2022 年深圳市高三年级第二次调研考试

数学　参考答案与评分标准

一、单项选择题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

题号	1	2	3	4	5	6	7	8
答案	C	C	D	A	D	A	B	C

说明与略解：

1. 选择 C．简化形式的一元二次不等式求解，并集意义和区间表示法；亦可特值检验之．

2. 选择 C．两边取模，利用模的性质求解；或设为关于 z 的方程解之；亦可设 z 的代数形式求之．

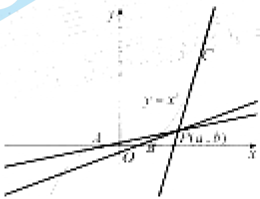
3. 选择 D．逆向利用向量加法的三角形法则（“尾首相接，首尾相连”）和向量的坐标运算性质，$\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=(2,3)-(0,1)+(-3,1)=(-1,3)$；亦可先求点 C 坐标，再得向量 $\overrightarrow{AC}$ 坐标．

4. 选择 A．利用间接法，得样本中服务时长超过 32 小时的个体频率 $=1-4\times(0.005+0.04+0.09)=0.46$，由样本估计总体，得总体中服务时长超过 32 小时的个体数 $=7.2\times0.46=3.312\approx3.3$（万人）；亦可由 $4\times(0.005+0.040+0.090+0.065+a)=1$ 先求得 $a=0.050$，再利用直接法．

5. 选择 D．从极限角度理解 $\frac{1}{3}S_{球}\cdot r=V_{球}$，得 $\frac{1}{3}\times\sqrt{3}V_{球}\cdot r=V_{球}$，所以 $r=\sqrt{3}$；亦可利用球的表面积和体积公式，得 $4\pi r^2=\sqrt{3}\times\frac{4}{3}\pi r^3$，得 $r=\sqrt{3}$．

6. 选择 A．由 $\cos\frac{\pi\omega}{2}=\pm1\ (\omega\neq0)$，$\omega=2k\ (k\in\mathbf{Z},k\neq0)$，得 $f(x)$ 的最小正周期 $T=\frac{2\pi}{|\omega|}=\frac{\pi}{|k|}$，所以 $T_{\max}=\pi$；亦可以通过对 $y=\cos x$ 的图象进行伸缩变换，结合周期性意义，得 $T_{\max}=\pi$．

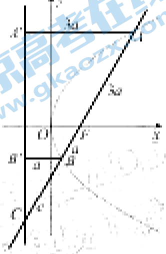
7. 选择 B．如图，作出三次曲线 $y=x^3$，利用其凹凸性和对称性，直观想象得出结论：当点 (a,b) 位于 y 轴右侧时，当且仅当该点在 x 轴、过对称中心的切线上方，且在曲线下方时，过点 (a,b) 可以作曲线的三条切线，即 $0<b<a^3$；亦可设切线方程为 $y=k(x-a)+b$，



切点为 (x_0,x_0^3)，由 $\begin{cases}k(x_0-a)+b=x_0^3,\\k=3x_0^2\end{cases}$ 消去 k 整理，得 $2x_0^3-3ax_0^2+b=0$．令 $g(x)=2x^3-3ax^2+b$，则 $g'(x)=6x(x-a)$，容易知 $g(x)$ 的单调性及 $[g(x)]_{极大值}=g(0)=b>0$，$[g(x)]_{极小值}=g(a)=b-a^3<0$．所以有三条切线 $\Leftrightarrow 0<b<a^3$．

8. 选择 C．如图，设直线 l 交抛物线的准线于点 C，过点 A、B 分别作准线的垂线，垂足为 A'、B'．记 $|FB|=a$，$|BC|=c$．因为 $|FA|=3|FB|$，利用抛物线的定义，由相似三角形“A 字型图”，

得 $\dfrac{c}{c+4a}=\dfrac{a}{3a}=\dfrac{1}{3}$，$c=2a$，$\angle CBB'=60^\circ$，结合对称性，得直线 l 的倾斜角为 60° 或 120°；



亦可以设 l 方程为 $x=my+\dfrac{p}{2}$，$A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，由 $\begin{cases}x=my+\dfrac{p}{2},\\ y^2=2px,\end{cases}$

得 $y^2-2pmy-p^2=0$，$\begin{cases}y_1+y_2=2pm,\\ y_1y_2=-p^2.\end{cases}$ 而 $|FA|=3|FB|\Rightarrow y_1=-3y_2$，

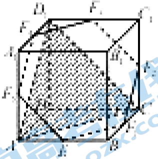
所以 $\begin{cases}y_1+y_2=-2y_2,\\ y_1y_2=-3y_2^2.\end{cases}$ $3(y_1+y_2)^2+4y_1y_2=0$，$12p^2m^2-4p^2=0$，

$m=\pm\dfrac{\sqrt{3}}{3}$，直线 l 的斜率 $k=\pm\sqrt{3}$，倾斜角等于 60° 或 120°。

二、多项选择题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求。全部选对的得 5 分，部分选对的得 2 分，有选错的得 0 分。

