2018 北京四中高三第一次模拟考试仿真卷

数　　学（理）（A）

注意事项：

1．答题前，先将自己的姓名、准考证号填写在试题卷和答题卡上，并将准考证号条形码粘贴在答题卡上的指定位置。

2．选择题的作答：每小题选出答案后，用 2B 铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑，写在试题卷、草稿纸和答题卡上的非答题区域均无效。

3．非选择题的作答：用签字笔直接答在答题卡上对应的答题区域内。写在试题卷、草稿纸和答题卡上的非答题区域均无效。

4．考试结束后，请将本试题卷和答题卡一并上交。

第 I 卷

一、选择题：本大题共 12 小题，每小题 5 分，在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的．

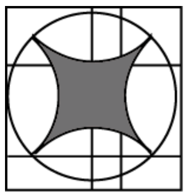
1．[2018・马鞍山一模]已知复数 z 满足 $(1-\mathrm{i})z=2+\mathrm{i}$，则 z 的共轭复数在复平面内对应的点在（　　）

A．第一象限　　B．第二象限　　C．第三象限　　D．第四象限

2．[2018・承德期末]设集合 $M=\left\{x \middle| x^2<36\right\}$，$N=\{2,4,6,8\}$，则 $M\cap N=$（　　）

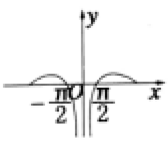
A．$\{2,4\}$　　B．$\{4,6\}$　　C．$\{2,6\}$　　D．$\{2,4,6\}$

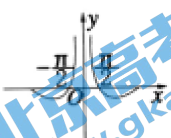
3．[2018・亳州期末]下图中的图案是我国古代建筑中的一种装饰图案，形若铜钱，寓意富贵吉祥．在圆内随机取一点，则该点取自阴影区域内（阴影部分由四条四分之一圆弧围成）的概率是（　　）

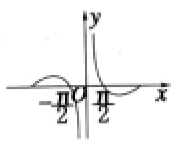


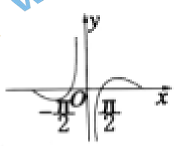
A．$\dfrac{1}{2}$　　B．$\dfrac{1}{3}$　　C．$\dfrac{4}{\pi}-1$　　D．$2-\dfrac{4}{\pi}$

4．[2018・泰安期末]函数 $f(x)=\dfrac{\cos x}{x-\sin x}$，$x\in\left[-\dfrac{3\pi}{2},0\right)\cup\left(0,\dfrac{3\pi}{2}\right]$的图象大致是（　　）

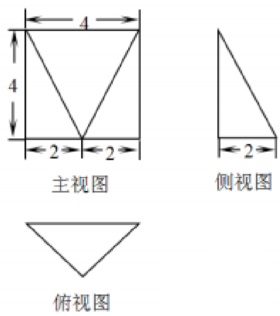
A．

B．

C．

D．

5．[2018・汕头期末]如图所示是一个几何体的三视图，则这个几何体外接球的体积为（　　）



北京高考在线 www.gkaozx.com

A. $\frac{32}{3}\pi$　　B. $\frac{64}{3}\pi$

C. 32π　　D. $\frac{64\sqrt{2}}{3}\pi$

6. [2018 • 遵义一模]数学家欧拉在 1765 年提出定理：三角形的外心、重心、垂心依次位于同一直线上，且重心到外心的距离是重心到垂心距离的一半，这条直线被后人称之为三角形的欧拉线．已知$\triangle ABC$的顶点$A(2,0)$，$B(0,4)$，$AC=BC$，则$\triangle ABC$的欧拉线方程为（　　）

A. $2x+y-3=0$　　B. $2x-y+3=0$　　C. $x-2y-3=0$　　D. $x-2y+3=0$

7. [2018 • 乌鲁木齐一模]执行如图所示的程序框图，则输出S的值为（　　）

A. 4097　　B. 9217

C. 9729　　D. 20481

8. [2018 • 承德期末]已知函数$f(x)=\sin(\omega x+\varphi)(\omega>0,|\varphi|<\frac{\pi}{2})$的最小正周期为$6\pi$，且其图象向右平移$\frac{2\pi}{3}$个单位后得到函数$g(x)=\sin\omega x$的图象，则$\varphi$等于（　　）

