

2023 北京清华附中朝阳学校高一 10 月月考

数 学

(清华附中朝阳学校 望京学校) 2023 年 10 月

一、单选题 (只有一个正确答案, 每小题 4 分, 共 40 分)

1. 已知集合 $A = \{x | -2 \leq x < 1\}$, $B = \{-2, -1, 0, 1\}$, 则 $A \cap B =$ ()

- A. $\{-2, -1, 0, 1\}$ B. $\{-2, -1, 0\}$ C. $\{-1, 0\}$ D. $\{-1, 0, 1\}$

2. 命题“ $\exists x > 0, x^2 + x + 1 > 0$ ”的否定为 ()

- A. $\forall x > 0, x^2 + x + 1 \leq 0$ B. $\forall x \leq 0, x^2 + x + 1 \leq 0$
C. $\exists x > 0, x^2 + x + 1 \leq 0$ D. $\exists x \leq 0, x^2 + x + 1 \leq 0$

3. 已知实数 a, b, c , 若 $a > b > c$, 则下列不等式一定成立的是 ()

- A. $a - b > b - c$ B. $ac > b^2$ C. $a(a - c) > b(b - c)$ D. $\frac{1}{b - c} > \frac{1}{a - c}$

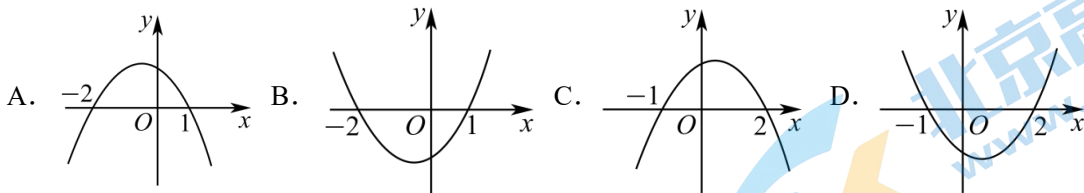
4. 与函数 $f(x) = |x|$ 表示同一函数的是 ()

- A. $f(x) = \frac{x^2}{|x|}$ B. $f(x) = (\sqrt{x})^2$ C. $f(x) = \sqrt[3]{x^3}$ D. $f(x) = \sqrt{x^2}$

5. 已知 $x > 2$, 则 $x + \frac{1}{x - 2}$ 的最小值是 ()

- A. 3 B. 4 C. 5 D. 2

6. 不等式 $ax^2 - bx + c > 0$ 的解集为 $\{x | -2 < x < 1\}$, 则函数 $y = ax^2 - bx + c$ 的图象大致为 ()



7. 设 $x \in \mathbb{R}$, 则“ $0 < x < 5$ ”是“ $|x - 1| < 1$ ”的 ()

- A. 充分而不必要条件 B. 必要而不充分条件
C. 充要条件 D. 既不充分也不必要条件

8. 设集合 $M = \{x | x = k^2 + 1, k \in \mathbb{N}^*\}$, $N = \{x | x = m^2 - 4m + 5, m \in \mathbb{N}^*\}$, 则 ()

- A. $M = N$ B. $M \subseteq N$
C. $N \subseteq M$ D. $M \cap N = \emptyset$

9. 已知正数 a, b 满足 $a + 2b = 6$, 则 $\frac{1}{a + 2} + \frac{2}{b + 1}$ 的最小值为 ()

- A. $\frac{7}{8}$ B. $\frac{10}{9}$

C. $\frac{9}{10}$

D. $\frac{8}{9}$

10. 已知 $a, b \in (0, +\infty)$, 且不等式 $a+b \leq m^2 - 2m + 6$ 对任意 $m \in [2, 3]$ 恒成立, 则 $\sqrt{a+1} + \sqrt{b+1}$ 的最大值为 ()

A. 2

B. $2\sqrt{2}$

C. 4

D. $4\sqrt{2}$

二、填空题 (每小题 5 分, 共 30 分)

11. 已知集合 $A = \{x | -1 \leq 2x - 1 \leq 3\}$, $B = \{x | x^2 - 3x < 0\}$, 则 $A \cup B =$ _____.