题号	9	10	11	12
答案	ACD	ACD	AD	ACD

说明与略解：



9．选择 ACD．因为点 $E\notin$ 平面 ACD_1，所以过点 E 且与平面 ACD_1 平行的平面存在且唯一，设这个平面为 α，因为 $EF\,//$ 平面 ACD_1，所以直线 $EF\subset\alpha$，利用两个平面平行的性质定理，容易证明：平面 α 截正方体所得的截面是正六边形 $EF_1F_2F_3F_4F_5$，其中 F_1,F_2,F_3,F_4,F_5 分别是棱 $BC,CC_1,C_1D_1,D_1A_1,A_1A$ 的中点；亦可利用线面平行的判定定理证明。

10．选择 ACD．$f(x)=P(X\le x)$ 是标准正态分布的概率分布函数，由标准正态曲线的性质，易知：若 $x>0$，则 $f(-x)=P(X\le -x)=P(X\ge x)$，$f(-x)+f(x)=P(X\ge x)+P(X\le x)=1$，A 正确；

因为 $x>0$ 时，$f(x)=P(X\le x)>\dfrac{1}{2}$，$f(2x)=2f(x)>1$ 与 $f(2x)<1$ 矛盾，B 不正确；

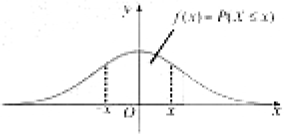
因为 $f(x)$ 是 R 上的增函数，所以 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上是增函数，C 正确；

若 $x>0$，则 $P(|X|\le x)=P(-x\le X\le x)$

$=2\left[\dfrac{1}{2}-P(X\le -x)\right]$

$=1-2f(-x)$

$=2f(x)-1$，D 正确。



11．选择 AD．分别取 $x=0$，$x=1$ 和 $x=-1$，可以得到 $a_0=2^8$，A 正确；$a_1+a_2+a_3+\cdots+a_8=1-2^8$，B 不正确；$|a_1|+|a_2|+|a_3|+\cdots+|a_8|=3^8-2^8$，C 不正确；在等式 $(2-x)^8=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_8x^8$ 两边对 x 求导后，再取 $x=1$，得 $a_1+2a_2+3a_3+\cdots+8a_8=-8$，D 正确。

12．选择 ACD．利用平几知 $AB=2\sqrt{1-\dfrac{1}{|OP|^2}}$，$\sin\dfrac{\angle APB}{2}=\dfrac{1}{|OP|}$，由 $|OP|$ 的取值范围是 $[2,+\infty)$，

的方程 $x+2y=1$，所以直线 AB 过定点 $M(0,\frac{1}{2})$，C 正确；结合垂径定理和圆的定义可得 AB 中点在以线段 OM 为直径的定圆上，D 正确。

三、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。

13. $-\frac{4}{5}$　　14. 9　　15. $\frac{1}{2}$　　16. π，4π

说明与略解：

13. 填 $-\frac{4}{5}$．利用二倍角余弦公式，得 $\cos 2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha=\frac{\cos^2\alpha-\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha+\sin^2\alpha}=\frac{1-\tan^2\alpha}{1+\tan^2\alpha}$；亦可以直接利用万能公式．

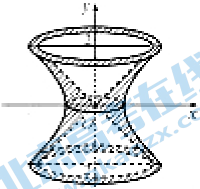
14. 填 9．由 $0<x<1$，得 $\frac{1}{x}+\frac{4}{1-x}=\left(\frac{1}{x}+\frac{4}{1-x}\right)[x+(1-x)]=5+\frac{1-x}{x}+\frac{4x}{1-x}\ge 5+2\sqrt{\frac{1-x}{x}\cdot\frac{4x}{1-x}}=9$；

亦可以构造函数，利用导数研究单调性再求出最小值．

15. 填 $\frac{1}{2}$．易知 $f(x)$ 是偶函数的一个必要条件是 $f(-1)=f(1)$，$\ln\left(\frac{1}{e}+1\right)+k=\ln(e+1)-k$，$k=\frac{1}{2}$．

容易验证 $k=\frac{1}{2}$ 时，$f(x)=\ln(e^{\frac{x}{2}}+e^{-\frac{x}{2}})$ 是偶函数（充分性）；亦可以利用恒等式 $f(-x)=f(x)$，

化简得恒等式 $2kx=x$，所以 $k=\frac{1}{2}$．



16. 填 π，4π．直线 $y=t\,(-2\le t\le 2)$ 与双曲线 $x^2-y^2=1$ 的交点

坐标为 $(\pm\sqrt{1+t^2},t)$，与渐近线 $y=\pm x$ 的交点坐标为 $(\pm t,t)$．

图形 G 被直线 $y=t\,(-2\le t\le 2)$ 所截得的两条线段与 y 轴垂直，

它们分别是 $y=t\,(-\sqrt{1+t^2}\le x\le -|t|,\ -2\le t\le 2)$，

$y=t\,(|t|\le x\le \sqrt{1+t^2},\ -2\le t\le 2)$．

将它们绕 y 轴旋转一周，形成的旋转面是一个由圆心在 $(0,t)$，

半径分别为 $|t|$ 和 $\sqrt{1+t^2}$ 的两个圆围成的圆环，其面积 $S=\pi(\sqrt{1+t^2})^2-\pi t^2=\pi$．

由于 S 是与 $t\ (-2\le t\le 2)$ 无关的常数 π，根据祖暅原理，构造一个底面积为 π，高为 4 的柱体，

则该柱体的体积与图形 G 绕 y 轴旋转一周，形成的旋转体的体积相等，即 $V=4\pi$．

四、解答题：本题共 6 小题，共 70 分，解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17. 解：（1）因为 $S_n=2a_n-3$，所以 $a_{n+1}=S_{n+1}-S_n=(2a_{n+1}-3)-(2a_n-3)$，　　……………………2 分