A. $\frac{4\pi}{9}$　　B. $\frac{2\pi}{9}$　　C. $\frac{\pi}{6}$　　D. $\frac{\pi}{3}$

9. [2018 • 中山期末]已知实数$a=\frac{\ln 2}{2}$，$b=\frac{\ln 3}{3}$，$c=\frac{\ln 5}{5}$，则a,b,c的大小关系是（　　）

A. $a<b<c$　　B. $c<a<b$　　C. $c<b<a$　　D. $b<a<c$

10. [2018 • 佛山一模]如图所示，在正方体$ABCD-A_1B_1C_1D_1$中，E,F分别为B_1C_1,C_1D_1的中点，点P是底面$A_1B_1C_1D_1$内一点，且$AP//$平面$EFDB$，则$\tan\angle APA_1$的最大值是（　　）

A. $\frac{\sqrt{2}}{2}$　　B. 1　　C. $\sqrt{2}$　　D. $2\sqrt{2}$

11. [2018 • 亳州一模]经过双曲线$M:\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$的左焦点作倾斜角为$60°$的直线$l$，若$l$交双曲线$M$的左支于$A,B$，则双曲线$M$离心率的取值范围是（　　）

A. $(2,+\infty)$　　B. $(1,2)$　　C. $(1,\sqrt{3})$　　D. $(\sqrt{3},+\infty)$

12. [2018 • 乌鲁木齐一模]设函数$f(x)=e^x\left(x+\frac{3}{x}-3\right)-\frac{a}{x}$，若不等式$f(x)\leqslant 0$有正实数解，则实数$a$的最小值为（　　）

A. 3　　B. 2　　C. e^2　　D. e

第 II 卷

二、填空题：本大题共 4 小题，每小题 5 分．

13. [2018 • 赣州期末]已知向量$\vec{a}=(12,k)$，$\vec{b}=(1-k,14)$，若$\vec{a}\perp\vec{b}$，则实数$k=$__________．

14．[2018 • 福州质检] $\triangle ABC$ 的内角 A,B,C 的对边分别为 a,b,c，已知 $\sqrt{3}\left(a\cos C-c\cos A\right)=b$，$B=60°$，则 A 的大小为__________.

15．[2018 • 黄山一模] 已知直线 $l: x=my+n(n>0)$ 过点 $A\left(5\sqrt{3},5\right)$，若可行域 $\begin{cases} x\leqslant my+n \\ x-\sqrt{3}y\geqslant 0 \\ y\geqslant 0 \end{cases}$ 的外接圆直径为 20，则 $n=$_____.

16．[2018 • 沙市中学] “求方程 $\left(\frac{3}{5}\right)^x+\left(\frac{4}{5}\right)^x=1$ 的解”有如下解题思路：设 $f\left(x\right)=\left(\frac{3}{5}\right)^x+\left(\frac{4}{5}\right)^x$，则 $f\left(x\right)$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递减，且 $f\left(2\right)=1$，所以原方程有唯一解 $x=2$．类比上述解题思路，不等式 $x^6-\left(x+2\right)>\left(x+2\right)^3-x^2$ 的解集是__________.

三、解答题：解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤．第 17~21 题为必考题，每个试题考生都必须作答．第 22、23 为选考题，考生根据要求作答．

（一）必考题：60 分，每个试题 12 分．

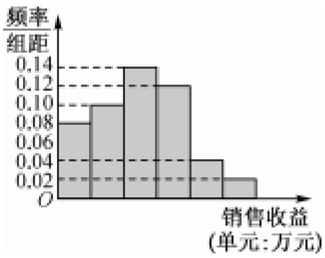
17．[2018 • 梅河口五中] 已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 $S_n=n^2+pn$，且 a_2，a_5，a_{10} 成等比数列．

（1）求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式；

（2）若 $b_n=1+\frac{5}{a_n\cdot a_{n+1}}$，求数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和 T_n．

