

# 数学试卷

2023 年 1 月

本试卷共 4 页,150 分. 考试时长 120 分钟. 考生务必将答案答在答题卡上,在试卷上作答无效. 考试结束后,将试卷和答题卡一并交回.

## 第一部分(选择题 共 40 分)

一、选择题:(本大题共 10 小题,每小题 4 分,共 40 分.)在每小题列出的四个选项中,选出符合题目要求的一项.

1.  $\sin 120^\circ =$

A.  $\frac{1}{2}$

B.  $\frac{\sqrt{3}}{2}$

C.  $-\frac{1}{2}$

D.  $-\frac{\sqrt{3}}{2}$

2. 设  $S = \left\{ \alpha \mid \alpha = k\pi + \frac{\pi}{2}, k \in \mathbf{Z} \right\}$ ,  $S_1 = \left\{ \alpha \mid \alpha = 2k\pi + \frac{\pi}{2}, k \in \mathbf{Z} \right\}$ ,  $S_2 = \left\{ \alpha \mid \alpha = 2k\pi - \frac{\pi}{2}, k \in \mathbf{Z} \right\}$ , 则下列结论错误的是

A.  $S_1 \subseteq S$

B.  $S_2 \subseteq S$

C.  $S_1 \cup S_2 = S$

D.  $S_1 \cap S_2 = S$

3. 已知角  $\alpha$  的顶点在原点,始边与  $x$  轴的非负半轴重合,终边在第三象限且与单位圆交于点

$P\left(-\frac{\sqrt{5}}{5}, m\right)$ , 则  $\sin \alpha =$

A.  $-\frac{\sqrt{5}}{5}$

B.  $\frac{\sqrt{5}}{5}$

C.  $-\frac{2\sqrt{5}}{5}$

D.  $\frac{2\sqrt{5}}{5}$

4. 下列函数是奇函数,且在区间  $(0, 1)$  上单调递增的是

A.  $y = \frac{1}{x}$

B.  $y = \sin x$

C.  $y = \cos x$

D.  $y = \ln x$

5. 将函数  $y = \sin x$  的图象  $C$  向左平移  $\frac{\pi}{6}$  个单位长度得到曲线  $C_1$ , 然后再使曲线  $C_1$  上各点的横坐标变为原来的  $\frac{1}{3}$  得到曲线  $C_2$ , 最后再把曲线  $C_2$  上各点的纵坐标变为原来的 2 倍得到曲线  $C_3$ , 则曲线  $C_3$  对应的函数是

A.  $y = 2\sin\left(3x - \frac{\pi}{6}\right)$

B.  $y = 2\sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right)$

C.  $y = 2\sin\left(3x + \frac{\pi}{6}\right)$

D.  $y = 2\sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right)$

6. “ $\tan\alpha > 0$ ”是“ $\alpha$ 是第一象限角”的

- A. 充分而不必要条件  
B. 必要而不充分条件  
C. 充分必要条件  
D. 既不充分也不必要条件

7. 函数  $y = \log_{0.5} x$  与  $y = \log_2 x$  的图象

- A. 关于  $x$  轴对称  
B. 关于  $y$  轴对称  
C. 关于原点对称  
D. 关于直线  $y = x$  对称

8. 函数  $f(x) = \ln x + 2x - 6$  的零点所在的区间是

- A. (0, 1)                      B. (1, 2)                      C. (2, 3)                      D. (3, 4)

9. 已知  $a = \left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{3}{2}}$ ,  $b = \left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{2}{3}}$ ,  $c = \log_{\frac{2}{3}} \frac{3}{2}$ , 则  $a, b, c$  的大小关系是

- A.  $a < b < c$                       B.  $b < a < c$                       C.  $c < b < a$                       D.  $c < a < b$

10. 中国茶文化博大精深,茶水的口感与茶叶类型和水的温度有关.经验表明,有一种茶用  $85^\circ\text{C}$  的水泡制,再等到茶水温度降至  $55^\circ\text{C}$  时饮用,可以产生最佳口感.某研究人员在室温下,每隔 1min 测量一次茶水温度,得到数据如下:

放置时间/min	0	1	2	3	4	5
茶水温度/ $^\circ\text{C}$	85.00	79.00	73.60	68.74	64.37	60.43

为了描述茶水温度  $y^\circ\text{C}$  与放置时间  $x\text{min}$  的关系,现有以下两种函数模型供选择:

①  $y = ka^x + 25 (k \in \mathbf{R}, 0 < a < 1, x \geq 0)$ , ②  $y = kx + b (k, b \in \mathbf{R}, x \geq 0)$ .

选择最符合实际的函数模型,可求得刚泡好的茶水达到最佳口感所需放置时间大约为

(参考数据:  $\lg 2 \approx 0.301, \lg 3 \approx 0.477$ )

- A. 6min                      B. 6.5min                      C. 7min                      D. 7.5min

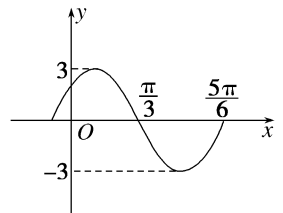
## 第二部分(非选择题 共 110 分)

二、填空题:(本大题共 5 小题,每小题 5 分,共 25 分.)

