

2020年普通高等学校招生全国统一考试

理科数学

一、选择题：本题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 已知集合 $A = \{(x, y) | x, y \in \mathbb{N}^*, y \geq x\}$ ， $B = \{(x, y) | x + y = 8\}$ ，则 $A \cap B$ 中元素个数为

- A. 2
- B. 3
- C. 4
- D. 6

2. 复数 $\frac{1}{1-3i}$ 的虚部是

- A. $-\frac{3}{10}$
- B. $-\frac{1}{10}$
- C. $\frac{1}{10}$
- D. $\frac{3}{10}$

3. 在一组样本数据中，1, 2, 3, 4 出现的频率分别为 p_1, p_2, p_3, p_4 ，且 $\sum_{i=1}^4 p_i = 1$ ，

则下面四种情形中，对应样本的标准差最大的一组是

- A. $p_1 = p_4 = 0.1, p_2 = p_3 = 0.4$
- B. $p_1 = p_4 = 0.4, p_2 = p_3 = 0.1$
- C. $p_1 = p_4 = 0.2, p_2 = p_3 = 0.3$
- D. $p_1 = p_4 = 0.3, p_2 = p_3 = 0.2$

4. Logistic 模型是常用数学模型之一，可应用于流行病学领域，有学者根据公布数据建立了某地区新冠肺炎累计确诊病列数 $I(t)$ (t 的单位：天) 的 Logistic

模型： $I(t) = \frac{K}{1+e^{-0.23(t-53)}}$ ，其中 K 为的最大确诊病列数. 当 $I(t^*) = 0.95K$ 时，标

志着已初步遏制疫情，则 t^* 约为 ($\ln 19 \approx 3$)

- A. 60
- B. 63
- C. 66
- D. 69

5. 设 O 为坐标原点，直线 $x=2$ 与抛物线 $C: y^2 = 2px (p > 0)$ 交于 D, E 两点，若

$OD \perp OE$ ，则 C 的焦点坐标为

- A. $(\frac{1}{4}, 0)$
- B. $(\frac{1}{2}, 0)$
- C. $(1, 0)$
- D. $(2, 0)$

6. 已知向量 a, b 满足 $|a|=5$ ， $|b|=6$ ， $a \cdot b = -6$ ，则 $\cos(a, a+b) =$

- A. $-\frac{31}{35}$
- B. $-\frac{19}{35}$
- C. $\frac{17}{35}$
- D. $\frac{19}{35}$

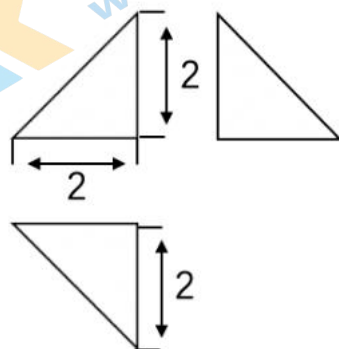
7. 在 $\triangle ABC$ 中， $\cos C = \frac{2}{3}$ ， $AC = 4$ ， $BC = 3$ ，则 $\cos B =$

- A. $\frac{1}{9}$
- B. $\frac{1}{3}$

- C. $\frac{1}{2}$
D. $\frac{2}{3}$

8. 右图为某几何体的三视图，则该几何体的表面积是

- A. $6+4\sqrt{2}$
B. $4+4\sqrt{2}$
C. $6+2\sqrt{3}$
D. $4+2\sqrt{3}$



9. 已知 $2 \tan \theta - \tan(\theta + \frac{\pi}{4}) = 7$ ，则 $\tan \theta =$

- A. -2
B. -1
C. 1
D. 2

10. 若直线 l 与曲线 $y = \sqrt{x}$ 和圆 $x^2 + y^2 = \frac{1}{5}$ 都相切，则 l 的方程为

- A. $y = 2x + 1$
B. $y = 2x + \frac{1}{2}$
C. $y = \frac{1}{2}x + 1$
D. $y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$

11. 设双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的左、右焦点分别为 F_1, F_2 ，离心率为

$\sqrt{5}$. P 是 C 上一点，且 $F_1P \perp F_2P$. 若 $\triangle PF_1F_2$ 的面积为 4，则 $a =$

- A. 1

B. 2

C. 4

D. 8

12. 已知 $5^5 < 8^4$, $13^4 < 8^5$, 设 $a = \log_5 3$, $b = \log_8 5$, $c = \log_{13} 8$, 则

A. $a < b < c$

B. $b < a < c$

C. $b < c < a$

D. $c < a < b$

二、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。

13. 若 x, y 满足约束条件 $\begin{cases} x + y \geq 0 \\ 2x - y \geq 0 \\ x \leq 1 \end{cases}$, 则 $z = 3x + 2y$ 的最大值为_____.

14. $(x^2 + \frac{2}{x})^6$ 的展开式中常数项是_____ (用数字作答).

15. 已知圆锥的底面半径为 1, 母线长为 3, 则该圆锥内半径最大的球的体积为_____.

16. 关于函数 $f(x) = \sin x + \frac{1}{\sin x}$ 有如下四个命题:

① $f(x)$ 的图像关于 y 轴对称.

② $f(x)$ 的图像关于原点对称.

③ $f(x)$ 的图像关于直线 $x = \frac{\pi}{2}$ 对称.

④ $f(x)$ 的最小值为 2.