18．[2018 • 育才中学] 某公司为了解广告投入对销售收益的影响，在若干地区各投入 4 万元广告费用，并将各地的销售收益绘制成频率分布直方图（如图所示），由于工作人员操作失误，横轴的数据丢失，但可以确定横轴是从 0 开始计数的．

（1）根据频率分布直方图计算图中各小长方形的宽度；



（2）试估计该公司投入 4 万元广告费用之后，对应销售收益的平均值（以各组的区间中点值代表该组的取值）；

（3）该公司按照类似的研究方法，测得另外一些数据，并整理得到下表：

广告投入 x(单位:万元)	1	2	3	4	5
销售收益 y(单位:万元)	2	3	2		7

由表中的数据显示，x 与 y 之间存在着线性相关关系，请将（2）的结果填入空白栏，并求出 y 关于 x 的回归直线方程．（参考公式：$\begin{cases} \hat{b}=\dfrac{\sum_{i=1}^{n}x_iy_i-n\overline{x}\overline{y}}{\sum_{i=1}^{n}x_i^2-n\overline{x}^2} \\ \hat{a}=\overline{y}-\hat{b}\overline{x} \end{cases}$）

19．[2018·淮南一模]如图所示，正四棱椎 $P-ABCD$ 中，底面 $ABCD$ 的边长为 2，侧棱长为$2\sqrt{2}$，E 为 PD 的中点.

（1）求证：$PB//$ 平面 AEC；

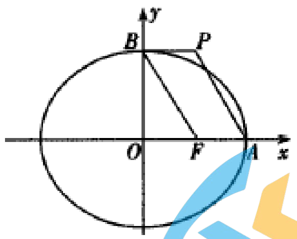
（2）若 F 为 PA 上的一点，且 $\frac{PF}{FA}=3$，

求三棱椎 $A-BDF$ 的体积.

20．[2018·乌鲁木齐一模]椭圆 $C:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\left(a>b>0\right)$ 的右焦点是 $F\left(c,0\right)$，$A\left(a,0\right)$，$B\left(0,b\right)$，点 P 是平行四边形 $FAPB$ 的一个顶点，$PF\perp x$ 轴.

（1）求椭圆 C 的离心率；

（2）过 F 作直线 l 交椭圆 C 于 M,N 两点，$PM\perp PN$，求直线 l 的斜率.



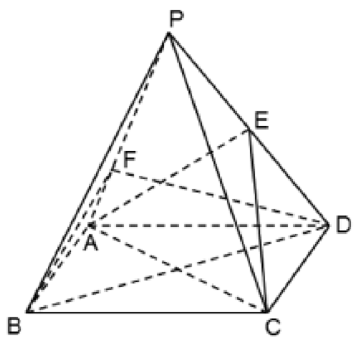
21．[2018·石家庄一检]已知函数 $f\left(x\right)=x\left(\ln x-ax\right)\left(a\in\mathbf{R}\right)$.

（1）若 $a=1$，求函数 $f\left(x\right)$ 的图像在点 $\left(1,f\left(1\right)\right)$ 处的切线方程；

（2）若函数 $f\left(x\right)$ 有两个极值点 x_1，x_2，且 $x_1<x_2$，求证：$f\left(x_2\right)>-\frac{1}{2}$.

（二）选考题（共 10 分．请考生在第 22、23 题中任选一题作答．如果多做，则按所做第一题计分）

22．[2018·皖西质检]在平面直角坐标系中，以坐标原点 O 为极点，x 轴的正半轴为极轴建立极坐标系．已知直线 l 的参数方程为 $\begin{cases}x=1-\frac{\sqrt{2}}{2}t\\ y=\frac{\sqrt{2}}{2}t\end{cases}$ （t为参数），曲线 C 的极坐标方程为 $\rho=4\cos\theta$；



（1）求直线l的直角坐标方程和曲线C的直角坐标方程；

（2）若直线l与曲线C交点分别为A,B，点$P\left(1,0\right)$，求$\dfrac{1}{|PA|}+\dfrac{1}{|PB|}$的值.

23．[2018·湖北联考]已知函数$f\left(x\right)=|2x-1|+|2x+1|$.

（1）求函数$f\left(x\right)$的最小值m；

（2）若正实数a,b满足$\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}=\sqrt{3}$，求证：$\dfrac{1}{a^2}+\dfrac{2}{b^2}\geqslant m$.

