



5. 已知函数  $f(x)$  是定义在  $\mathbf{R}$  上的偶函数, 当  $x \geq 0$  时,  $f(x) = x(1-x)$ . 则不等式  $x \cdot f(x) > 0$  的解集为
- A.  $(-1, 0) \cup (1, +\infty)$       B.  $(-1, 0) \cup (0, 1)$   
 C.  $(-\infty, -1) \cup (0, 1)$       D.  $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$
6.  $(x-1) \cdot (\sqrt{x} - \frac{2}{\sqrt{x}})^6$  的展开式中  $x^2$  的系数为
- A. 48      B. 54  
 C. 60      D. 72
7. 已知  $a = (\frac{1}{3})^{0.3}$ ,  $b = \log_{\frac{1}{3}} 0.3$ ,  $c = a^b$ , 则  $a, b, c$  的大小关系为
- A.  $b > a > c$       B.  $b > c > a$   
 C.  $c > b > a$       D.  $a > b > c$
8. 在平行四边形  $ABCD$  中,  $AB=2$ ,  $AD=\sqrt{5}$ , 点  $F$  为边  $CD$  的中点, 若  $\overrightarrow{AF} \cdot \overrightarrow{DF} = 0$ , 则  $\overrightarrow{BF} \cdot \overrightarrow{AC} =$
- A. 4      B. 3  
 C. 2      D. 1
9. 已知圆锥的顶点和底面圆周都在球  $O$  面上, 圆锥的侧面展开图的圆心角为  $\frac{2\pi}{3}$ , 面积为  $3\pi$ , 则球  $O$  的表面积等于
- A.  $\frac{81\pi}{8}$       B.  $\frac{81\pi}{2}$   
 C.  $\frac{121\pi}{8}$       D.  $\frac{121\pi}{2}$
10. 若函数  $f(x) = \sqrt{3} \sin \omega x + \cos \omega x$  ( $\omega > 0$ ) 在区间  $(0, \frac{\pi}{6})$  上仅有一条对称轴及一个对称中心, 则  $\omega$  的取值范围为
- A.  $(5, 8)$       B.  $(5, 8]$   
 C.  $(5, 11]$       D.  $[5, 11)$
11. 已知数列  $\{a_n\}$  的前  $n$  项和为  $S_n$ ,  $a_1 = 1$ ,  $a_2 = 2$ ,  $a_n = 3a_{n-1} + 4a_{n-2}$  ( $n \geq 3$ ), 则  $S_{10} =$
- A.  $\frac{4^{10} - 1}{5}$       B.  $\frac{4^{11} - 1}{5}$   
 C.  $4^{10} - 1$       D.  $4^{11} - 1$
12. 已知点  $F$  为抛物线  $E: x^2 = 4y$  的焦点,  $C(0, -2)$ , 过点  $F$  且斜率为 1 的直线交抛物线于  $A, B$  两点, 点  $P$  为抛物线上任意一点, 若  $\overrightarrow{CP} = m\overrightarrow{CA} + n\overrightarrow{CB}$ , 则  $m+n$  的最小值为
- A.  $\frac{1}{3}$       B.  $\frac{1}{2}$       C.  $\frac{2}{3}$       D.  $\frac{3}{4}$



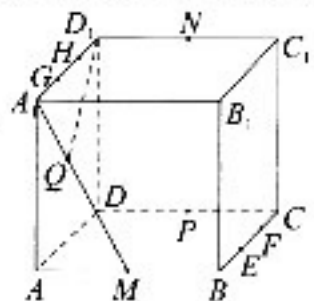
二、填空题：本大题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。

13. 记等差数列  $\{a_n\}$  的前  $n$  项和为  $S_n$ ，若  $S_4 = 5a_5$ ，则  $a_5 =$  \_\_\_\_\_.

14. 若函数  $f(x) = x^2 e^x - m \ln x$  在点  $(1, f(1))$  处的切线过点  $(0, 0)$ ，则实数  $m =$  \_\_\_\_\_.

15. 已知双曲线  $E: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$  与抛物线  $C: y^2 = 2px (p > 0)$  有共同的一焦点，过  $E$  的左焦点且与曲线  $C$  相切的直线恰与  $E$  的一渐近线平行，则  $E$  的离心率为 \_\_\_\_\_.

16. 如图，正方体  $ABCD-A_1B_1C_1D_1$  中，点  $E, F$  是  $BC$  上的两个三等分点，点  $G, H$  是  $A_1D_1$  上的两个三等分点，点  $M, N, P$  分别为  $AB, C_1D_1$  和  $CD$  的中点，点  $Q$  是  $A_1M$  上的一个动点，下面结论中正确的是 \_\_\_\_\_.



- ①  $FH$  与  $AC_1$  异面且垂直；      ②  $FG$  与  $AC_1$  相交且垂直；  
 ③  $D_1Q \parallel$  平面  $EFN$ ；      ④  $B_1, H, F, P$  四点共面.