整理，得 $a_{n+1}=2a_n$，$n\in \mathbf{N}^*$．

又 $a_1=S_1=2a_1-3$，$a_1=3$．　　……………………4 分

所以，数列 $\{a_n\}$ 是首项为 3，公比为 2 的等比数列．

$\{a_n\}$ 的通项公式为 $a_n=3\times 2^{n-1}$，$n\in \mathbf{N}^*$．　　……………………5 分

（2）由（1）知：数列 $\{\frac{1}{a_n}\}$ 是首项为 $\frac{1}{3}$，公比为 $\frac{1}{2}$ 的等比数列．

$\therefore \frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_n}=\frac{2}{3}(1-\frac{1}{2^n})<\frac{13}{20}$. ……………………7 分

整理，得 $2^n<40$，又 $n\in N^*$，$\therefore n=1,2,3,4,5$． ……………………9 分

所以，满足条件的最大整数 $n=5$． ……………………10 分

18．证明：(1)（法 1）∵ $a+c=2b\cos A$，根据正弦定理，得 $\sin A+\sin C=2\sin B\cos A$， ……2 分

$\therefore \sin A=2\sin B\cos A-\sin(A+B)=2\sin B\cos A-(\sin A\cos B+\cos A\sin B)$

$=\sin B\cos A-\cos B\sin A=\sin(B-A)$． ……………………4 分

而 $0<A<\pi$，$-\pi<B-A<\pi$，

$\therefore A+(B-A)=\pi$ 或 $A=B-A$，即 $B=\pi$（舍去）或 $B=2A$．

所以 $B=2A$． ……………………6 分

（法 2）∵ $a+c=2b\cos A$，根据余弦定理，得 $a+c=2b\cdot\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$， ……………………2 分

$\therefore b^2=a^2+ac$．

$\therefore \cos B=\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}=\frac{a^2+c^2-(a^2+ac)}{2ac}=\frac{c-a}{2a}$，

$\cos 2A=2\cos^2 A-1=2\left(\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}\right)^2-1$

$=\frac{[(a^2+ac)+c^2-a^2]^2}{2(a^2+ac)c^2}-1=\frac{a+c}{2a}-1=\frac{c-a}{2a}$．

从而 $\cos B=\cos 2A$， ……………………4 分

又 $0<B<\pi$，$\cos A=\frac{a+c}{2b}>0$，$0<A<\frac{\pi}{2}$，$0<2A<\pi$，

所以 $B=2A$． ……………………6 分

解：(2)（法 1）∵ $a=4$，$b=6$，又由(1)知 $B=2A$，

根据正弦定理，得 $\frac{4}{\sin A}=\frac{6}{\sin 2A}$，$\frac{4}{\sin A}=\frac{6}{2\sin A\cos A}$， ……………………8 分

$\therefore \cos A=\frac{3}{4}$，$\sin A=\sqrt{1-\cos^2 A}=\sqrt{1-\left(\frac{3}{4}\right)^2}=\frac{\sqrt{7}}{4}$，

$\cos B=\cos 2A=2\cos^2 A-1=2\left(\frac{3}{4}\right)^2-1=\frac{1}{8}$，$\sin B=\sqrt{1-\cos^2 B}=\sqrt{1-\left(\frac{1}{8}\right)^2}=\frac{3\sqrt{7}}{8}$．

$\therefore \sin C=\sin(A+B)=\sin A\cos B+\cos A\sin B=\frac{\sqrt{7}}{4}\times\frac{1}{8}+\frac{3}{4}\times\frac{3\sqrt{7}}{8}=\frac{5\sqrt{7}}{16}$． ……………………10 分

所以，$\triangle ABC$ 的面积 $S=\frac{1}{2}ab\sin C=\frac{1}{2}\times 4\times 6\times\frac{5\sqrt{7}}{16}=\frac{15\sqrt{7}}{4}$． ……………………12 分

（法 2）∵ $a+c=2b\cos A$，根据余弦定理，得 $a+c=2b\cdot\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$，$\therefore b^2=a^2+ac$．

将 $a=4$，$b=6$ 代入，得 $6^2=4^2+4c$，$\therefore c=5$． ……………………8 分

$\cos C=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}=\frac{4^2+6^2-5^2}{2\times4\times6}=\frac{9}{16}$，

$\sin C=\sqrt{1-\cos^2 C}=\sqrt{1-\left(\dfrac{9}{16}\right)^2}=\dfrac{5\sqrt{7}}{16}$. ……………………10 分

所以，$\triangle ABC$ 的面积 $S=\dfrac{1}{2}ab\sin C=\dfrac{1}{2}\times 4\times 6\times\dfrac{5\sqrt{7}}{16}=\dfrac{15\sqrt{7}}{4}$. ……………………12 分

说明：若它解法，其他给分.

19. 证明：（1）$\because AM\perp$ 平面 PCD，$CD\subset$ 平面 PCD，$\therefore AM\perp CD$. ……………………2 分

又底面 $ABCD$ 为正方形，$\therefore CD\perp AD$.