北京高考在线 www.gkaozx.com

数学试题答案

第 I 卷

一、选择题：本大题共 12 小题，每小题 5 分，在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.

1.【答案】D

【解析】$\because (1-\mathrm{i})z=2+\mathrm{i}$，$\therefore (1-\mathrm{i})(1+\mathrm{i})z=(2+\mathrm{i})(1+\mathrm{i})$，$2z=1+3\mathrm{i}$，$z=\dfrac{1}{2}+\dfrac{3}{2}\mathrm{i}$，$\bar{z}=\dfrac{1}{2}-\dfrac{3}{2}\mathrm{i}$，$z$ 的共轭复数在复平面内对应点坐标为$\left(\dfrac{1}{2},-\dfrac{3}{2}\right)$，$z$ 的共轭复数在复平面内对应的点在第四象限，故选 D.

2.【答案】A

【解析】$M=(-6,6)$，故$M\cap N=\{2,4\}$.

3.【答案】C

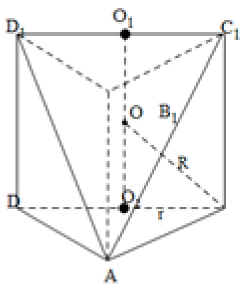
【解析】令圆的半径为 1，则$P=\dfrac{S'}{S}=\dfrac{\pi-2(\pi-2)}{\pi}=\dfrac{4}{\pi}-1$，故选 C.

4.【答案】C

【解析】由 $f(-x)=-f(x)$ 可得函数 $f(x)$ 为奇函数，图像关于原点对称，可排除 A，B，$\because x\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$时，$f(x)>0$，故选 C.

5.【答案】D

【解析】由已知中的三视图可得，该几何体是一个以正视图为底面的四棱锥，



故该四棱锥的外接球，与以俯视图为底面，以 4 为高的直三棱柱的外接球相同.

由底面底边长为 4，高为 2，故底面为等腰直角三角形，

可得底面三角形外接圆的半径为$r=2$，

由棱柱高为 4，可得$OO_2=2$，

故外接球半径为$R=\sqrt{2^2+2^2}=2\sqrt{2}$，

故外接球的体积为$V=\dfrac{4}{3}\pi\times\left(2\sqrt{2}\right)^3=\dfrac{64\sqrt{2}}{3}\pi$. 选 D.

6.【答案】D

【解析】线段 AB 的中点为 M（1，2），$k_{AB}=-2$，

∴线段 AB 的垂直平分线为：$y-2=\frac{1}{2}(x-1)$，即 $x-2y+3=0$．

∵$AC=BC$，∴△ABC 的外心、重心、垂心都位于线段 AB 的垂直平分线上，

因此△ABC 的欧拉线的方程为：$x-2y+3=0$．故选：D．

7．【答案】B

【解析】阅读流程图可知，该流程图的功能是计算：

$S=1\times2^0+2\times2^1+3\times2^2+\cdots+10\times2^9$，

则 $2S=1\times2^1+2\times2^2+3\times2^3+\cdots+10\times2^{10}$，

以上两式作差可得：$-S=2^0+2^1+2^2+\cdots+2^9-10\times2^{10}=\frac{1-2^{10}}{1-2}-10\times2^{10}$，

则：$S=9\times2^{10}+1=9217$．本题选择 B 选项．

8．【答案】B

【解析】由最小正周期公式可得：$\frac{2\pi}{\omega}=6\pi$，$\therefore\omega=\frac{1}{3}$，函数的解析式为：$f(x)=\sin\left(\frac{1}{3}x+\varphi\right)$，将函数图像向右平移 $\frac{2\pi}{3}$ 个单位后得到的函数图像为：$g(x)=\sin\left[\frac{1}{3}\left(x-\frac{2\pi}{3}\right)+\varphi\right]=\sin\left(\frac{1}{3}x-\frac{2\pi}{9}+\varphi\right)=\sin\frac{1}{3}x$，

据此可得：$\varphi-\frac{2\pi}{9}=2k\pi$，$\therefore\varphi=2k\pi+\frac{2\pi}{9}(k\in\mathbf{Z})$，