11. 半径为 1,圆心角为 1 弧度的扇形的面积为\_\_\_\_\_.

12.  $\log_2 \left(\sin \frac{\pi}{12}\right) + \log_2 \left(\cos \frac{\pi}{12}\right) =$ \_\_\_\_\_.

13. 若函数  $y = A \sin(\omega x + \varphi) (\omega > 0, 0 \leq \varphi < \pi)$  的部分图象如图所示,则此函数的解析式为\_\_\_\_\_.



14. 已知  $x^2 + y^2 = 1$ , 则  $x + y$  的最大值为\_\_\_\_\_, 最小值为\_\_\_\_\_.

15. 已知函数  $f(x) = \begin{cases} x^2 + 2x - 3, & x \leq 0, \\ -2 + \ln x, & x > 0, \end{cases}$  若方程  $f(x) = k$  有 3 个实数解, 则实数  $k$  的取值范围是\_\_\_\_\_.

三、解答题:(本大题共 6 小题,共 85 分.)解答应写出文字说明,演算步骤或证明过程.

16.(本小题 13 分)

已知  $\tan\alpha = -\frac{3}{4}$ ,  $\alpha$  是第四象限角.

(I) 求  $\cos\alpha - \sin\alpha$  的值;

(II) 求  $\cos\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right)$ ,  $\tan\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right)$  的值.

17.(本小题 13 分)

已知函数  $f(x) = \tan\left(\frac{1}{2}x + \frac{\pi}{3}\right)$ .

(I) 求函数  $f(x)$  的定义域;

(II) 求函数  $f(x)$  的最小正周期;

(III) 求函数  $f(x)$  的单调区间.

18.(本小题 14 分)

已知函数  $f(x) = A\sin(\omega x + \varphi)$  ( $A > 0, \omega > 0, |\varphi| < \frac{\pi}{2}$ ) 的最小正周期为  $\pi$ .

(I) 求  $\omega$  的值;

(II) 从下面四个条件中选择两个作为已知,求  $f(x)$  的解析式,并求其在区间  $\left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}\right]$  上的最大值和最小值.

条件①:  $f(x)$  的值域是  $[-2, 2]$ ;

条件②:  $f(x)$  在区间  $\left[-\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}\right]$  上单调递增;

条件③:  $f(x)$  的图象经过点  $(0, 1)$ ;

条件④:  $f(x)$  的图象关于直线  $x = -\frac{\pi}{3}$  对称.

注:如果选择多个符合要求的条件分别解答,按第一个解答给分.

19. (本小题 15 分)

已知函数  $f(x) = \ln(1 - \cos 2x) + \cos(x + \theta)$ ,  $\theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right)$ .

(I) 求函数  $f(x)$  的定义域;

(II) 若函数  $f(x)$  为偶函数, 求  $\theta$  的值;

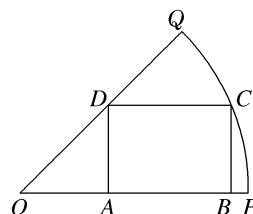
(III) 是否存在  $\theta$ , 使得函数  $f(x)$  是奇函数? 若存在, 求出  $\theta$  的值; 若不存在, 请说明理由.

20. (本小题 15 分)

某一扇形铁皮, 半径长为 1, 圆心角为  $\frac{\pi}{4}$ . 工人师傅想从中剪下一个矩形  $ABCD$ , 如图所示.

(I) 若矩形  $ABCD$  为正方形, 求正方形  $ABCD$  的面积;

(II) 求矩形  $ABCD$  面积的最大值.



21. (本小题 15 分)

已知函数  $f(x) = \lg(ax + 3)$  的零点是  $x = 2$ .

(I) 求实数  $a$  的值;

(II) 判断函数  $f(x)$  的单调性, 并说明理由;

(III) 设  $k > 0$ , 若不等式  $2f(x) > \lg(kx^2)$  在区间  $[-4, -3]$  上有解, 求  $k$  的取值范围.

## 关于我们

北京高考在线创办于 2014 年，隶属于北京太星网络科技有限公司，是北京地区极具影响力的中学升学服务平台。主营业务涵盖：北京新高考、高中生涯规划、志愿填报、强基计划、综合评价招生和学科竞赛等。

北京高考在线旗下拥有网站门户、微信公众平台等全媒体矩阵生态平台。平台活跃用户 40W+，网站年度流量数千万量级。用户群体立足于北京，辐射全国 31 省市。

北京高考在线平台一直秉承 “精益求精、专业严谨” 的建设理念，不断探索 “K12 教育+互联网+大数据” 的运营模式，尝试基于大数据理论为广大中学和家长提供新鲜的高考资讯、专业的高考政策解读、科学的升学规划等，为广大高校、中学和教科研单位提供 “衔接和桥梁纽带” 作用。

平台自创办以来，为众多重点大学发现和推荐优秀生源，和北京近百所中学达成合作关系，累计举办线上线下升学公益讲座数百场，帮助数十万考生顺利通过考入理想大学，在家长、考生、中学和社会各界具有广泛的口碑影响力

未来，北京高考在线平台将立足于北京新高考改革，基于对北京高考政策研究及北京高校资源优势，更好的服务全国高中家长和学生。



微信搜一搜

北京高考资讯