又 $CD\perp AM$，$CD\perp AD$，$AM\cap AD=A$，$AM\subset$ 平面 PAD，$AD\subset$ 平面 PAD

$\therefore CD\perp$ 平面 PAD，

又 $CD\subset$ 平面 $ABCD$ ……………………4 分

$\therefore$ 平面 $PAD\perp$ 平面 $ABCD$. ……………………6 分

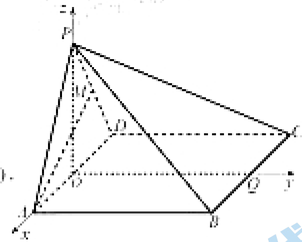
解：（2）（法 1）设正方形 $ABCD$ 的边长为 $2a$，

取 AD 的 O，BC 的中点 Q，

由（1）知 OA,OQ,OP 两两垂直，

以 O 为原点，OA,OQ,OP 分别为 x 轴，y 轴，z 轴，

建立空间直角坐标系 $O-xyz$（如图），则



$A(a,0,0)$，$B(a,2a,0)$，$C(-a,2a,0)$，$D(-a,0,0)$，

$P(0,0,\sqrt{3}a)$，$M(-\dfrac{1}{2}a,0,\dfrac{\sqrt{3}}{2}a)$.

$\overrightarrow{AM}=(-\dfrac{3}{2}a,0,\dfrac{\sqrt{3}}{2}a)$，$\overrightarrow{PB}=(a,2a,-\sqrt{3}a)$，$\overrightarrow{PC}=(-a,2a,-\sqrt{3}a)$. ……………………8 分

设平面 PBC 的法向量 $\boldsymbol{n}=(x,y,z)$，则 $\overrightarrow{PB}\cdot\boldsymbol{n}=0$，$\overrightarrow{PC}\cdot\boldsymbol{n}=0$.

$\therefore\begin{cases}ax+2ay-\sqrt{3}az=0,\\-ax+2ay-\sqrt{3}az=0.\end{cases}$ 取 $z=2$，得 $x=0$，$y=\sqrt{3}$.

平面 PBC 的一个法向量为 $\boldsymbol{n}=(0,\sqrt{3},2)$. ……………………10 分

记 AM 与平面 PBC 所成的角为 θ，则

$$\sin\theta=|\cos\langle\overrightarrow{AM},\boldsymbol{n}\rangle|=\frac{|\overrightarrow{AM}\cdot\boldsymbol{n}|}{|\overrightarrow{AM}||\boldsymbol{n}|}=\frac{\left|-\frac{3}{2}\times 0+0\times\sqrt{3}+\frac{\sqrt{3}}{2}\times 2\right|}{\sqrt{\left(-\frac{3}{2}\right)^2+0^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}\times\sqrt{0^2+(\sqrt{3})^2+2^2}}=\frac{\sqrt{7}}{7}.$$

所以 AM 与平面 PBC 所成角的正弦值为 $\dfrac{\sqrt{7}}{7}$. ……………………12 分

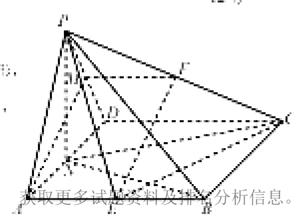
（法 2）分别取 AB,PC,AD 的中点 E,F,N，

连结 EF,EC,FM,PN，$\because M$ 是 PD 中点，$ABCD$ 是正方形，

$\therefore MF\parallel DC$，且 $MF=\dfrac{1}{2}DC$，又 $AE\parallel DC$，且 $AE=\dfrac{1}{2}DC$，

$\therefore MF\parallel AE$，且 $MF=AE$，从而 $AEFM$ 为平行四边形，

$\therefore EF\parallel AM$.



∴ AM 与平面 PBC 所成角与 EF 与平面 PBC 所成角相等.

……………………8 分

∵侧面 PAD 是正三角形，N 是 AD 中点，∴ $PN\perp AD$.

而平面 $PAD\perp$ 平面 $ABCD$ ，∴ $PN\perp$ 平面 $ABCD$.

设正方形 $ABCD$ 的边长为 $2a$ ，三棱锥 $E-PBC$ 的高为 h ，

则 $PN=\sqrt{3}a$ ，$BN=CN=\sqrt{5}a$ ，$PB=PC=2\sqrt{2}a$ ，$S_{\triangle EBC}=a^2$ ，$S_{\triangle PBC}=\sqrt{7}a^2$.

由 $V_{E-PBC}=V_{P-EBC}$ ，得 $\frac{1}{3}S_{\triangle PBC}\cdot h=\frac{1}{3}S_{\triangle EBC}\cdot PN$ ，$\sqrt{7}a^2h=a^2\cdot\sqrt{3}a$ ，

∴ $h=\frac{\sqrt{21}}{7}a$.　　……………………10 分

又 $EF=\sqrt{3}a$ ，记 EF 与平面 PBC 所成的角为 θ ，则 $\sin\theta=\frac{h}{EF}=\frac{\sqrt{21}}{7}a\times\frac{1}{\sqrt{3}a}=\frac{\sqrt{7}}{7}$

所以 AM 与平面 PBC 所成角的正弦值为 $\frac{\sqrt{7}}{7}$.　　……………………12 分

20. **解：**（1）第一场比赛，业余队安排乙与甲进行比赛，业余队获胜的概率为

$$P_1=\frac{1}{3}\times p+\frac{2}{3}\times p\times\frac{1}{3}=\frac{5}{9}p;$$ ……………………2 分

第一场比赛，业余队安排丙与甲进行比赛，业余队获胜的概率为

$$P_2=p\times\frac{1}{3}+(1-p)\times\frac{1}{3}\times p=-\frac{1}{3}p^2+\frac{2}{3}p.$$ ……………………4 分

∵ $p>\frac{1}{3}$ ，∴ $P_1-P_2=\frac{1}{3}p^2-\frac{1}{9}p=\frac{1}{3}p(p-\frac{1}{3})>0$ ，$P_1>P_2$.