令 $k=0$ 可得 $\varphi=\frac{2\pi}{9}$．本题选择 B 选项．

9．【答案】B

【解析】∵$b-a=\frac{\ln3}{3}-\frac{\ln2}{2}=\frac{2\ln3-3\ln2}{6}=\frac{\ln9-\ln8}{6}>0$，$\therefore b>a$；

又 $a-c=\frac{\ln2}{2}-\frac{\ln5}{5}=\frac{5\ln2-2\ln5}{10}=\frac{\ln32-\ln25}{10}>0$，$\therefore a>c$，

$\therefore b>a>c$，即 $c<a<b$．选 B．

10．【答案】D

【解析】由题意可得，点 P 位于过点 A 且与平面 $EFDB$ 平行的平面上，

如图所示，取 A_1D_1,A_1B_1 的中点 G,H，连结 GH,AH,AG,GE，

由正方形的性质可知：$EF//GH$，由 $ABEG$ 为平行四边形可知 $AG//BE$，

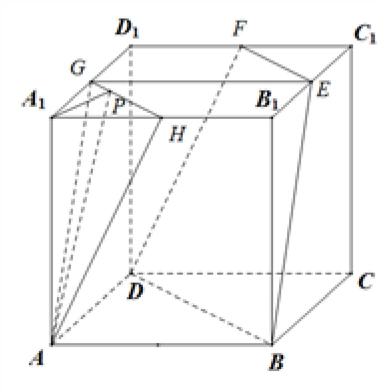
由面面平行的判定定理可得：平面 $AGH//$ 平面 $BEFD$，

据此可得，点 P 位于直线 GH 上，

如图所示，由 $AA_1\perp$ 平面 $A_1B_1C_1D_1$ 可得 $AA_1\perp A_1P$，

则 $\tan\angle APA_1=\frac{AA_1}{A_1P}$，当 $\tan\angle APA_1$ 有最大值时，A_1P 取得最小值，

即点 P 是 GH 的中点时满足题意，结合正方体的性质可得此时 $\tan\angle APA_1$ 的值是 $2\sqrt{2}$．本题选择 D 选项．



11．【答案】B

【解析】由题意，$\frac{b}{a}<\sqrt{3}$，得 $b^2=c^2-a^2<3a^2$，所以 $\frac{c}{a}<2$，即离心率的范围是 $(1,2)$，故选 B.

12．【答案】D

【解析】原问题等价于 $a\geqslant e^x\left(x^2-3x+3\right)$，令 $g(x)=e^x\left(x^2-3x+3\right)$，

则 $a\geqslant\left[g(x)\right]_{\min}$，而 $g'(x)=e^x\left(x^2-x\right)$，

由 $g'(x)>0$ 可得：$x\in(-\infty,0)\cup(1,+\infty)$，

由 $g'(x)<0$ 可得：$x\in(0,1)$，

据此可知，函数 $g(x)$ 在区间 $(0,+\infty)$ 上的最小值为 $g(1)=e$，

综上可得：实数 a 的最小值为 e．本题选择 D 选项．

第 II 卷

二、填空题：本大题共 4 小题，每小题 5 分．

13．【答案】-6

【解析】由题意，$12(1-k)+14k=0$，则 $k=-6$．

14．【答案】$75°$

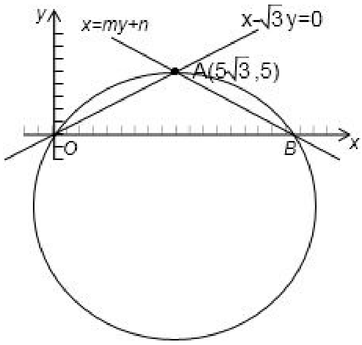
【解析】由 $\sqrt{3}(a\cos C-c\cos A)=b$，根据正弦定理得 $\sqrt{3}(\sin A\cos C-\sin C\cos A)=\sin B$，即 $\sqrt{3}\sin(A-C)=\frac{\sqrt{3}}{2}$，

