2021 年浙江省数学夏令营测试卷

年级　　姓名　　班级　　学校

线　　订　　装

本试卷全为填空题（1—15 题每题 6 分，16 题 10 分，合计 100 分）

1. 设 $a,b\in\mathbb{R}$，若不等式 $x^2+ax+b>0$ 的解集为 $\{x|x>3,$ 或 $x<-2\}$，则不等式有 $ax^2+bx-a+b>0$ 的解集为__________。

2. 若 $x\in\left(-\frac{\pi}{4},\frac{3}{4}\pi\right)$，则函数 $y=\frac{4\sin x\cos x+3}{\sin x+\cos x}$ 的最小值为________。

3. 已知方程 $x^2+ax+b=0$ 有两个不同的实数根，则 $x^4+ax^3+(b-2)x^2-ax+1=0$ 有__________几个不同的实数根。

4. 设 $a_0,a_1,\cdots,a_n$ 满足 $a_0=1,a_1=4$，且 $\sqrt{a_na_{n-2}}-2\sqrt{a_{n-1}a_{n-2}}=3a_{n-1}$，则数列的通项 $a_n=$____________。

5. 已知函数 $f(x)=x^2+2ax+a$，对任意 $x\in R$，恒有 $f(f(x))>x$．则实数 a 的取值范围是________。

6. 若正方形$ABCD$的一条边在直线$y=x+206$上，另两个顶点在抛物线$y=x^2$上，则该正方形的面积为__________。

7. 在平面直角坐标系 xOy 中，O 为坐标原点，$\overrightarrow{OA}=(2,0)$，$\overrightarrow{OB}=(1,\sqrt{3})$，$\overrightarrow{OC}=(3,\sqrt{3})$，则点集 $\{P\,|\,\overrightarrow{OP}=\lambda_1\overrightarrow{OA}+\lambda_2\overrightarrow{OB}+\lambda_3\overrightarrow{OC},\lambda_1\ge0,\lambda_2\ge0,\lambda_1+\lambda_2+|\lambda_3|=1\}$ 所表示的区域面积为______。

8. 复数 z_1,z_2 满足 $|z_1|=|z_2|=3,|z_1-z_2|=3\sqrt{3}$，则 $\left|(z_1\overline{z_2})^{10}+(z_2\overline{z_1})^{10}\right|=$__________。

9. 在 ΔABC 中，$\angle B=\angle C=30^\circ,AB=2$。若动点 P,Q 分别在 AB,BC 边上，且直线 PQ 把 ΔABC 的面积等分，则线段 $|PQ|$ 的取值范围为________________。

10. 设 $P_0,P_1,\cdots,P_n$ 为曲线 $y=x^3$ 上 $n+1$ 个点，其横坐标为 $x_0,x_1,\cdots,x_n\in[0,1]$，若正常数 C 使得存在 $i,j,|P_IP_J|\le\frac{C}{n}$，则常数 C 的最小值为____________。

11. 已知 $x^2+y^2+z^2=1$，则 $x(x^2-3y^2)+\frac{3}{2}z^2(x+\sqrt{3}y)$ 的最小值为____________。

12. 已知四棱锥 $P-ABCD$ 的底面是平行四边形 $ABCD$，过棱 PC 的中点 M 和点 A 作一平面，分别交棱 PB 和 PD 于点 E 和 F。记四棱锥 $P-ABCD$ 的体积为 V，四棱锥 $P-AEMF$ 的体积为 V_1，则 $\dfrac{V_1}{V}$ 的取值范围是________。

13. 使得 $\dfrac{3a^2+2kab+3b^2}{(k+3)(a+b)}\geq\sqrt{ab}$ 对一切正实数 a,b 恒成立的 k 最大实数为________。

14. 已知集合 $A=\{a_1,a_2,\cdots,a_n\}$，n 为正整数。若对任意的 $1\leq i\neq j\leq n$，a_i-a_j 被 4 整除，但不被 16 整除，则 n 的最大值为________。

15. 已知整数数列 $a_1,a_2,\cdots,a_{10}$，满足 $a_{10}=2a_1$，$a_4+a_8=2a_6$，且 $|a_{k+1}-a_k|=1$ $(k=1,2,\cdots,9)$，则这样的数列个数共有________个。

16. 若 $x_1\ln x_1=x_2\ln x_2, x_1<x_2, k=\dfrac{5}{2}(x_1+x_2+2\sqrt{x_1x_2}), k\in Z$，则 $k=$________。

