数　学

注意事项：

1．答卷前，考生务必将自己的姓名、准考证号填写在答题卡上。

2．回答选择题时，选出每小题答案后，用铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其他答案标号。回答非选择题时，将答案写在答题卡上。写在本试卷上无效。

3．考试结束后，将本试卷和答题卡一并交回。

一、选择题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1．样本数据16，24，14，10，20，30，12，14，40的中位数为

A．14　　B．16　　C．18　　D．20

2．椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+y^2=1(a>1)$ 的离心率为 $\frac{1}{2}$，则 $a=$

A．$\frac{2\sqrt{3}}{3}$　　B．$\sqrt{2}$　　C．$\sqrt{3}$　　D．2

3．记等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n，$a_3+a_7=6$，$a_{12}=17$，则 $S_{16}=$

A．120　　B．140　　C．160　　D．180

4．设 α，β 是两个平面，m，l 是两条直线，则下列命题为真命题的是

A．若 $\alpha\perp\beta$，$m/\!/\alpha$，$l/\!/\beta$，则 $m\perp l$

B．若 $m\subset\alpha$，$l\subset\beta$，$m/\!/l$，则 $\alpha/\!/\beta$

C．若 $\alpha\cap\beta=m$，$l/\!/\alpha$，$l/\!/\beta$，则 $m/\!/l$

D．若 $m\perp\alpha$，$l\perp\beta$，$m/\!/l$，则 $\alpha\perp\beta$

5．甲、乙、丙等5人站成一排，且甲不在两端，乙和丙之间恰有2人，则不同排法共有

A．20种　　B．16种　　C．12种　　D．8种

6．已知 Q 为直线 $l:x+2y+1=0$ 上的动点，点 P 满足 $\overrightarrow{QP}=(1,-3)$，记 P 的轨迹为 E，则

A．E 是一个半径为 $\sqrt{5}$ 的圆　　B．E 是一条与 l 相交的直线

C．E 上的点到 l 的距离均为 $\sqrt{5}$　　D．E 是两条平行直线

7. 已知$\theta\in(\frac{3\pi}{4},\pi)$， $\tan 2\theta=-4\tan(\theta+\frac{\pi}{4})$，则$\frac{1+\sin 2\theta}{2\cos^2\theta+\sin 2\theta}=$

A. $\frac{1}{4}$ B. $\frac{3}{4}$ C. 1 D. $\frac{3}{2}$

8. 设双曲线$C:\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$的左、右焦点分别为$F_1$， F_2，过坐标原点的直线与C交于A， B两点，$|F_1B|=2|F_1A|$，$\overrightarrow{F_2A}\cdot\overrightarrow{F_2B}=4a^2$，则$C$的离心率为

A. $\sqrt{2}$ B. 2 C. $\sqrt{5}$ D. $\sqrt{7}$

二、选择题：本题共 3 小题，每小题 6 分，共 18 分。在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求。全部选对的得 6 分，部分选对的得部分分，有选错的得 0 分。

9. 已知函数$f(x)=\sin(2x+\frac{3\pi}{4})+\cos(2x+\frac{3\pi}{4})$，则

A. 函数$f(x-\frac{\pi}{4})$为偶函数

B. 曲线$y=f(x)$的对称轴为$x=k\pi$， $k\in\mathbf{Z}$

C. $f(x)$在区间$(\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{2})$单调递增

D. $f(x)$的最小值为-2

10. 已知复数z， w均不为0，则

A. $z^2=|z|^2$ B. $\frac{z}{\overline{z}}=\frac{z^2}{|z|^2}$

C. $\overline{z-w}=\overline{z}-\overline{w}$ D. $|\frac{z}{w}|=\frac{|z|}{|w|}$

11. 已知函数$f(x)$的定义域为$\mathbf{R}$，且$f(\frac{1}{2})\neq 0$，若$f(x+y)+f(x)f(y)=4xy$，则

A. $f(-\frac{1}{2})=0$ B. $f(\frac{1}{2})=-2$

C. 函数$f(x-\frac{1}{2})$是偶函数 D. 函数$f(x+\frac{1}{2})$是减函数

三、填空题：本题共 3 小题，每小题 5 分，共 15 分。

12. 已知集合$A=\{-2,0,2,4\}$， $B=\{x||x-3|\leqslant m\}$，若$A\cap B=A$，则m的最小值为________.

