全国Ⅱ卷　文科数学

注意事项：

1. 本试卷分第Ⅰ卷(选择题)和第Ⅱ卷(非选择题)两部分.
2. 答题前，考生务必将自己的姓名、准考证号填写在本试卷相应的位置.
3. 全部答案写在答题卡上，写在本试卷上无效.
4. 本试卷满分 150 分，测试时间 120 分钟.
5. 考试范围：高考全部内容.

第Ⅰ卷

一、选择题：本大题共 12 小题，每小题 5 分，在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.

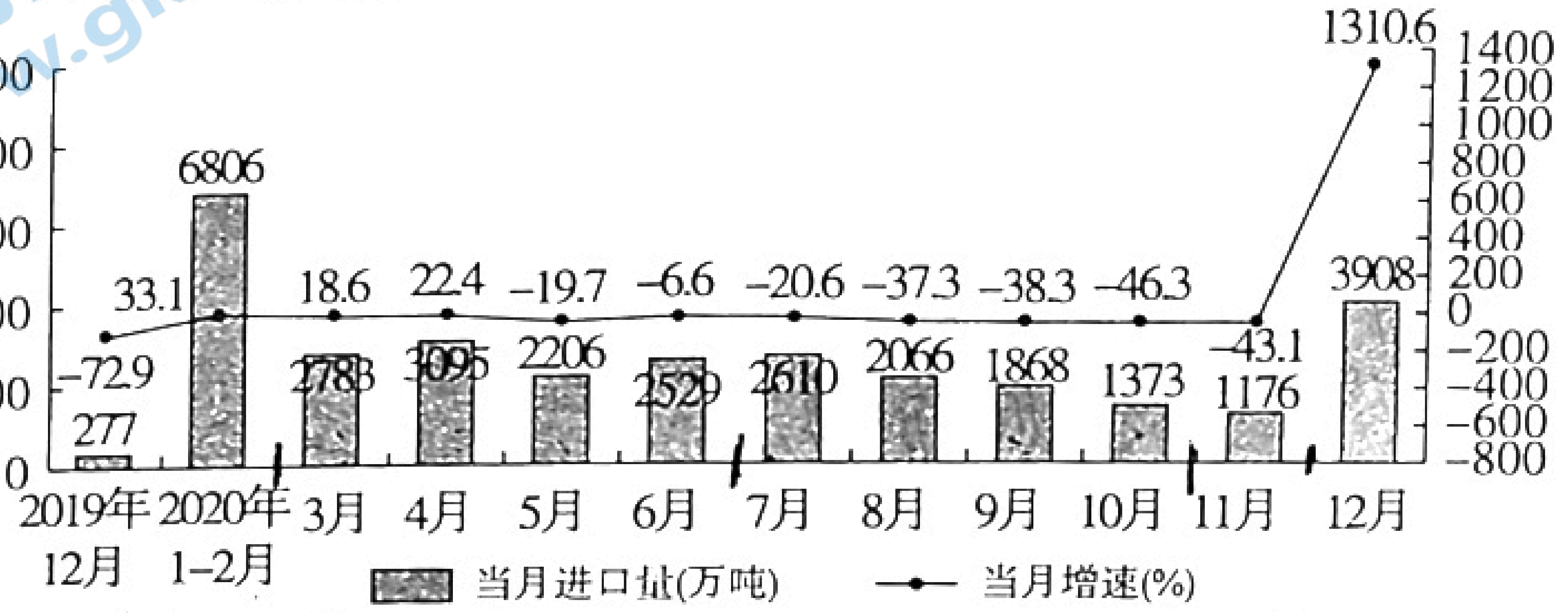
若集合 $A=\{2,3,4,5,6\}$，$B=\{x|(x+2)(x-5)<0\}$，则 $A\cap B=$

A. $\{2,3,4,5\}$　　B. $\{2,3,4\}$　　C. $\{5,6\}$　　D. $\{4,5,6\}$

若 $z_1=2+3i$，$z_2=4+i$，则 $|z_1-z_2|=$

A. 2　　B. $\sqrt{2}$　　C. $2\sqrt{2}$　　D. $2\sqrt{3}$

国家统计局发布的 2020 年煤炭进口月度走势图如图所示，现有如下说法：



①2020 年 7 月至 11 月期间，我国月煤炭的进口量逐渐减少；

②2020 年 12 月煤炭进口量比 11 月份增加 2732 万吨；

③2020 年 3 月至 10 月煤炭进口量的月平均值超过 2000 万吨.

则上述说法正确的个数为

A. 0　　B. 1　　C. 2　　D. 3

4. 若 $x,y\in(0,\frac{\pi}{2})\cup(\frac{\pi}{2},\pi)$，且 $\cos x>\cos y$，则下列不等式恒成立的是

A. $\tan x>\tan y$　　B. $\tan x<\tan y$　　C. $x^{\frac{1}{3}}>y^{\frac{1}{3}}$　　D. $x^{\frac{1}{3}}<y^{\frac{1}{3}}$

5. 已知等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n，若 $S_9=90$，$a_3=4$，则数列 $\{a_n\}$ 的公差为

A. -2　　B. 2　　C. -3　　D. 3

6. 学校举行庆祝元旦晚会，甲、乙、丙、丁计划报名参加晚会的相声、小品这 2 个节目，每个同学限报 1 个节目，每个节目都要有人报名，则甲、乙两人所报节目相同的概率为