所以，业余队第一场应该安排乙与甲进行比赛.　　……………………5 分

（2）由已知 $X=4.5$ 万元，或 $X=3.6$ 万元.　　……………………7 分

由（1）知，业余队最优决策是第一场应该安排乙与甲进行比赛.

此时，（法 1）业余队获胜的概率为 $P_1=\frac{5}{9}p$ ，

专业队获胜的概率为 $P_3=\frac{2}{3}\times(1-p)+\frac{1}{3}\times(1-p)\times\frac{2}{3}=\frac{8}{9}-\frac{8}{9}p$ ，

所以，非平局的概率为 $P(X=4.5)=P_1+P_3=\frac{8}{9}-\frac{1}{3}p$ ，

平局的概率为 $P(X=3.6)=1-P_1-P_3=\frac{1}{9}+\frac{1}{3}p$.　　……………………9 分

（法 2）平局的概率为 $P(X=3.6)=\frac{1}{3}(1-p)\times\frac{1}{3}+\frac{2}{3}p\times\frac{2}{3}=\frac{1}{9}+\frac{1}{3}p$ ，

非平局的概率为 $P(X=4.5)=1-P(X=3.6)=1-\left(\frac{1}{9}+\frac{1}{3}p\right)=\frac{8}{9}-\frac{1}{3}p$.　　……………………9 分

X 的分布列为：

X	4.5	3.6
$P(X)$	$\frac{8}{9}-\frac{1}{3}p$	$\frac{1}{9}+\frac{1}{3}p$

X 的数学期望为 $E(X)=4.5\times(\frac{8}{9}-\frac{1}{3}p)+3.6\times(\frac{1}{9}+\frac{1}{3}p)=4.4-0.3p$（万元）. ……………11分

由 $\frac{1}{3}<p<\frac{1}{2}$，所以 $E(X)$ 的取值范围为 $(4.25,4.3)$（单位：万元）. ……………………12分

21. 解：（Ⅰ）（法1）根据已知，得 $\begin{cases}\frac{1}{a^2}+\frac{3}{4b^2}=1,\\ a^2-b^2=3.\end{cases}$ ……………………2分

解之，得 $a^2=4$，$b^2=1$. ……………………4分

所以，椭圆 E 的方程为 $\frac{x^2}{4}+y^2=1$. ……………………5分

（法2）由已知，$c=\sqrt{3}$，两个焦点的坐标为 $F_1(-\sqrt{3},0)$，$F_2(\sqrt{3},0)$. ……………………1分

根据椭圆定义，得 $2a=|MF_1|+|MF_2|=\sqrt{(1+\sqrt{3})^2+\frac{3}{4}}+\sqrt{(1-\sqrt{3})^2+\frac{3}{4}}$

$=\frac{4+\sqrt{3}}{2}+\frac{4-\sqrt{3}}{2}=4$，∴ $a=2$. ……………………3分

∴ $b=\sqrt{a^2-c^2}=\sqrt{2^2-(\sqrt{3})^2}=1$. ……………………4分

所以，椭圆 E 的方程为 $\frac{x^2}{4}+y^2=1$. ……………………5分

（Ⅱ）选择条件①：

（法1）$N(1,t)$，$t\in\mathbf{R}$，$t\neq\pm\frac{\sqrt{3}}{2}$，由（Ⅰ），不妨设 $A(-2,0)$，$B(2,0)$，则

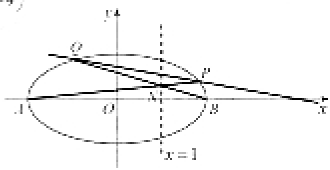
直线 NA 的方程为 $y=\frac{t}{3}(x+2)$，直线 NB 的方程为 $y=-t(x-2)$. ……………………6分

由 $\begin{cases}y=\frac{t}{3}(x+2),\\ \frac{x^2}{4}+y^2=1.\end{cases}$，得 $(4t^2+9)x^2+16t^2x+16t^2-36=0$. ……………………7分

显然 $x_1=-2$ 是上述方程的一个根，点 P 的横坐标为 $x_2=-\frac{1}{2}\times\frac{16t^2-36}{4t^2+9}=\frac{-8t^2+18}{4t^2+9}$，

相应的 $y_2=\frac{12t}{4t^2+9}$，∴点 $P\left(\frac{-8t^2+18}{4t^2+9},\frac{12t}{4t^2+9}\right)$. ……………………8分

同理，得 $Q\left(\frac{8t^2-2}{4t^2+1},\frac{4t}{4t^2+1}\right)$. ……………9分



当 $t=0$ 时，$P(2,0)$，$Q(-2,0)$，直线 PQ 为 x 轴；

当 $t\neq0$，$t\neq\pm\frac{\sqrt{3}}{2}$ 时，

直线 PQ 的方程为 $\dfrac{y-\frac{4t}{4t^2+1}}{\frac{12t}{4t^2+9}-\frac{4t}{4t^2+1}}=\dfrac{x-\frac{8t^2-2}{4t^2+1}}{\frac{-8t^2+18}{4t^2+9}-\frac{8t^2-2}{4t^2+1}}$. ……………………10分