12. 函数 $f(x) = \frac{1}{x} + \sqrt{1-x}$ 的定义域是_____.

13. 为净化水质, 向一个游泳池加入某种化学药品, 加药后池水中该药品的浓度 C (单位: mg/L) 随时间 t (单位: h) 的变化关系为 $C = \frac{20t}{t^2 + 4}$, 则经过_____h 后池水中药品的浓度达到最大.

14. 已知集合 $A = \{0, 1\}$, $B = \{(x, y) | x \in A, y \in A, x - y \in A\}$, 则集合 B 的子集共有_____个.

15. 已知命题 p : “ $\exists x \in [0, 2], x^2 - 2x \geq a$ ”, 则 p 为真命题的一个必要不充分条件是_____.

16. 有下列命题:

①不等式 $(2x-1)(1-x) < 0$ 的解集为 $\left\{x \mid x < \frac{1}{2} \text{ 或 } x > 1\right\}$;

②若 $x \in \mathbf{R}$, 函数 $y = \sqrt{x^2 + 4} + \frac{1}{\sqrt{x^2 + 4}}$ 的最小值是 2;

③对于 $\forall x \in \mathbf{R}$, $ax^2 + 4x \geq 2x^2 - 1$ 恒成立, 则实数 a 的取值范围是 $[6, +\infty)$;

④已知 $p: \frac{1}{2} \leq x \leq 3$, $q: x^2 - \left(a + \frac{1}{a}\right)x + 1 \leq 0$ ($a > 0$), 若 p 是 q 的充分不必要条件, 则实数 a 的取值范围

是 $\left(0, \frac{1}{3}\right] \cup [3, +\infty)$.

其中真命题的序号为_____. (把所有正确答案的序号填写在横线上, 多选、错选不给分)

三、解答题 (共 6 个小题, 共 80 分)

17. (本小题满分 12 分) 已知 a, b 为常数, 且 $a \neq 0$, $f(x) = ax^2 + bx$, $f(2) = 0$, 方程 $f(x) = x$ 有两个相等实根.

(1) 求函数 $f(x)$ 的解析式;

(2) 当 $x \in (-1, 2]$ 时, 求函数 $f(x)$ 的值域.

18. (本小题满分 13 分) 已知集合 $A = \{x | 2 \leq x \leq 6\}$, $B = \{x | 1 < x < 5\}$, $C = \{x | m < x < m+1\}$, $U = \mathbf{R}$.

(1) 求 $A \cup B$, $(\complement_U A) \cap B$;

(2) 若 $C \subseteq B$, 求 m 的取值范围.

19. (本小题满分 14 分) 已知 x_1, x_2 是方程 $4kx^2 - 4kx + k + 1 = 0$ 的两个实数根.

(1) 求 k 的取值范围;

(2)求 $x_1^2 + x_2^2$ 、 $|x_1 - x_2|$. (结果用 k 表示)

(3)是否存在实数 k , 使 $(2x_1 - x_2)(x_1 - 2x_2) = -\frac{3}{2}$ 成立? 若存在, 求出 k 的值, 若不存在, 请说明理由.

20. (本小题满分 14 分) 已知函数 $f(x) = ax^2 + bx + 1$.

(1)若关于 x 的不等式 $f(x) \leq 0$ 的解集为 $[\frac{1}{2}, 1]$, 求 a, b 的值;

(2)若 $a = 1$, 且 $x \in [-2, -1]$ 时, $f(x) < 0$ 恒成立, 求实数 b 的取值范围;

(3)若 $b = -a - 1$ 且 $a > 0$, 解关于 x 的不等式 $f(x) > 0$.

21. (本小题满分 13 分) 经过长期观测得到: 在交通繁忙的时段内, 某公路段汽车的车流量 y (千辆/小时) 与汽车的平均速度 v (千米/小时) 之间的函数关系为: $y = \frac{920v}{v^2 + 3v + 1600} (v > 0)$.

(1)在该时段内, 当汽车的平均速度 v 为多少时, 车流量最大? 最大车流量为多少? (保留分数形式)

(2)若要求在该时段内车流量超过 10 千辆/小时, 则汽车的平均速度应在什么范围内?