17. 一条直线上有三个数字 a_1,a_2,a_3，数字 a_2 位于 a_1,a_3 之间，称数值 $|a_1-a_2|+|a_2-a_3|$ 为该直线的邻差值。现将数字 $1\sim9$ 填入 3×3 的格子中，每个数字均出现，过横向三个格子、竖向三个格子及对角线三个格子共形成 8 条直线。则这 8 条直线的邻差值之和的最小值为________，最大值为________。

18. 已知点 $P(3,1)$，存在抛物线 $x^2=4y$ 上相异的两点 A，B，使得四边形 $PAQB$ 为矩形，则点 Q 的轨迹方程是________.

19. 在 $\triangle ABC$ 中，$AB>AC>BC$，在 M,N 为 AB 上两点，且 $AN=AC, BM=BC$，点 P 为 $\triangle ABC$ 的内心。若 $\angle MPN=75^\circ$，则 $\angle ACB=$________。

20. 将顺序为 $1,2,\cdots,2020$ 的 2020 张卡片变成 $1011,1,1012,2,\cdots,2020,1010$ 的顺序，即原先的前 1010 张卡片移至第 $2,4,\cdots,2020$ 张，这称为一次操作。若从顺序 $1,2,\cdots,2020$ 开始操作，则至少经过________次操作可以恢复到初始顺序。

参考答案

1. $-5<x<-1$　　2. $2\sqrt{2}$.　　3. 4　　4. $a_n=\prod_{k=1}^{n}(3^k-1)^2$

5. $1-\dfrac{\sqrt{3}}{2}<a<1+\dfrac{\sqrt{3}}{2}$　　6. $S=2178$或1250.　　7. $4\sqrt{3}$　　8. 3^{20}

9. $[\sqrt{4\sqrt{3}-6},\sqrt{7}]$。　　10. $\sqrt{10}$　　11. -1　　12. $[\dfrac{1}{3},\dfrac{3}{8}]$

13. 9　　14. 4　　15. 192　　16. $k=3$　　17. 36, 76

18. $(x+9)^2-[(\dfrac{x+3}{2})^2-y+5]^2=40$.　　19. 105　　20. 322

1. $3+(-2)=-a$

$3(-2)=b$

$\therefore a=-1,\ b=-6$

$\therefore -x^2-6x-5>0$ 解集为 $(-5,-1)$

2. 设 $\sin x+\cos x=t\in[0,\sqrt{2}]$

$\therefore y=\dfrac{2(t^2-1)+3}{t}=\dfrac{2t^2+1}{t}=2t+\dfrac{1}{t}\geq 2\sqrt{2}$

3. $x^2+ax+b-2+\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{a}{x}=0$

$\therefore \left(x-\dfrac{1}{x}\right)^2+a\left(x-\dfrac{1}{x}\right)+b=0$

因 $x^2+ax+b=0$ 有两个不等根 x_1, x_2

$\therefore$ 原方程有4个不等根.

5. 若存在 x_0，使 $f(x_0)\le x_0$，

则存在 x_1 使 $f(x_1)=x_1$ 即 $f(f(x_1))=x_1$

故对 $\forall x\in R$ $f(x)>x$

$\therefore x^2+(2a-1)x+a>0$

$\Delta=(2a-1)^2-4a<0$

$4a^2-8a+1<0$

$1-\frac{\sqrt{3}}{2}<a<1+\frac{\sqrt{3}}{2}$

6. 设 $y=x+m$

$\therefore x^2-x-m=0$

$\sqrt{\Delta}=\sqrt{1+4m}=|x_1-x_2|$

$\therefore \sqrt{1+4m}\sqrt{2}=\frac{|m-206|}{\sqrt{2}}$

$\therefore 4(4m+1)=m^2+206^2-412m$

即 $m^2-428m+204\times 208=0$

$\therefore m=272$ 或 156

$\therefore S=\left(\frac{|m-206|}{\sqrt{2}}\right)^2=\frac{1}{2}\times 66^2$ 或 $\frac{1}{2}\times 50^2$