考虑到椭圆的对称性，令 $y=0$，则上述方程的左边 $=\frac{-4t^2-9}{3(4t^2+1)-(4t^2+9)}=-\frac{4t^2+9}{2(4t^2-3)}$，

所以 $x=\frac{8t^2-2}{4t^2+1}+\frac{4t^2+9}{2(4t^2-3)}\times\frac{4(4t^2+3)(4t^2-3)}{(4t^2+9)(4t^2+1)}=4$（与 t 无关）

综上所述，直线 PQ 经过定点 $(4,0)$. ……………………12分

（法2）$N(1,t)$，t 为变量，$t\neq\pm\frac{\sqrt{3}}{2}$. 当 $t=0$ 时，$P(2,0)$，$Q(-2,0)$，直线 PQ 为 x 轴，

故直线 PQ 经过的定点应在 x 轴上. ……………………6分

又 $t\to\frac{\sqrt{3}}{2}$ 时，直线 $PQ\to$ 椭圆 $E:\frac{x^2}{4}+y^2=1$ 在点 $M\left(1,\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ 处的切线 $l:x+2\sqrt{3}y-4=0$，

直线 PQ 经过的定点应是切线 l 与 x 轴的交点 $(4,0)$. ……………………7分

说明：亦可以通过另一特殊位置（比如 $t=1$）分析出定点 $(4,0)$.

证明如下：

由（1），不妨设 $A(-2,0)$，$B(2,0)$，$P(x_1,y_1)$，$Q(x_2,y_2)$.

设直线 PQ 的方程为 $x=my+4$，由 $\begin{cases}x=my+4,\\ x^2+4y^2=4\end{cases}$ 消去 x，

得 P,Q 的纵坐标是方程 $(m^2+4)y^2+8my+12=0$ 的两个根.

由韦达定理，知 $y_1+y_2=-\frac{8m}{m^2+4}$，$y_1y_2=\frac{12}{m^2+4}$. ……………………8分

又直线 AP 的方程为 $y=\frac{y_1}{x_1+2}(x+2)$，直线 BQ 的方程为 $y=\frac{y_2}{x_2-2}(x-2)$，

故直线 AP 与直线 BQ 的交点坐标是方程组 $\begin{cases}y=\frac{y_1}{x_1+2}(x+2),\\ y=\frac{y_2}{x_2-2}(x-2)\end{cases}$ 的解. ……………………9分

消去 y，得直线 AP 与直线 BQ 的交点横坐标是方程 $\frac{y_1}{x_1+2}(x+2)=\frac{y_2}{x_2-2}(x-2)$ 的根.

由动点 N 的横坐标 $x=1$，所以要证明结论成立，只需证明 $x=1$ 是上述方程的根.

即证明 $\frac{3y_1}{x_1+2}+\frac{y_2}{x_2-2}=0$，即证明 $3y_1(x_2-2)+y_2(x_1+2)=0$. ……………………10分

将 $x_1=my_1+4$，$x_2=my_2+4$ 代入，只需证明 $3y_1(my_2+2)+y_2(my_1+6)=0$，

只需证明 $2my_1y_2+3(y_1+y_2)=0$.

而 $2my_1y_2+3(y_1+y_2)=2m\times\frac{12}{m^2+4}+3\times\left(-\frac{8m}{m^2+4}\right)=0$ 成立，

故直线 AP 与直线 BQ 的交点的横坐标为1.

综上所述，直线 PQ 经过定点 $(4,0)$. ……………………12分

选择条件②：

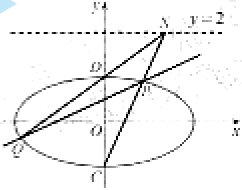
（法1）$N(s,2)$，s 为变量. 由（1），不妨设 $C(0,-1)$，$D(0,1)$，则

直线 NC 的方程为 $3x-sy-s=0$，直线 ND 的方程为 $x-sy+s=0$. ……………………6分

由$\begin{cases}3x-sy-s=0,\\ \dfrac{x^2}{4}+y^2=1,\end{cases}$ 得$(s^2+36)y^2+2s^2y+s^2-36=0$. ……………………7分

故$y_1=-1$，$y_2=-\dfrac{s^2-36}{s^2+36}$，相应的$x_1=0$，$x_2=\dfrac{24s}{s^2+36}$．故$P\left(\dfrac{24s}{s^2+36},-\dfrac{s^2-36}{s^2+36}\right)$．…8分

同理，得$Q\left(\dfrac{-8s}{s^2+4},\dfrac{s^2-4}{s^2+4}\right)$． ……………………9分



当$s=0$时，$P(0,1)$，$Q(0,-1)$，直线PQ为y轴；

当$s\neq 0$时，直线PQ的方程为

$$y-\frac{s^2-4}{s^2+4}=\frac{-\dfrac{s^2-36}{s^2+36}-\dfrac{s^2-4}{s^2+4}}{\dfrac{24s}{s^2+36}+\dfrac{8s}{s^2+4}}\left(x+\frac{8s}{s^2+4}\right).$$ ………10分