(3)若要求在该时段内车流量超过 10 千辆/小时, 则汽车的平均速度应在什么范围内?

22. (本小题满分 14 分) 对非空数集 A, B , 定义 $A - B = \{x - y | x \in A, y \in B\}$, 记有限集 T 的元素个数为 $|T|$.

(1)若 $A = \{1, 3, 5\}$, $B = \{1, 2, 4\}$, 求 $|A - A|$, $|B - B|$, $|A - B|$;

(2)若 $|A| = 4$, $A \subseteq \mathbf{N}^*$, $B = \{1, 2, 3, 4\}$, 当 $|A - B|$ 最大时, 求 A 中最大元素的最小值;

(3)若 $|A| = |B| = 5$, $|A - A| = |B - B| = 21$, 求 $|A - B|$ 的最小值.

参考答案

1. B

【分析】根据交集的定义直接求解即可.

【详解】因为 $A = \{x | -2 \leq x < 1\}$, $B = \{-2, -1, 0, 1\}$,

所以 $A \cap B = \{-2, -1, 0\}$,

故选: B

2. A

【分析】根据特称命题的否定是全称命题进行求解即可.

【详解】由于特称命题的否定为全称命题,

故命题“ $\exists x > 0, x^2 + x + 1 > 0$ ”的否定为“ $\forall x > 0, x^2 + x + 1 \leq 0$ ”

故选: A.

3. D

【分析】由 $a > b > c$ 不妨取特殊值将选项 A, B, C 排除, 关于 D, 由 $a > b > c$, 即有 $a - c > b - c > 0$, 取倒数即可证明选项正误.

【详解】解: 由题知 $a > b > c$,

不妨取 $a = 3, b = 2, c = -1$,

则有 $a - b = 1 < b - c = 3$,

$ac = -3 < b^2 = 4$,

故选项 A, B 错误;

关于选项 C,

不妨取 $a = -1, b = -2, c = -3$,

$a(a - c) = -2 = b(b - c) = -2$,

故选项 C 错误;

关于选项 D,

$\because a > b > c, \therefore a - c > b - c > 0$,

$\therefore \frac{1}{b - c} > \frac{1}{a - c} > 0$,

故选项 D 正确.

故选: D

4. D

【分析】根据函数与函数之间的相等的定义, 逐个选项进行判断求解即可.

【详解】 $f(x) = |x|$ 的定义域为 $x \in \mathbf{R}$,

对于 A, $f(x) = \frac{x^2}{|x|}$ 的定义域为 $\{x \in \mathbf{R} | x \neq 0\}$, 定义域不一致, A 错误;

对于 B, $f(x) = (\sqrt{x})^2$ 的定义域为 $\{x \in \mathbf{R} | x \geq 0\}$, 定义域不一致, B 错误;

对于 C, $f(x) = \sqrt[3]{x^3} = x$, 其解析式不一致, C 错误;

对于 D, $f(x) = \sqrt{x^2} = |x|$, 其定义域和解析式与 $f(x) = |x|$ 一致, 故 D 正确;

故选: D

5. B

【分析】根据基本不等式即可求解最值.

【详解】由于 $x > 2$, 故 $x - 2 > 0$, 所以 $x + \frac{1}{x-2} = x - 2 + \frac{1}{x-2} + 2 \geq 2\sqrt{(x-2)\left(\frac{1}{x-2}\right)} + 2 = 4$, 当且仅当 $x - 2 = \frac{1}{x-2}$, 即 $x = 3$ 时等号成立, 故 $x + \frac{1}{x-2}$ 最小值为 4,

故选: B

6. A

【分析】根据题意, 可得方程 $ax^2 - bx + c = 0$ 的两个根为 $x = -2$ 和 $x = 1$, 且 $a < 0$, 结合二次方程根与系数的关系得到 a 、 b 、 c 的关系, 再结合二次函数的性质判断即可.