三、解答题：共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。第 17~21 题为必考题，每个试题考生都必须作答。第 22、23 题为选考题，考生根据要求作答。

(一) 必考题：共 60 分。

17. (12 分)

在斜三角形  $ABC$  中，角  $A, B, C$  的对边分别为  $a, b, c$ ，且  $c^2 = 2ab \cos C$ .

(1) 若  $\triangle ABC$  的面积为  $S$ ，且满足  $4S = c^2$ ，求角  $C$  的大小；

(2) 证明：
$$\frac{2}{\tan C} - \frac{1}{\tan A} + \frac{1}{\tan B} = 0$$

18. (12 分)

2020 年 5 月 28 日，十三届全国人大三次会议表决通过了《中华人民共和国民法典》，自 2021 年 1 月 1 日起施行。它被称为“社会生活的百科全书”，是中国第一部以法典命名的法律，在法律体系中居于基础性地位，也是市场经济的基本法。某中学培养学生知法懂法，组织全校学生学习《中华人民共和国民法典》并组织知识竞赛。为了解学习的效果，现从高一、高二两个年级中各随机抽取 20 名学生的成绩(单位：分)，绘制成如图所示的茎叶图：

高一							高二						
8	9	8	6	3	6	1	2	6					
9	7	6	5	0	0	7	3	4	5	7	9		
		9	6	1	1	8	0	2	5	7	8	8	
		7	7	1	1	0	9	1	3	3	5	8	9

(1) 通过茎叶图分析哪个年级的学生学习效果更好；(不要求计算，分析并给出结论)

(2) 根据学生的竞赛成绩，将其分为四个等级：

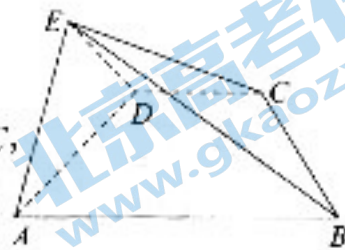
测试成绩(单位：分)	[60, 70)	[70, 80)	[80, 90)	[90, 100)
等级	合格	中等	良好	优秀

①从样本中任取 2 名同学的竞赛成绩，在成绩为优秀的情况下，求这 2 名同学来自同一个年级的概率。

②现从样本中成绩为良好的学生中随机抽取3人座谈，记 $X$ 为抽到高二年级的人数，求 $X$ 的分布列和数学期望。

19. (12分)

如图，在四棱锥 $E-ABCD$ 中，四边形 $ABCD$ 为梯形， $AB \parallel DC$ ， $AB \perp AD$ ， $DE \perp$ 平面 $ADE$ 。



(1) 求证：平面 $ADE \perp$ 平面 $ABCD$ ；

(2) 若 $DC=DE=1$ ， $AB=AD=2$ ，求二面角 $D-BC-E$ 所成角的余弦值。

20. (12分)

已知椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的离心率为 $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ，右焦点为 $F$ ，上顶点为 $A$ ，左顶点为

$B$ ，且 $|FA| \cdot |FB| = 10 + 5\sqrt{2}$ 。

(1) 求椭圆的方程；

(2) 已知 $C(-4, 0)$ ， $D(4, 0)$ ，点 $P$ 在椭圆上，直线 $PC$ ， $PD$ 分别与椭圆交于另一点 $M$ ， $N$ ，若 $\overrightarrow{CP} = \lambda \overrightarrow{CM}$ ， $\overrightarrow{DP} = \mu \overrightarrow{DN}$ ，求证： $\lambda + \mu$ 为定值。

21. (12分)

已知函数 $f(x) = ax^2 - \ln(x-1) + \ln a + 1$ 。

(1) 当 $a=1$ 时，求函数 $f(x)$ 的极值点的个数；

(2) 若 $f(x) \geq 0$ ，求实数 $a$ 的取值范围。

(二) 选考题：共10分。请考生在第22、23题中任选一题作答。如果多做，则按所做的第一题记分。

22. [选修4—4：坐标系与参数方程] (10分)

在平面直角坐标系 $xOy$ 中，已知曲线 $E$ 的参数方程为 $\begin{cases} x = \sqrt{10} \cos \alpha, \\ y = \sqrt{10} \sin \alpha - 4 \end{cases}$  ( $\alpha$ 为参数)，直

线 $l$ 的参数方程为 $\begin{cases} x = t \cos \beta, \\ y = t \sin \beta \end{cases}$  ( $t$ 为参数， $0 \leq \beta < \pi$ )。以坐标原点为极点， $x$ 轴正半轴为极轴

建立极坐标系。

(1) 分别写出曲线 $E$ 和直线 $l$ 的极坐标方程；

(2) 直线 $l$ 与曲线 $E$ 交于 $M$ ， $N$ 两点，若 $ON = 3OM$ ，求直线 $l$ 的斜率。

23. [选修4—5：不等式选讲] (10分)

已知函数 $f(x) = |2x-2| + |2x-1|$ ， $g(x) = |x+1| + |4x-2|$ 。

(1) 求不等式 $f(x) \geq 4$ 的解集；

(2) 若关于 $x$ 的不等式 $2f(x) - g(x) \geq a - |x|$ 恒成立，求实数 $a$ 的取值范围。