考虑到椭圆的对称性，令$x=0$，则

$$y=\frac{s^2-4}{s^2+4}+\frac{-\dfrac{s^2-36}{s^2+36}-\dfrac{s^2-4}{s^2+4}}{\dfrac{3\times 8s}{s^2+36}+\dfrac{8s}{s^2+4}}\cdot\frac{8s}{s^2+4}=\frac{s^2-4}{s^2+4}-\frac{(s^2-36)(s^2+4)+(s^2-4)(s^2+36)}{3(s^2+4)+(s^2+36)}\cdot\frac{1}{s^2+4}$$

$$=\frac{s^2-4}{s^2+4}-\frac{2(s^2+12)(s^2-12)}{4(s^2+12)}\cdot\frac{1}{s^2+4}=\frac{1}{2}$$（与s无关）

综上所述，直线PQ经过定点$\left(0,\dfrac{1}{2}\right)$． ……………………12分

（法2）$N(s,2)$，s为变量．当$s=0$时，$P(0,1)$，$Q(0,-1)$，直线PQ为y轴．

故直线PQ经过的定点应在y轴上．

又取$s=2$，代入上（法1），得$P\left(\dfrac{6}{5},\dfrac{4}{5}\right)$，$Q(-2,0)$，直线$PQ$的方程为$x-4y+2=0$．

令$x=0$，得$y=\dfrac{1}{2}$．直线PQ经过的定点应是$\left(0,\dfrac{1}{2}\right)$． ……………………7分

说明：亦可以通过另一类特殊位置（如取$s=-2$）分析出定点$\left(0,\dfrac{1}{2}\right)$．

证明如下：

由（1），不妨设$C(0,-1)$，$D(0,1)$，$P(x_1,y_1)$，$Q(x_2,y_2)$．

设直线PQ的方程为$y=kx+\dfrac{1}{2}$，由$\begin{cases}y=kx+\dfrac{1}{2},\\ x^2+4y^2=4\end{cases}$ 消去y，得

P，Q的横坐标是方程$(1+4k^2)x^2+4kx-3=0$的两个根．

由韦达定理，知$x_1+x_2=-\dfrac{4k}{1+4k^2}$，$x_1x_2=-\dfrac{3}{1+4k^2}$． ……………………8分

又直线CP的方程为$y=\dfrac{y_1+1}{x_1}x-1$，直线DQ的方程为$y=\dfrac{y_2-1}{x_2}x+1$．

∴直线 CP 与直线 DQ 的交点坐标是方程组 $\begin{cases} y=\dfrac{y_1+1}{x_1}x-1, \\ y=\dfrac{y_2-1}{x_2}x+1 \end{cases}$ 的解． ……………………9分

消去 x，得直线 CP 与直线 DQ 的交点纵坐标是方程 $\dfrac{y_1+1}{x_1}(y-1)=\dfrac{y_2-1}{x_2}(y+1)$ 的根，

而动点 N 的纵坐标 $y=2$，所以要证原命题成立，只需证明 $y=2$ 是上述方程的根，

即证明 $\dfrac{y_1+1}{x_1}=3\times\dfrac{y_2-1}{x_2}$，即证明 $3x_1(y_2-1)-x_2(y_1+1)=0$． ……………………10分

将 $y_1=kx_1+\dfrac{1}{2}$，$y_2=kx_2+\dfrac{1}{2}$ 代入，只需证明 $3x_1\left(kx_2-\dfrac{1}{2}\right)-x_2\left(kx_1+\dfrac{3}{2}\right)=0$，

只需证明 $4kx_1x_2-3(x_1+x_2)=0$，

而 $4kx_1x_2-3(x_1+x_2)=4k\left(-\dfrac{3}{1+4k^2}\right)-3\left(-\dfrac{4k}{1+4k^2}\right)=0$ 成立，

∴直线 AP 与直线 BQ 的交点的纵坐标为 2．

综上所述，直线 PQ 经过定点 $\left(0,\dfrac{1}{2}\right)$． ……………………12分

22．**解**：（1）由已知，得 $f'(x)=e^x+xe^x-2ax-2a=(x+1)(e^x-2a)$． ……………………1分

①当 $a\leq 0$ 时，∵$e^x-2a>0$，∴$x<-1$ 时，$f'(x)<0$；$x>-1$ 时，$f'(x)>0$．

∴$f(x)$ 在 $(-\infty,-1)$ 上单调递减，在 $(-1,+\infty)$ 上是单调递增． ……………………2分

②当 $0<a<\dfrac{1}{2e}$ 时，

x	$(-\infty,\ln 2a)$	$\ln 2a$	$(\ln 2a,-1)$	-1	$(-1,+\infty)$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	极大值	↘	极小值	↗

∴$f(x)$ 在 $(-\infty,\ln 2a)$ 上单调递增，在 $(\ln 2a,-1)$ 上单调递减，在 $(-1,+\infty)$ 上单调递增．…3分

③当 $a=\dfrac{1}{2e}$ 时，∵$f'(x)=(x+1)(e^x-\dfrac{1}{e})\geq 0$，∴$f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上单调递增． …………4分

④当 $a>\dfrac{1}{2e}$ 时，

x	$(-\infty,-1)$	-1	$(-1,\ln 2a)$	$\ln 2a$	$(\ln 2a,+\infty)$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	极大值	↘	极小值	↗

∴$f(x)$ 在 $(-\infty,-1)$ 上单调递增，在 $(-1,\ln 2a)$ 上单调递减，在 $(\ln 2a,+\infty)$ 上单调递增．…5分