【详解】因为 $ax^2 - bx + c > 0$ 的解集为 $\{x | -2 < x < 1\}$,
所以方程 $ax^2 - bx + c = 0$ 的两根分别为 -2 和 1 , 且 $a < 0$,

$$\text{则} \begin{cases} -2 + 1 = \frac{b}{a}, \\ (-2) \times 1 = \frac{c}{a}, \end{cases} \text{变形可得} \begin{cases} b = -a, \\ c = -2a, \end{cases}$$

故函数 $y = ax^2 - bx + c = ax^2 + ax - 2a = a(x+2)(x-1)$ 的图象开口向下,

且与 x 轴的交点坐标为 $(1, 0)$ 和 $(-2, 0)$, 故 A 选项的图象符合.

故选: A

7. B

【分析】求出 $|x-1| < 1$ 的解集, 根据两解集的包含关系确定.

【详解】 $|x-1| < 1$ 等价于 $0 < x < 2$, 故 $0 < x < 5$ 推不出 $|x-1| < 1$;

由 $|x-1| < 1$ 能推出 $0 < x < 5$.

故“ $0 < x < 5$ ”是“ $|x-1| < 1$ ”的必要不充分条件.

故选 B.

【点睛】充要条件的三种判断方法:

(1) 定义法: 根据 $p \Rightarrow q$, $q \Rightarrow p$ 进行判断;

(2) 集合法: 根据由 p , q 成立的对象构成的集合之间的包含关系进行判断;

(3) 等价转化法: 根据一个命题与其逆否命题的等价性, 把要判断的命题转化为其逆否命题进行判断. 这个方法特别适合以否定形式给出的问题.

8. B

【分析】列出集合 M 、 N ，可判断两者之间的关系.

【详解】 \because 集合 $M = \{x | x = k^2 + 1, k \in \mathbf{N}^*\} = \{2, 5, 10, 17, 26, \dots\}$,

$N = \{x | x = (m-2)^2 + 1, m \in \mathbf{N}^*\} = \{1, 2, 5, 10, 17, 26, \dots\}$,

$\therefore M \subseteq N$.

故选: B.

9. C

【分析】由 $a+2b=6$ ，得到 $a+2+2b+2=10$ ，再利用“1”的代换求解.

【详解】解：因为 $a+2b=6$ ，

所以 $a+2+2b+2=10$ ，

所以 $\frac{1}{a+2} + \frac{2}{b+1} = \frac{1}{10} \left(\frac{1}{a+2} + \frac{4}{2b+2} \right) (a+2+2b+2) \geq \frac{1}{10} \left[5 + 2\sqrt{\frac{2b+2}{a+2} \cdot \frac{4(a+2)}{2b+2}} \right] = \frac{9}{10}$ ，

当且仅当 $2b+2=2(a+2)$ ，即 $a=\frac{4}{3}$ ， $b=\frac{7}{3}$ 时，等号成立.

故选: C

10. C

【分析】利用二次函数配方得 $m^2 - 2m + 6$ 的最小值，再由基本不等式得到关于 ab 的范围，将所求平方即可代入求解

【详解】由题意不等式 $a+b \leq m^2 - 2m + 6$ 对任意 $m \in [2, 3]$ 恒成立

又 $m^2 - 2m + 6 = (m-1)^2 + 5 \in [6, 9] \therefore a+b \leq 6$ 则 $ab \leq \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 \leq 9$ 当且仅当 $a=b=3$ 成立

$(\sqrt{a+1} + \sqrt{b+1})^2 = a+b+2+2\sqrt{a+1} \cdot \sqrt{b+1} = a+b+2+2\sqrt{ab+a+b+1} \leq 6+2+8=16$ 故 $\sqrt{a+1} + \sqrt{b+1} \leq 4$

故选: C

【点睛】本题主要考查不等式恒成立问题，综合考查基本不等式与不等式的解法，恒成立的问题一般与最值有关.

11. $\{x | 0 \leq x < 3\}$

【分析】分别解出 A 、 B 集合，由并集运算求解.

【详解】 $A = \{x | 0 \leq x \leq 2\}$ ， $B = \{x | 0 < x < 3\}$ ，则 $A \cup B = \{x | 0 \leq x < 3\}$.

故答案为: $\{x | 0 \leq x < 3\}$.