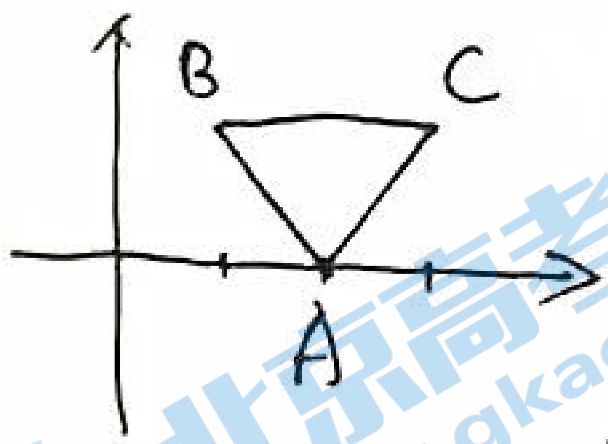
即 $S=2178$ or 1250

7. $\overrightarrow{OP}=\lambda_1(\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{CA})+\lambda_2(\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{CB})+\lambda_3\overrightarrow{OC}$

∴当 $\lambda_3\ge 0$ 即 $\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3=1$ 时

$\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OC}+\lambda_1\overrightarrow{CA}+\lambda_2\overrightarrow{CB}$

∴ $\overrightarrow{CP}=\lambda_1\overrightarrow{CA}+\lambda_2\overrightarrow{CB}$



∵ $\lambda_1,\lambda_2\in[0,1]$ $\lambda_1+\lambda_2=1-\lambda_3$

∴P点轨迹为△ABC内部

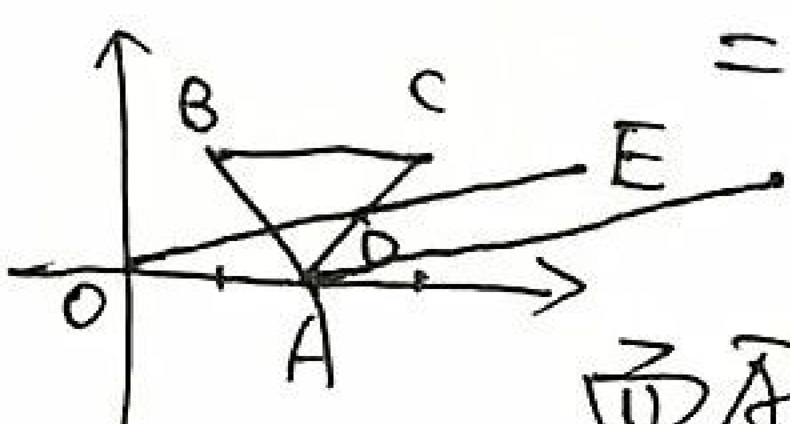
此时 $S=\frac{1}{2}\times2\times2\times\sqrt{3}/2=\sqrt{3}$

当 $\lambda_3<0$ 时 $\overrightarrow{OP}=\lambda_1\overrightarrow{OA}+\lambda_2\overrightarrow{OA}+\lambda_2\overrightarrow{AB}+\lambda_3\overrightarrow{OC}$

∴ $\overrightarrow{OP}=(1+\lambda_3)\overrightarrow{OA}+\lambda_2\overrightarrow{AB}+\lambda_3\overrightarrow{OC}$

∴ $\overrightarrow{AP}=\lambda_2\overrightarrow{AB}+2\lambda_3\overrightarrow{OD}$ （D为AC中点）

$=\lambda_2\overrightarrow{AB}+\lambda_3\overrightarrow{OE}$



$=\lambda_2\overrightarrow{AB}+\lambda_3\overrightarrow{AF}$

而 $\overrightarrow{AF}=\overrightarrow{OE}=2\overrightarrow{OD}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC}=(5,\sqrt{3})$

∴ $|\overrightarrow{AF}|=2\sqrt{7}$

∵ $AB=2$，$BF=BE+2=6$.

∴ $S_{\triangle ABF}=\frac{1}{2}\times2\times6\times\frac{\sqrt{3}}{2}=3\sqrt{3}$.

而 $\overrightarrow{AP}=\lambda_2\overrightarrow{AB}+\lambda_3\overrightarrow{AF}$ 其中 $\lambda_2\ge0$ 且 $\lambda_3<0$

∴P点轨迹区域面积为 $3\sqrt{3}$.