$\sin(A-C)=\frac{1}{2}$，$A-C=\frac{1}{6}\pi=30°$，又 $\because A+C=180°-B=120°$，$\therefore 2A=150°$，$A=75°$，故答案为 $75°$．

15．【答案】$10\sqrt{3}$

【解析】由题意知可行域为图中△OAB 及其内部，解得 $B(n,0),|AB|=\sqrt{(n-5\sqrt{3})^2+25}$，又 $\tan\angle AOB=\frac{\sqrt{3}}{3}$，则 $\angle AOB=30°$，由正弦定理得 $|AB|=2R\sin\angle AOB=20\times\sin 30°=10$，解得 $n=10\sqrt{3}$．故答案为：$10\sqrt{3}$．

北京高考在线 www.gkaozx.com



16.【答案】$(-\infty,-1)\cup(2,+\infty)$

【解析】不等式 $x^6-(x+2)>(x+2)^3-x^2$ 变形为，

$x^6+x^2>(x+2)^3+(x+2)$；

令 $u=x^2$，$v=x+2$，

则 $x^6+x^2>(x+2)^3+(x+2)\Leftrightarrow u^3+u>v^3+v$；

考查函数 $f(x)=x^3+x$，知 $f(x)$ 在 R 上为增函数，

∴ $f(u)>f(v)$，∴ $u>v$；

不等式 $x^6+x^2>(x+2)^3+(x+2)$ 可化为 $x^2>x+2$，解得 $x<-1$ 或 $x>2$；

∴不等式的解集为：$(-\infty,-1)\cup(2,+\infty)$.

故答案为：$(-\infty,-1)\cup(2,+\infty)$.

三、解答题：解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤．第 17~21 题为必考题，每个试题考生都必须作答．第 22、23 为选考题，考生根据要求作答．
（一）必考题：60 分，每个试题 12 分．

17.【答案】(1) $a_n=2n+5$；(2) $T_n=\dfrac{14n^2+54n}{14n+49}$.

【解析】(1) 当 $n\geq 2$ 时，$a_n=S_n-S_{n-1}=2n-1+p$，

当 $n=1$ 时，$a_1=S_1=1+p$，也满足 $a_n=2n-1+p$，故 $a_n=2n-1+p$，

∵ a_2,a_5,a_{10} 成等比数列，∴ $(3+p)(19+p)=(9+p)^2$，

∴ $p=6$．∴ $a_n=2n+5$.

(2) 由 (1) 可得 $b_n=1+\dfrac{5}{a_n\cdot a_{n+1}}=1+\dfrac{5}{(2n+5)(2n+7)}=1+\dfrac{5}{2}\left(\dfrac{1}{2n+5}-\dfrac{1}{2n+7}\right)$，

$$\therefore T_n=n+\frac{5}{2}\left(\frac{1}{7}-\frac{1}{9}+\frac{1}{9}-\frac{1}{11}+\cdots+\frac{1}{2n+5}-\frac{1}{2n+7}\right)=n+\frac{5n}{14n+49}=\frac{14n^2+54n}{14n+49}.$$

18.【答案】(1) 2；(2) 5；(3) 答案见解析.

【解析】(1) 设各小长方形的宽度为 m.

由频率分布直方图中各小长方形的面积总和为1，可知

$(0.08+0.1+0.14+0.12+0.04+0.02)\cdot m=0.5m=1$，解得 $m=2$.

故图中各小长方形的宽度为 2.

(2) 由 (1) 知各小组依次是 $[0,2)$，$[2,4)$，$[4,6)$，$[6,8)$，$[8,10)$，$[10,12]$，其中点分别为1，3，5，7，9，

11对应的频率分别为0.16，0.20，0.28，0.24，0.08，0.04

故可估计平均值为$1\times0.16+3\times0.2+5\times0.28+7\times0.24+9\times0.08+11\times0.04=5$.

（3）由（2）可知空白栏中填5.