12. $(-\infty, 0) \cup (0, 1]$

【分析】根据偶次方根的被开方数非负、分母不为零得到方程组，解得即可；

【详解】解：因为 $f(x) = \frac{1}{x} + \sqrt{1-x}$ ，所以 $\begin{cases} 1-x \geq 0 \\ x \neq 0 \end{cases}$ ，解得 $x \leq 1$ 且 $x \neq 0$ ，

故函数的定义域为 $(-\infty, 0) \cup (0, 1]$;

故答案为: $(-\infty, 0) \cup (0, 1]$

13. 2

【详解】 $C = \frac{20t}{t^2 + 4} = \frac{20}{t + \frac{4}{t}} \leq \frac{20}{4} = 5$

当且仅当 $t = \frac{4}{t}$ 且 $t > 0$, 即 $t = 2$ 时取等号

考点: 基本不等式, 实际应用

14. 8

【分析】利用集合的定义及子集的定义即可求解.

【详解】由题意可知, 当 $x = 0$ 时, $y = 0$; $x - y = 0 \in A$,

当 $x = 1$ 时, $y = 0$ 或 $y = 1$; $x - y = 1 - 0 = 1 \in A$ 或 $x - y = 1 - 1 = 0 \in A$,

所以 $B = \{(0, 0), (1, 0), (1, 1)\}$,

所以集合 B 的子集共有 $2^3 = 8$ 个.

故答案为: 8.

15. $a < 1$ (答案不唯一)

【分析】根据已知命题为真求对应参数 a 的范围, 再结合充分、必要性定义写出一个必要不充分条件.

【详解】由 $0 \leq x \leq 2$ 得: $-1 \leq x^2 - 2x \leq 0$, 所以 p 为真命题的充要条件是 $a \leq 0$,

故一个必要不充分条件是 $a < 1$.

故答案为: $a < 1$ (答案不唯一)

16. ①③④

17. (1) $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + x$;

(2) $\left(-\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right]$

【分析】(1) 根据题意得到 $\Delta = (b-1)^2 = 0$, $f(2) = 4a + 2b = 0$, 再分别解方程即可得到答案.

(2) 首先根据题意得到 $f(x) = -\frac{1}{2}(x-1)^2 + \frac{1}{2}$, 再结合单调性求解值域即可.

【详解】(1) 因为方程 $f(x) = x$ 有两个相等实根,

所以 $ax^2 + (b-1)x = 0$, $\Delta = (b-1)^2 = 0$, 即 $b = 1$.

又因为 $f(2) = 4a + 2b = 0$, 解得 $a = -\frac{1}{2}$.

所以 $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + x$.

(2) 因为 $x \in (-1, 2]$, $f(x) = -\frac{1}{2}(x^2 - 2x + 1) + \frac{1}{2} = -\frac{1}{2}(x-1)^2 + \frac{1}{2}$

所以函数 $f(x)$ 是开口向下的抛物线，对称轴是 $x=1$ ，

所以当 $x=1$ 时， $f(x)$ 取得最大值 $f(x)_{\max} = \frac{1}{2}$ ；

当 $x=-1$ 时， $f(-1) = -\frac{3}{2}$ ，

所以 $f(x)$ 的值域是 $\left[-\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right]$ 。

18. (1) $A \cup B = \{x | 1 < x \leq 6\}$ ， $(\complement_U A) \cap B = \{x | 1 < x < 2\}$

(2) $[1, 4]$

【分析】(1) 利用集合的交、并、补运算即可求解。

(2) 利用集合的包含关系列不等式组 $\begin{cases} m \geq 1 \\ m+1 \leq 5 \end{cases}$ ，解不等式组即可求解。

【详解】(1) 因为集合 $A = \{x | 2 \leq x \leq 6\}$ ， $B = \{x | 1 < x < 5\}$ ，

所以 $\complement_U A = \{x | x < 2 \text{ 或 } x > 6\}$ ，

故 $A \cup B = \{x | 1 < x \leq 6\}$ ， $(\complement_U A) \cap B = \{x | 1 < x < 2\}$ ；

