，

$\dfrac{5}{8}<\dfrac{2}{3}$，故采用无放回的抽样方法概率更大. …………………………………………（12 分）

21.【解析】（1）由椭圆的性质可知，左焦点 F_1 发出的光线，经过两次反射之后回到点 F_1，光线经过的路程为 $4a=8$，

解得 $a=2$；…………………………（2 分）

又椭圆的离心率为 $\frac{1}{2}$，

得 $e=\frac{c}{a}=\frac{1}{2}$，

$\therefore c=1$，故 $b^2=a^2-c^2=4-1=3$，

故椭圆 C 的标准方程为 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$. …………………………（4 分）

（2）椭圆 C：$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$ 的 $a=2$，$b=\sqrt{3}$，$c=1$，右顶点为 $A(2,0)$，上顶点为 $B(0,\sqrt{3})$，

设 $P(x_1,y_1)$，$Q(x_2,y_2)$，直线 PQ 的方程为 $x=my+t$，

联立 $\begin{cases} x=my+t, \\ \frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1, \end{cases}$ 可得 $(3m^2+4)y^2+6mty+3t^2-12=0$，

$$\begin{cases} y_1+y_2=\frac{-6mt}{3m^2+4}, \\ y_1y_2=\frac{3t^2-12}{3m^2+4}, \end{cases}$$

由 $OP\perp OQ$，可得 $\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OQ}=0$，

$$x_1x_2+y_1y_2=(my_1+t)(my_2+t)+y_1y_2=(1+m^2)y_1y_2+mt(y_1+y_2)+t^2$$

$$=(1+m^2)\cdot\frac{3t^2-12}{3m^2+4}+mt\left(\frac{-6mt}{3m^2+4}\right)+t^2=0,$$

化简为：$7t^2=12(m^2+1)$；…………………………（6 分）

而 O 到直线 PQ 的距离为 $|OM|=\frac{|t|}{\sqrt{1+m^2}}=\sqrt{\frac{12}{7}}=\frac{2\sqrt{21}}{7}$，

即有 M 的轨迹方程为 $x^2+y^2=\frac{12}{7}$；…………………………（8 分）

解法一：

设 $M(m,n)$，则 $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}=(2-m,-n)\cdot(-m,\sqrt{3}-n)=m^2-2m+n^2-\sqrt{3}n=(m-1)^2+\left(n-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2-\frac{7}{4}$，

表示点 (m,n) 与点 $\left(1,\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ 的距离的平方，减去 $\frac{7}{4}$ 的差；…………………………（10 分）

由点 $(0,0)$ 与 $\left(1,\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ 的距离为 $\frac{\sqrt{7}}{2}$，

可得 M 与点 $\left(1,\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ 的距离的最大值为 $\frac{\sqrt{7}}{2}+\frac{2\sqrt{21}}{7}$，

则 $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}$ 的最大值为 $\left(\frac{\sqrt{7}}{2}+\frac{2\sqrt{21}}{7}\right)^2-\frac{7}{4}=\frac{12}{7}+2\sqrt{3}$. …………………………（12 分）

解法二：

令 $r_0=\sqrt{\dfrac{12}{7}}$，设 $M(r_0\cos\theta,r_0\sin\theta)$，$\theta\in[0,2\pi)$，

$\therefore \overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}=(2-r_0\cos\theta,-r_0\sin\theta)\cdot(-r_0\cos\theta,\sqrt{3}-r_0\sin\theta)=\dfrac{12}{7}-2r_0\cos\theta-\sqrt{3}r_0\sin\theta$

$=\dfrac{12}{7}-\sqrt{7}\cdot\dfrac{2\sqrt{3}}{\sqrt{7}}\sin(\theta+\varphi)\leqslant\dfrac{12}{7}+2\sqrt{3}$（其中 $\tan\varphi=\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$），

当且仅当 $\theta+\varphi=-\dfrac{\pi}{2}$，$\tan\theta=\tan(-\dfrac{\pi}{2}-\varphi)=\dfrac{1}{\tan\varphi}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ 时，取“=”.

22.【解析】 (1) $p(x)=xf(x)+ag(x)=xe^x+a\ln x$，

当 $a=1$ 时，$p(x)=xe^x+\ln x$，$p(1)=e$，

$p'(x)=e^x+xe^x+\dfrac{1}{x}$，$p'(1)=2e+1$，

$\therefore$ 切线方程为 $y-e=(2e+1)(x-1)$，

切线与坐标轴的交点为 $A(\dfrac{e+1}{2e+1},0)$，$B(0,-e-1)$，

$S_{\triangle AOB}=\dfrac{1}{2}\left|\dfrac{e+1}{2e+1}\right|\cdot|-e-1|=\dfrac{(e+1)^2}{4e+2}$； …………（4分）

(2) 当 $a=-1$ 时，$p(x)=xe^x-\ln x$，

由题意 $(t+1)r(t)=p(t)$，即 $(t+1)\left[(t+1)e^t-\dfrac{1}{t}\right]=te^t-\ln t$，

$(t+1)^2e^t-\dfrac{t+1}{t}=te^t-\ln t$，

$t(t+1)^2e^t-(t+1)=t^2e^t-t\ln t$，

$(t+1)^2e^{t+\ln t}-te^{t+\ln t}=(t+1)-t\ln t$，

$e^{t+\ln t}(t^2+t+1)=t^2+t+1-t^2-t\ln t$，

$(t^2+t+1)(e^{t+\ln t}-1)+t(t+\ln t)=0(*)$ …………（6分）

$\because e^x\geqslant x+1$（证明略）

$\therefore$ 上式 $=0\geqslant(t^2+t+1)(t+\ln t+1-1)+t(t+\ln t)$

$=(t+\ln t)(t^2+t+1+t)$

$=(t+\ln t)(t+1)^2$

$\because (t+1)^2\geqslant0$，$\therefore t+\ln t\leqslant0$，①

$\because t>0$，由 $(*)$ 得，$0\leqslant(t^2+t+1)(e^{t+\ln t}-1)$，

$\therefore t+\ln t\geqslant0$，②

由①②知 $t+\ln t=0$， …………（9分）

构造函数 $\varphi(t)=t+\ln t$，$(t>0)$，$\varphi'(t)=1+\dfrac{1}{t}>0$，

$\therefore \varphi(t)$ 在 $(0,+\infty)$ 单调递增，

$\varphi(\dfrac{5}{9})=\dfrac{5}{9}+\ln5-2\ln3<0$，$\varphi(\dfrac{5}{3e})=\dfrac{5}{3e}+\ln5-\ln3-1>0$，

$\dfrac{5}{9}<t<\dfrac{5}{3e}$. …………（12分）