由题意可知$\overline{x}=\dfrac{1+2+3+4+5}{5}=3$，$\overline{y}=\dfrac{2+3+2+5+7}{5}=3.8$，

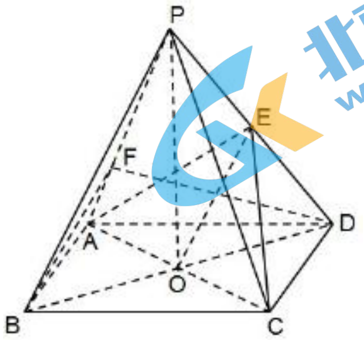
$\sum\limits_{i=1}^{5}x_iy_i=1\times2+2\times3+3\times2+4\times5+5\times7=69$，$\sum\limits_{i=1}^{5}x_i^2=1^2+2^2+3^3+4^2+5^2=55$，

根据公式，可求得$\hat{b}=\dfrac{69-5\times3\times3.8}{55-5\times3^2}=\dfrac{12}{10}=1.2$，$\hat{a}=3.8-1.2\times3=0.2$.

所以所求的回归直线方程为$y=1.2x+0.2$.

19.【答案】（1）见解析；（2）$\dfrac{\sqrt{6}}{6}$.

【解析】（1）设BD交AC于O，连接OE，则在$\triangle BDP$中，O,E分别为BD,PD的中点，



$\therefore OE/\!/PB$，又$OE\subset$平面AEC，$PB\not\subset$平面AEC，

$\therefore PB/\!/$平面AEC.

（2）易知$PO=\sqrt{PD^2-OD^2}=\sqrt{6}$，且$PO\perp$平面$ABCD$，

$\therefore V_{A-BDF}=V_{F-ABD}=\dfrac{1}{3}\times S_{\triangle ABD}\times\left(\dfrac{1}{4}PO\right)=\dfrac{1}{3}\times\dfrac{1}{2}\times2\times2\times\dfrac{1}{4}\times\sqrt{6}=\dfrac{\sqrt{6}}{6}$.

20.【答案】（1）$\dfrac{1}{2}$；（2）$k=0$或$k=-2\sqrt{3}$.

【解析】（1）$\because$四边形$FAPB$是平行四边形，$\therefore BP=FA$且$BP/\!/FA$，

又$\because PF\perp$ x轴，$\therefore BP=OF$，$\therefore a=2c$，则$e=\dfrac{1}{2}$.

（2）由（1）得$a=2c$，$\therefore b=\sqrt{a^2-c^2}=\sqrt{3}c$，$\therefore$椭圆方程为$\dfrac{x^2}{4c^2}+\dfrac{y^2}{3c^2}=1$，

设直线$l:y=k(x-c)$，代入椭圆方程，得：$\left(3+4k^2\right)x^2-8k^2cx+4k^2c^2-12c^2=0$，

设$M(x_1,y_1)$，$N(x_2,y_2)$，则$x_1+x_2=\dfrac{8k^2c}{3+4k^2}$，$x_1\cdot x_2=\dfrac{4k^2c^2-12c^2}{3+4k^2}$，

由于 $y_1=k(x_1-c)$，$y_2=k(x_2-c)$，$\therefore y_1+y_2=\dfrac{-6kc}{3+4k^2}$，$y_1\cdot y_2=\dfrac{-9k^2c^2}{3+4k^2}$，

根据题意得 $P(c,\sqrt{3}c)$，且 $\overrightarrow{PM}\cdot\overrightarrow{PN}=0$，代入点坐标得：

$x_1x_2-c(x_1+x_2)+c^2+y_1y_2-\sqrt{3}c(y_1+y_2)+3c^2=0$，

即 $\dfrac{4k^2c^2-12c^2}{3+4k^2}-\dfrac{8k^2c^2}{3+4k^2}+c^2-\dfrac{9k^2c^2}{3+4k^2}+\dfrac{6\sqrt{3}kc^2}{3+4k^2}+3c^2=0$，

化简得 $k^2+2\sqrt{3}k=0$，解得 $k=0$ 或 $k=-2\sqrt{3}$.