(2) 因为 $C = \{x | m < x < m+1\}$ ，且 $C \subseteq B$ ，

则 $\begin{cases} m \geq 1 \\ m+1 \leq 5 \end{cases}$ ，解得 $1 \leq m \leq 4$ ，

所以 m 的取值范围为 $[1, 4]$ 。

19. 17. (1) $\{k | k < 0\}$

(2) $x_1^2 + x_2^2 = \frac{k-1}{2k}$ ， $|x_1 - x_2| = \sqrt{-\frac{1}{k}}$

(3) 不存在，理由见解析

【分析】(1) 根据题意可得出 $\Delta \leq 0$ 且 $k \neq 0$ ，可求出实数 k 的取值范围；

(2) 根据韦达定理可得出 $x_1^2 + x_2^2$ 、 $|x_1 - x_2|$ 关于 k 的表达式；

(3) 根据 $(2x_1 - x_2)(x_1 - 2x_2) = -\frac{3}{2}$ 结合韦达定理定理可得出关于 k 的等式，求出 k 的值，结合 $k < 0$ 可得出结论。

【详解】(1) 解：因为 x_1 、 x_2 是方程 $4kx^2 - 4kx + k + 1 = 0$ 的两个实数根，

则 $\Delta = 16k^2 - 4 \times 4k(k+1) = -16k \geq 0$ ，且 $4k \neq 0$ ，解得 $k < 0$ 。

所以，实数 k 的取值范围是 $\{k | k < 0\}$ 。

(2) 解：因为 x_1 、 x_2 是方程 $4kx^2 - 4kx + k + 1 = 0$ 的两个实数根，

由韦达定理可得 $x_1 + x_2 = 1$ ， $x_1 x_2 = \frac{k+1}{4k}$ ，

所以， $x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1 x_2 = 1 - \frac{k+1}{2k} = \frac{k-1}{2k}$ ，

$$|x_1 - x_2| = \sqrt{(x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2} = \sqrt{1 - \frac{k+1}{k}} = \sqrt{\frac{1}{k}}$$

(3) 解: 若存在实数 k , 使 $(2x_1 - x_2)(x_1 - 2x_2) = -\frac{3}{2}$,

$$\text{即 } 2x_1^2 + 2x_2^2 - 5x_1x_2 = 2 \times \frac{k-1}{2k} - \frac{5(k+1)}{4k} = -\frac{k+9}{4k} = -\frac{3}{2}, \text{ 解得 } k = \frac{9}{5}, \text{ 不合乎题意, 舍去.}$$

因此, 不存在实数 k 的值, 使得 $(2x_1 - x_2)(x_1 - 2x_2) = -\frac{3}{2}$.

20. (1) $\begin{cases} b = -3 \\ a = 2 \end{cases};$

(2) $\left(\frac{5}{2}, +\infty\right);$

(3) 当 $a = 1$ 时, 不等式 $f(x) > 0$ 的解集为 $\{x | x \neq 1\}$; 当 $0 < a < 1$ 时, 不等式 $f(x) > 0$ 的解集为 $\left\{x \mid x > \frac{1}{a} \text{ 或 } x < 1\right\}$;

当 $a > 1$ 时, 不等式 $f(x) > 0$ 的解集为 $\left\{x \mid x < \frac{1}{a} \text{ 或 } x > 1\right\}$.

【分析】(1) 根据一元二次不等式的解集得到 $\begin{cases} a > 0 \\ \frac{1}{2} + 1 = -\frac{b}{a} \\ \frac{1}{2} \times 1 = \frac{1}{a} \end{cases}$, 解之即可得到结果;

(2) 原题等价于 $x \in [-2, -1]$ 时, $\frac{x^2+1}{x} > -b$ 恒成立, 进而求出 $\frac{x^2+1}{x}$ 在 $x \in [-2, -1]$ 上的最小值即可得出结果;

(3) 首先求出方程 $(ax-1)(x-1)=0$ 的两根, 进而根据两根的大小进行分类讨论即可求出结果.