综上 P点轨迹区域面积为 $4\sqrt{3}$

8. $\left|(z_1\cdot\bar{z}_2)^{10}+(\bar{z}_1\cdot z_2)^{10}\right|=\left|z_1^{10}\bar{z}_2^{10}+\bar{z}_1^{10}z_2^{10}\right|$

$$=\left|z_1^{10}\left(\frac{9}{z_2}\right)^{10}+\left(\frac{9}{z_1}\right)^{10}z_2^{10}\right|$$

$$=9^{10}\left|\left(\frac{z_1}{z_2}\right)^{10}+\left(\frac{z_2}{z_1}\right)^{10}\right|$$

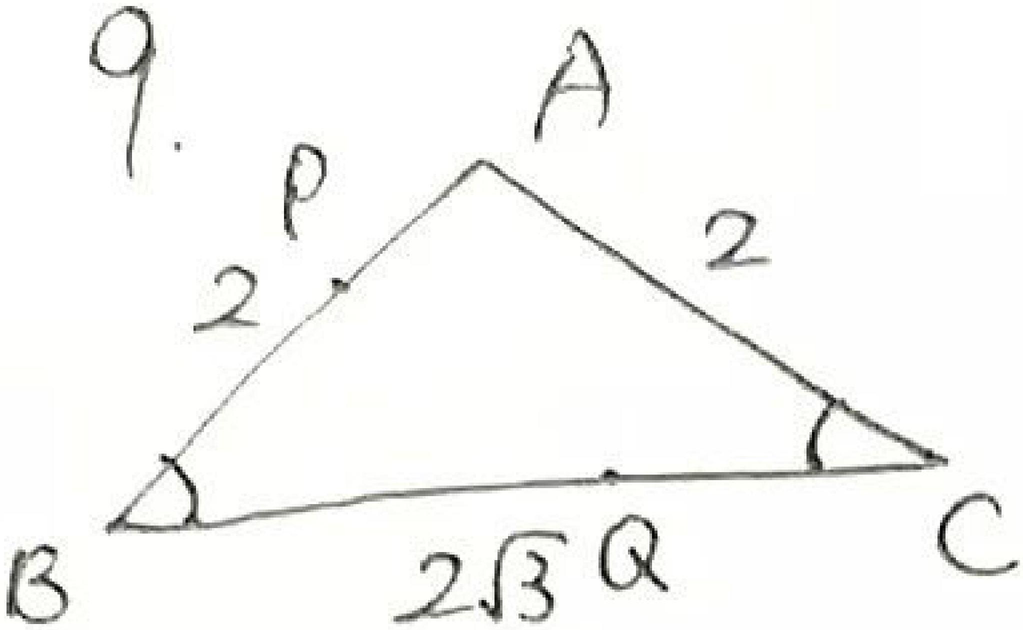
$\because |z_1|=|z_2|=3 \quad |z_1-z_2|=3\sqrt{3}$

$\therefore \frac{z_1}{z_2}=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$ 或 $\frac{z_2}{z_1}=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$

$\therefore$ 原式 $=9^{10}\left|\cos\frac{20}{3}\pi+i\sin\frac{20}{3}\pi+\cos\frac{20}{3}\pi-i\sin\frac{20}{3}\pi\right|$

$$=9^{10}\times2\times\frac{1}{2}=9^{10}$$

9.



设 $BP=x$, $BQ=y$.

$\because \frac{1}{2}\times xy\times\frac{1}{2}=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times 4\times\frac{\sqrt{3}}{2}$

$\therefore xy=2\sqrt{3}$

$\because PQ^2=x^2+y^2-2xy\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}$

$=x^2+y^2-6$

$=x^2+\frac{12}{x^2}-6$

而 $x\in[1,2]$ $\therefore x^2\in[1,4]$

$\therefore 7\geq PQ^2\geq 4\sqrt{3}-6$

$\therefore PQ\in[\sqrt{4\sqrt{3}-6},\sqrt{7}]$

11. $x(x^2-3y^2)+\frac{3}{2}z^2(x+\sqrt{3}y)$

$=(x+\sqrt{3}y)\left(x^2-\sqrt{3}xy+\frac{3}{2}(1-x^2-y^2)\right)$

$=(x+\sqrt{3}y)\left(\frac{3}{2}-\frac{1}{2}x^2-\sqrt{3}xy-\frac{3}{2}y^2\right)$

$=\frac{1}{2}(x+\sqrt{3}y)\left(3-(x+\sqrt{3}y)^2\right)$

令 $t=x+\sqrt{3}y$ 故

原式 $=\frac{1}{2}t(3-t^2)=f(t)$

而 $x^2+y^2=1-z^2\leq 1$

$\therefore 4\geq 4(x^2+y^2)\geq(x+\sqrt{3}y)^2$

$\therefore -2\leq t\leq 2$

易知 $f(t)$ 在 $t=-1$ 时取最小

$\therefore$ 原式 ≥ -1