21.【答案】(1) $x+y=0$ (2) 见解析

【解析】(1) 由已知条件，$f(x)=x(\ln x-x)$，当 $x=1$ 时，$f(x)=-1$，

$f'(x)=\ln x+1-2x$，当 $x=1$ 时，$f'(x)=-1$，所以所求切线方程为 $x+y=0$

(2) 由已知条件可得 $f'(x)=\ln x+1-2ax$ 有两个相异实根 x_1，x_2，

令 $f'(x)=h(x)$，则 $h'(x)=\dfrac{1}{x}-2a$，

1) 若 $a\leqslant 0$，则 $h'(x)>0$，$h(x)$ 单调递增，$f'(x)$ 不可能有两根；

2) 若 $a>0$，

令 $h'(x)=0$ 得 $x=\dfrac{1}{2a}$，可知 $h(x)$ 在 $\left(0,\dfrac{1}{2a}\right)$ 上单调递增，在 $\left(\dfrac{1}{2a},+\infty\right)$ 上单调递减，

令 $f'\left(\dfrac{1}{2a}\right)>0$ 解得 $0<a<\dfrac{1}{2}$，

由 $\dfrac{1}{e}<\dfrac{1}{2a}$ 有 $f'\left(\dfrac{1}{e}\right)=-\dfrac{2a}{e}<0$，

由 $\dfrac{1}{a^2}>\dfrac{1}{2a}$ 有 $f'\left(\dfrac{1}{a^2}\right)=-2\ln a+1-\dfrac{2}{a}<0$，

从而 $0<a<\dfrac{1}{2}$ 时函数 $f(x)$ 有两个极值点，

当 x 变化时，$f'(x)$，$f(x)$ 的变化情况如下表

x	$(0,x_1)$	x_1	(x_1,x_2)	x_2	$(x_2,+\infty)$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	单调递减↘	$f(x_1)$	单调递增↗	$f(x_2)$	单调递减↘

因为 $f'(1)=1-2a>0$，所以 $x_1<1<x_2$，$f(x)$ 在区间 $[1,x_2]$ 上单调递增，

$\therefore f(x_2)>f(1)=-a>-\frac{1}{2}$.

另解：由已知可得 $f'(x)=\ln x+1-2ax$，则 $2a=\frac{1+\ln x}{x}$，令 $g(x)=\frac{1+\ln x}{x}$，

则 $g'(x)=\frac{-\ln x}{x^2}$，可知函数 $g(x)$ 在 $(0,1)$ 单调递增，在 $(1,+\infty)$ 单调递减，

若 $f'(x)$ 有两个根，则可得 $x_1<1<x_2$，

当 $x\in(1,x_2)$ 时，$\frac{1+\ln x}{x}>2a$，$f'(x)=\ln x+1-2ax>0$，

所以 $f(x)$ 在区间 $[1,x_2]$ 上单调递增，

所以 $f(x_2)>f(1)=-a>-\frac{1}{2}$.

（二）选考题（共 10 分．请考生在第 22、23 题中任选一题作答．如果多做，则按所做第一题计分）

22.【答案】（1）$l:x+y-1=0$，曲线 $C:x^2+y^2-4x=0$；（2）$\frac{\sqrt{14}}{3}$.

【解析】（1）$l:x+y-1=0$，曲线 $C:x^2+y^2-4x=0$；

（2）将 $\begin{cases} x=1-\frac{\sqrt{2}}{2}t \\ y=\frac{\sqrt{2}}{2}t \end{cases}$（$t$ 为参数）代入曲线 C 的方程，得 $t^2+\sqrt{2}t-3=0$，

$\therefore |t_1-t_2|=\sqrt{(t_1+t_2)^2-4t_1t_2}=\sqrt{14}$，$\therefore \frac{1}{|PA|}+\frac{1}{|PB|}=\frac{|t_1-t_2|}{|t_1t_2|}=\frac{\sqrt{14}}{3}$.

23.【答案】（1）2；（2）见解析.

【解析】（1）$|2x-1|+|2x+1|\geqslant|(2x-1)-(2x+1)|=2$ 当且仅当 $-\frac{1}{2}\leqslant x\leqslant\frac{1}{2}$ 时，等式成立.

（2）$\left(\frac{1}{a^2}+\frac{2}{b^2}\right)\cdot\left(1+\frac{1}{2}\right)\geqslant\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)^2$ 则 $\frac{1}{a^2}+\frac{2}{b^2}\geqslant 2$，当且仅当 $b=2a$ 时取，等号成立.