【详解】(1) 由题意可得 $a > 0$, 且 $\frac{1}{2}$ 和 1 是关于 x 的方程 $ax^2 + bx + 1 = 0$ 的根, 即 $\begin{cases} a > 0 \\ \frac{1}{2} + 1 = -\frac{b}{a} \\ \frac{1}{2} \times 1 = \frac{1}{a} \end{cases}$, 解得

$$\begin{cases} b = -3 \\ a = 2 \end{cases},$$

(2) 由题意可得 $ax^2 + (-a-1)x + 1 > 0, a > 0$, 即 $(ax-1)(x-1) > 0, a > 0$

方程 $(ax-1)(x-1)=0$ 的两根为 $x = \frac{1}{a}, x = 1$,

当 $\frac{1}{a} = 1$ 时, 即 $a = 1$, 不等式 $ax^2 + (-a-1)x + 1 > 0$ 的解集为 $\{x | x \neq 1\}$,

当 $\frac{1}{a} > 1$ 时, 即 $0 < a < 1$, 不等式 $ax^2 + (-a-1)x + 1 > 0$ 的解集为 $\left\{x \mid x > \frac{1}{a} \text{ 或 } x < 1\right\}$,

当 $\frac{1}{a} < 1$ 时, 即 $a > 1$, 不等式 $ax^2 + (-a-1)x + 1 > 0$ 的解集为 $\left\{x \mid x < \frac{1}{a} \text{ 或 } x > 1\right\}$,

综上: 当 $a=1$ 时, 不等式 $f(x) > 0$ 的解集为 $\{x \mid x \neq 1\}$; 当 $0 < a < 1$ 时, 不等式 $f(x) > 0$ 的解集为 $\left\{x \mid x > \frac{1}{a} \text{ 或 } x < 1\right\}$; 当 $a > 1$ 时, 不等式 $f(x) > 0$ 的解集为 $\left\{x \mid x < \frac{1}{a} \text{ 或 } x > 1\right\}$.

21. (1) 当 $v = 40 \text{ km/h}$ 时, 车流量最大, 最大车流量约为 $\frac{920}{83}$ 千辆/时;

(2) 大于 25 km/h 且小于 64 km/h .

【分析】(1) 根据基本不等式即可求得 y 的最大值. 根据等号成立的条件求得此时的平均速度.

(2) 在该时间段内车流量超过 10 千辆/小时, 解不等式即可求出 v 的范围.

【详解】(1) 依题意, 由于 $v > 0$,

$$\text{所以 } y = \frac{920v}{v^2 + 3v + 1600} = \frac{920}{v + \frac{1600}{v} + 3} \leq \frac{920}{2\sqrt{v \cdot \frac{1600}{v}} + 3} = \frac{920}{83}$$

当且仅当 $v = \frac{1600}{v}$, 即 $v = 40$ 时, 上式等号成立,

$$\therefore y_{\max} = \frac{920}{83} \text{ (千辆/时)}.$$

当 $v = 40 \text{ km/h}$ 时, 车流量最大, 最大车流量约为 $\frac{920}{83}$ 千辆/时;

$$(2) \text{ 由条件得 } \frac{920v}{v^2 + 3v + 1600} > 10,$$

整理得 $v^2 - 89v + 1600 < 0$, 即 $(v-25)(v-64) < 0$, 解得 $25 < v < 64$,

所以, 如果要求在该时段内车流量超过 10 千辆/时, 则汽车的平均速度应大于 25 km/h 且小于 64 km/h .

22. (1) $|A-A|=5, |B-B|=7, |A-B|=7$; (2) 13; (3) 15

【解析】(1) 根据新定义求出 $A-A, B-B, A-B$, 进而可得答案;

(2) 设 $A = \{a, b, c, d\} \subseteq N^*$, $a < b < c < d$, 当 A 中元素与 B 中元素的差均不相同, $|A-B|$ 可取到最大值, 进而可求出最大值, 再通过 $b-a \geq 4, c-b \geq 4, d-c \geq 4$ 得到 $d-a \geq 12$, 可得 A 中最大元素的最小值;

(3) 对非空数集 T , 定义运算 $T^* = \{x-y \mid x, y \in T, x \neq y\}$, 首先确定 A 中不同的元素的差均不相同, B 中不同的元素的差均不相同, 由 $|A-B| \geq |A||B| - \frac{1}{2}|A^* \cap B^*|$ 可得 $|A-B|$ 的最小值, 然后验证最小值可以取到即可.