其中所有真命题的序号是_____.

三、解答题：共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。第 17~21 题为必考题，每个试题考生都必须作答。第 22、23 题为选考题，考生根据要求作答。

(一) 必考题：共 60 分。

17. (12 分)

设数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1 = 3$, $a_{n+1} = 3a_n - 4n$.

(1) 计算 a_2 , a_3 , 猜想 $\{a_n\}$ 的通项公式并加以证明;

(2) 求数列 $\{2^n a_n\}$ 的前 n 项和 S_n .

18. (12 分)

某学生兴趣小组随机调查了某市 100 天中每天的空气质量等级和当天到某公园锻炼的人次, 整理数据得到下表 (单位: 天):

空气质量等级 \ 锻炼人次	[0, 200]	(200, 400]	(400, 600]
1 (优)	2	16	25
2 (良)	5	10	12
3 (轻度污染)	6	7	8
4 (中度污染)	7	2	0

(1) 分别估计该市一天的空气质量等级为 1, 2, 3, 4 的概率;

(2) 求一天中到该公园锻炼的平均人次的估计值 (同一组中的数据用该组区间的中点值为代表);

(3) 若某天的空气质量等级为 1 或 2, 则称这天 “空气质量好”; 若某天的空气质量等级为 3 或 4, 则称这天 “空气质量不好”。根据所给数据, 完成下面的 2×2 列联表, 并根据列联表, 判断是否有 95% 的把握认为一天中到该公园锻炼的人次与该市当天的空气质量有关?

	人次 ≤ 400	人次 > 400
空气质量好		
空气质量不好		

附: $K^2 = \frac{n(ad - bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$, $\frac{P(K^2 \geq k)}{k}$

0.050	0.010	0.001
3.841	6.635	10.828

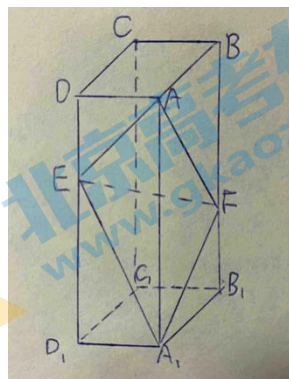
19. (12 分)

如图, 在长方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 中, 点 E, F 分别在棱 DD_1 , BB_1 上, 且 $2DE = ED_1$,

$$BF = 2FB_1.$$

(1) 证明：点 C_1 在平面 AEF 内；

(2) 若 $AB = 2$ ， $AD = 1$ ， $AA_1 = 3$ ，求二面角 $A-EF-A_1$ 的正弦值.



20. (12分)

已知椭圆 $C: \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{m^2} = 1$ ($0 < m < 5$) 的离心率为 $\frac{\sqrt{15}}{4}$ ， A, B 分别为 C 的左、右顶点.

(1) 求 C 的方程；

(2) 若点 P 在 C 上，点 Q 在直线 $x = 6$ 上，且 $|BP| = |BQ|$ ， $BP \perp BQ$ ，求 $\triangle APQ$ 的面积.

21. (12分)

设函数 $f(x) = x^3 + bx + c$ ，曲线 $y = f(x)$ 在点 $(\frac{1}{2}, f(\frac{1}{2}))$ 处的切线与 y 轴垂直，

(1) 求 b ；

(2) 若 $f(x)$ 有一个绝对值不大于 1 的零点，证明： $f(x)$ 所有零点的绝对值都不大于 1.

(二) 选考题：共 10 分，请考生在第 22、23 题中任选一题作答。如果多做，则按所做的第一题计分。

22. [选修 4—4：坐标系与参数方程] (10分)

在直角坐标系 xOy 中，曲线 C 的参数方程为 $\begin{cases} x = 2 - t - t^2 \\ y = 2 - 3t + t^2 \end{cases}$ (t 为参数且 $t \neq 1$)， C

与坐标轴交于 A, B 两点.

(1) 求 $|AB|$ ；

(2) 以坐标原点为极点， x 轴正半轴为极轴建立极坐标系，求直线 AB 的极坐标方程.

23. [选修 4—5: 不等式选讲] (10 分)

设 $a, b, c \in \mathbb{R}$, $a + b + c = 0$, $abc = 1$.

(1) 证明: $ab + bc + ca < 0$;

(2) 用 $\max\{a, b, c\}$ 表示 a, b, c 的最大值, 证明: $\max\{a, b, c\} \geq \sqrt[3]{4}$

北京高考在线
www.gkzox.com

北京高考在线
www.gkzox.com

北京高考在线
www.gkzox.com

北京高考在线
www.gkzox.com

关于我们

北京高考资讯是专注于北京新高考政策、新高考选科规划、志愿填报、名校强基计划、学科竞赛、高中生涯规划的超级升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有北京高考在线网站（www.gaokzx.com）和微信公众平台等媒体矩阵。

目前，北京高考资讯微信公众号拥有30W+活跃用户，用户群体涵盖北京80%以上的重点中学校长、老师、家长及考生，引起众多重点高校的关注。
北京高考在线官方网站：www.gaokzx.com

北京高考资讯 (ID: bj-gaokao)
扫码关注获取更多



关注北京高考在线官方微信：[北京高考资讯 \(ID:bj-gaokao\)](https://www.gaokzx.com)，获取更多试题资料及排名分析信息。