13．已知轴截面为正三角形的圆锥 MM' 的高与球 O 的直径相等，则圆锥 MM' 的体积与球 O 的体积的比值是__________，圆锥 MM' 的表面积与球 O 的表面积的比值是__________．

14．以 $\max M$ 表示数集 M 中最大的数．设 $0<a<b<c<1$，已知 $b\geqslant 2a$ 或 $a+b\leqslant 1$，则 $\max\{b-a,c-b,1-c\}$ 的最小值为__________．

四、解答题：本题共 5 小题，共 77 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

15．（13 分）

已知函数 $f(x)=\ln x+x^2+ax+2$ 在点 $(2,f(2))$ 处的切线与直线 $2x+3y=0$ 垂直．

（1）求 a；

（2）求 $f(x)$ 的单调区间和极值．

16．（15 分）

盒中有标记数字 1，2，3，4 的小球各 2 个，随机一次取出 3 个小球．

（1）求取出的 3 个小球上的数字两两不同的概率；

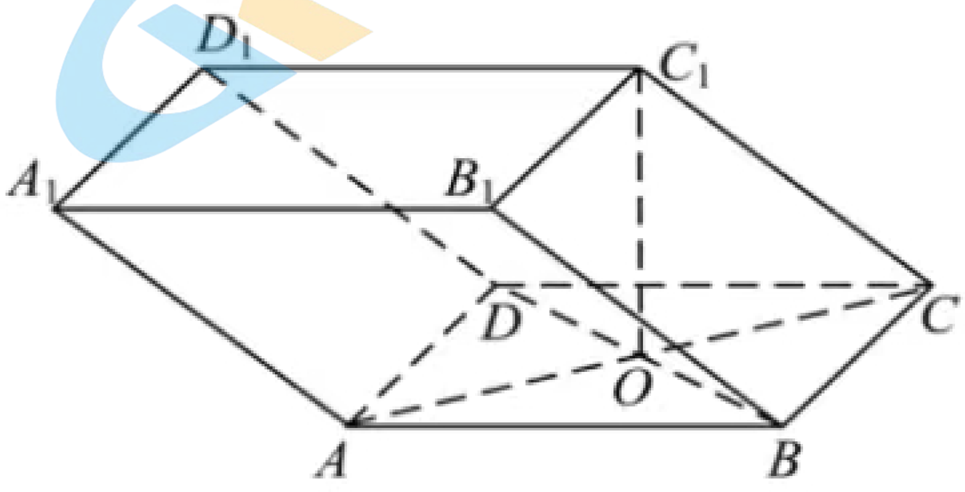
（2）记取出的 3 个小球上的最小数字为 X，求 X 的分布列及数学期望 $E(X)$．

17．（15 分）

如图，平行六面体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，底面 $ABCD$ 是边长为 2 的正方形，O 为 AC 与 BD 的交点，$AA_1=2$，$\angle C_1CB=\angle C_1CD$，$\angle C_1CO=45°$．

（1）证明：$C_1O\perp$ 平面 $ABCD$；

（2）求二面角 $B-AA_1-D$ 的正弦值．



18．（17 分）

已知抛物线 $C:y^2=4x$ 的焦点为 F，过 F 的直线 l 交 C 于 A，B 两点，过 F 与 l 垂直的直线交 C 于 D，E 两点，其中 B，D 在 x 轴上方，M，N 分别为 AB，DE 的中点．

（1）证明：直线 MN 过定点；

（2）设 G 为直线 AE 与直线 BD 的交点，求 $\triangle GMN$ 面积的最小值．

19．（17 分）

离散对数在密码学中有重要的应用．设 p 是素数，集合 $X=\{1,2,\cdots,p-1\}$，若 $u,v\in X$，$m\in\mathbf{N}$，记 $u\otimes v$ 为 uv 除以 p 的余数，$u^{m,\otimes}$ 为 u^m 除以 p 的余数；设 $a\in X$，$1,a,a^{2,\otimes},\cdots,a^{p-2,\otimes}$ 两两不同，若 $a^{n,\otimes}=b\,(n\in\{0,1,\cdots,p-2\})$，则称 n 是以 a 为底 b 的离散对数，记为 $n=\log(p)_a b$．

（1）若 $p=11$，$a=2$，求 $a^{p-1,\otimes}$；

（2）对 $m_1,m_2\in\{0,1,\cdots,p-2\}$，记 $m_1\oplus m_2$ 为 m_1+m_2 除以 $p-1$ 的余数（当 m_1+m_2 能被 $p-1$ 整除时，$m_1\oplus m_2=0$）．证明：$\log(p)_a(b\otimes c)=\log(p)_a b\oplus\log(p)_a c$，其中 $b,c\in X$；

（3）已知 $n=\log(p)_a b$．对 $x\in X$，$k\in\{1,2,\cdots,p-2\}$，令 $y_1=a^{k,\otimes}$，$y_2=x\otimes b^{k,\otimes}$．证明：$x=y_2\otimes y_1^{n(p-2),\otimes}$．