【详解】解: (1) $\because A = \{1, 3, 5\}, B = \{1, 2, 4\}$,

$$\therefore A-A = \{-4, -2, 0, 2, 4\}, B-B = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}, A-B = \{-3, -1, 0, 1, 2, 3, 4\},$$

$$\therefore |A-A|=5, |B-B|=7, |A-B|=7;$$

(2) 设 $A = \{a, b, c, d\} \subseteq N^*$, $a < b < c < d$,

① $\because |A| = |B| = 4,$

$\therefore |A - B| \leq 4^2 = 16,$ 当 A 中元素与 B 中元素的差均不相同同时等号成立,

所以 $|A - B|$ 最大值为 16;

② 当 $|A - B| = 16$ 时, A 中元素与 B 中元素的差均不相同,

$\therefore (A - A) \cup (B - B) = \{0\},$

又因为 $B - B = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\},$

$\therefore b - a \geq 4, c - b \geq 4, d - c \geq 4,$

$\therefore d - a \geq 12,$

则 $d \geq 13,$

综上, $|A - B|$ 最大值为 16, A 中最大元素的最小值为 13;

(3) 对非空数集 $T,$ 定义运算 $T^* = \{x - y \mid x, y \in T, x \neq y\},$

① $|A| = 5,$

$\therefore |A - A| \leq 5 \times (5 - 1) + 1 = 21,$ 当且仅当 $|A^*| = 5 \times (5 - 1) = 20$ 时取等号,

又因为 $|A - A| = 21,$

所以 A 中不同的元素的差均不相同,

同理, B 中不同的元素的差均不相同,

若 $a, a' \in A, b, b' \in B$

因为 $a - b = a' - b' \Leftrightarrow a - a' = b - b' \Leftrightarrow a' - a = b - b',$

$\therefore |A - B| \geq |A||B| - \frac{1}{2}|A^* \cap B^*| \geq 5 \times 5 - \frac{1}{2} \times 20 = 15,$

② 令 $A = \{1, 2, 4, 8, 16\}, B = \{-1, -2, -4, -8, -16\},$

所以 $|A| = |B| = 5,$ A 中不同元素的差均不相同, B 中不同元素的差均不相同,

所以 $|A - A| = |B - B| = 21,$

经检验, $|A - B| = 15$ 符合题意,

综上 $|A - B|$ 的最小值为 15.

【点睛】 本题考查集合的新定义问题, 正确理解题意是解题的关键, 考查学生分析问题解决问题的能力, 是一道难度较大的题目.

关于我们

北京高考在线创办于 2014 年，隶属于北京太星网络科技有限公司，是北京地区极具影响力的中学升学服务平台。主营业务涵盖：北京新高考、高中生涯规划、志愿填报、强基计划、综合评价招生和学科竞赛等。

北京高考在线旗下拥有网站门户、微信公众平台等全媒体矩阵生态平台。平台活跃用户 50W+，网站年度流量数千万量级。用户群体立足于北京，辐射全国 31 省市。

北京高考在线平台一直秉承“精益求精、专业严谨”的建设理念，不断探索“K12 教育+互联网+大数据”的运营模式，尝试基于大数据理论为广大中学和家长提供新鲜的高考资讯、专业的高考政策解读、科学的升学规划等，为广大高校、中学和教科研单位提供“衔接和桥梁纽带”作用。

平台自创办以来，为众多重点大学发现和推荐优秀生源，和北京近百所中学达成合作关系，累计举办线上线下升学公益讲座数千场，帮助数十万考生顺利通过考入理想大学，在家长、考生、中学和社会各界具有广泛的口碑影响力

未来，北京高考在线平台将立足于北京新高考改革，基于对北京高考政策研究及北京高校资源优势，更好的服务全国高中家长和学生。

推荐大家关注北京高考在线网站官方微信公众号：**京考一点通**，我们会持续为大家整理分享最新的高中升学资讯、政策解读、热门试题答案、招生通知等内容！