（2）证明：当 $f(x)$ 存在小于零的极小值时，$f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上是增函数．

由（1）知，当 $a\leq\dfrac{1}{2e}$ 时，$f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上是增函数； ……………………6分

当 $a>\dfrac{1}{2e}$ 时，$f(x)$ 存在极小值，$[f(x)]_{极小值}=f(\ln 2a)$，$f(x)$ 在 $(\ln 2a,+\infty)$ 上是增函数．

由极小值小于零，得 $f(\ln 2a)=-a(\ln 2a)^2+2a^2-a<0$，

而 $a>\dfrac{1}{2e}$，∴$(\ln 2a)^2-2a+1>0$． ……………………7分

设 $g(x)=(\ln 2x)^2-2x+1$，则 $g'(x)=\dfrac{2(\ln 2x-x)}{x}$，再设 $h(x)=\ln 2x-x$，有 $h'(x)=\dfrac{1-x}{x}$，

当 $0<x<1$ 时，$h'(x)>0$，$h(x)$ 在 $(0,1)$ 上单调递增；

当 $x>1$ 时，$h'(x)<0$，$h(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 上单调递减.

∴ $[h(x)]_{\max}=h(1)=\ln 2-1<0$，$h(x)<0$，从而 $g'(x)<0$，$g(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递减.

又 $g\left(\dfrac{1}{2}\right)=0$，∴不等式 $g(x)<0$ 的解为 $0<x<\dfrac{1}{2}$.

∴ $a>\dfrac{1}{2e}$ 时，由 $[f(x)]_{\min}=f(\ln 2a)=-a[(\ln 2a)^2-2a+1]<0$，得 $\dfrac{1}{2e}<a<\dfrac{1}{2}$.

此时 $\ln 2a<\ln 1=0$，又 $f(x)$ 在 $(\ln 2a,+\infty)$ 上是增函数，∴ $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上是增函数.

综上所述，当 $f(x)$ 存在小于零的极小值时，$f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上是增函数. ……………………9分

说明：亦可直接利用 $\ln x\le x-1$，得 $g'(x)=\dfrac{2(\ln 2x-x)}{x}=\dfrac{2(\ln 2+\ln x-x)}{x}\le\dfrac{2(\ln 2-1)}{x}<0$.

（Ⅲ）当 x_1，$x_2\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$ 时，$\sin x_1>0$，$x_1\cos x_2>0$，

∴ $f(\sin x_1)<f(x_1\cos x_2)\Leftrightarrow \sin x_1<x_1\cos x_2$. ……………………10分

（法1）设 $s(x)=\sin x-x\cos x$，则 $s'(x)=\cos x-(\cos x-x\sin x)=x\sin x$，

当 $0<x<\dfrac{\pi}{2}$ 时，$s'(x)>0$，$s(x)$ 在 $\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$ 上单调递增.

又 $s(0)=0$，∴ $0<x<\dfrac{\pi}{2}$ 时，$s(x)>0$，即 $\sin x-x\cos x>0$，$\dfrac{\sin x}{x}>\cos x$，

∴ $\cos x_1<\dfrac{\sin x_1}{x_1}<\dfrac{x_1\cos x_2}{x_1}=\cos x_2$，

由 x_1，$x_2\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$，余弦函数 $y=\cos x$ 在 $\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$ 上单调递减，所以 $x_1>x_2$. ……………………12分

（法2）设 $t(x)=\tan x-x$，则 $t'(x)=\dfrac{1}{\cos^2 x}-1=\tan^2 x>0$，$t(x)$ 在 $\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$ 上单调递增.

又 $t(0)=0$，∴ $0<x<\dfrac{\pi}{2}$ 时，$t(x)>0$，即 $\tan x-x>0$，$\dfrac{\sin x}{x}>\cos x$，

∴ $\cos x_1<\dfrac{\sin x_1}{x_1}<\dfrac{x_1\cos x_2}{x_1}=\cos x_2$，

由 x_1，$x_2\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$，余弦函数 $y=\cos x$ 在 $\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$ 上单调递减，所以 $x_1>x_2$. ……………………12分

说明：其它方法，酌情给分.

关于我们

北京高考在线创办于 2014 年，隶属于北京太星网络科技有限公司，是北京地区极具影响力的中学升学服务平台。主营业务涵盖：北京新高考、高中生涯规划、志愿填报、强基计划、综合评价招生和学科竞赛等。

北京高考在线旗下拥有网站门户、微信公众平台等全媒体矩阵生态平台。平台活跃用户 40W+，网站年度流量数千万量级。用户群体立足于北京，辐射全国 31 省市。

北京高考在线平台一直秉承 “ 精益求精、专业严谨 ” 的建设理念，不断探索“K12 教育+互联网+大数据”的运营模式，尝试基于大数据理论为广大中学和家长提供新鲜的高考资讯、专业的高考政策解读、科学的升学规划等，为广大高校、中学和教科研单位提供“衔接和桥梁纽带”作用。

平台自创办以来，为众多重点大学发现和推荐优秀生源，和北京近百所中学达成合作关系，累计举办线上线下升学公益讲座数百场，帮助数十万考生顺利通过考入理想大学，在家长、考生、中学和社会各界具有广泛的口碑影响力

未来，北京高考在线平台将立足于北京新高考改革，基于对北京高考政策研究及北京高校资源优势，更好的服务全国高中家长和学生。