A. $\frac{2}{7}$　　B. $\frac{3}{14}$　　C. $\frac{6}{7}$　　D. $\frac{3}{7}$

7. 若点 $M(a,a)$ 不在圆 C：$x^2+y^2-4x-6y+b=0$ 上，则实数 b 的取值范围为

A. $(-\infty,13)$　　B. $(\frac{25}{2},13)$　　C. $(\frac{23}{2},13)$　　D. $(-\infty,\frac{25}{2})$

8. 已知函数 $f(x)$ 是定义域为 $\mathbf{R}$ 的偶函数，且当 $x\geqslant0$ 时，$f(x)=\begin{cases}\sqrt{1-x^2},0\leqslant x\leqslant1\\ \frac{2}{3^x},x>1\end{cases}$，若 $y=f(x)-m$ 有 2 个零

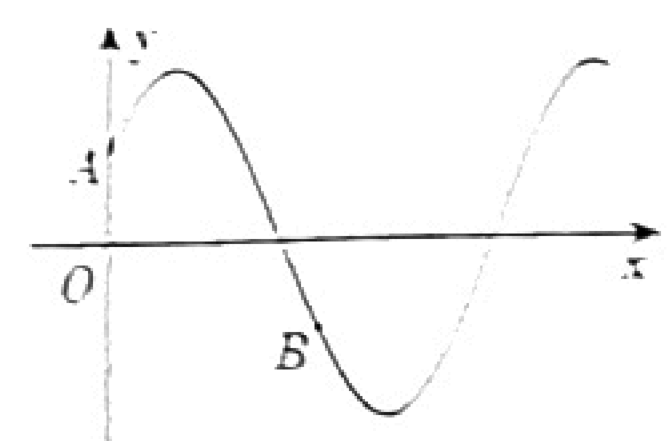
，则实数 m 的值不可能为

A. $\frac{4}{5}$　　B. 0　　C. $\frac{2}{3}$　　D. $\frac{1}{3}$

已知双曲线 $C:\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 的左、右焦点分别为 F_1,F_2，记双曲线 C 过一、三象限的渐近线的倾斜角为 α，若点 M 在过原点且倾斜角为 $\frac{\alpha}{2}$ 的直线上，且 $|MF_1|-|MF_2|=2a$，$\angle OMF_2=90°$，则双曲线 C 的离心率为

A. $2\sqrt{5}-2$　　B. $\sqrt{5}-1$　　C. $2\sqrt{5}-1$　　D. $\sqrt{5}$

10. 已知函数 $f(x)=4\cos(\omega x+\varphi)(\omega>0,-\frac{\pi}{2}<\varphi<\frac{\pi}{2})$ 的部分图象如图所示，其中 $A(0,2)$，$B(\frac{\pi}{3},-2)$，将函数 $f(x)$ 的图象的横坐标伸长为原来的 2 倍，再向右平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位后，得到函数 $g(x)$ 的图象，则函数 $g(x)$ 的单调递增区间为



A. $[-\frac{5\pi}{18}+\frac{4k\pi}{3},\frac{7\pi}{18}-\frac{4k\pi}{3}](k\in Z)$

B. $[\frac{7\pi}{18}-\frac{4k\pi}{3},\frac{19\pi}{18}-\frac{4k\pi}{3}](k\in Z)$

C. $[-\frac{13\pi}{18}-\frac{4k\pi}{3},-\frac{\pi}{18}-\frac{4k\pi}{3}](k\in Z)$

D. $[-\frac{\pi}{18}-\frac{4k\pi}{3},\frac{11\pi}{18}-\frac{4k\pi}{3}](k\in Z)$

11. 已知四棱锥 $S-ABCD$ 中，$SA\perp$ 平面 $ABCD$，四边形 $ABCD$ 为正方形，$SA=AB=6$，平面 α 过 SB,CD,SD 的中点，则平面 α 截四棱锥 $S-ABCD$ 所得的截面面积为

A. $\frac{45}{4}\sqrt{6}$　　B. $\frac{27\sqrt{6}}{2}$　　C. $9\sqrt{6}$　　D. $12\sqrt{6}$

12. 若 $\forall m,n\in R$，$e^{2n}+m^2-2n^2\geq 2n(e^n-m)+\lambda$ 恒成立，则实数 λ 的取值范围为

A. $(-\infty,\sqrt{2}]$　　B. $(-\infty,2]$　　C. $(-\infty,\frac{1}{2}]$　　D. $(-\infty,\frac{\sqrt{2}}{2}]$

第Ⅱ卷

本卷包括必考题和选考题两部分. 第 13 题～第 21 题为必考题，每个试题考生都必须作答. 第 22 题～第 23 题为选考题，考生根据要求作答.

二、填空题：本大题共 4 小题，每小题 5 分.

13. 已知平面向量 $m=(2,-3)$，$n=(1,\lambda)$，$p=(-1,4)$，若 m 与 n 共线，则 $n\cdot p=$______.

14. 已知抛物线 $C:y^2=2px(p>0)$ 的焦点为 F，若抛物线 C 与圆 $O:x^2+y^2=12$ 交于 P,Q 两点，且 $|PQ|=4\sqrt{2}$，则$\triangle PFO$ 的面积为(O 为坐标原点)______.

15. 已知表面积为 100π 的球 O 的球面上有三个点 M,N,P，若 $\angle OMN=60°$，$OM=MP$，则当 O,M,N,P 不共面时，四面体 $OMNP$ 体积的最大值为______.

16. $\frac{1}{\sqrt{2}+2}+\frac{1}{2\sqrt{3}+3\sqrt{2}}+\frac{1}{6+4\sqrt{3}}+\cdots+\frac{1}{2020\sqrt{2021}+2021\sqrt{2020}}=$______.

三、解答题：解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

17. (本小题满分 12 分)

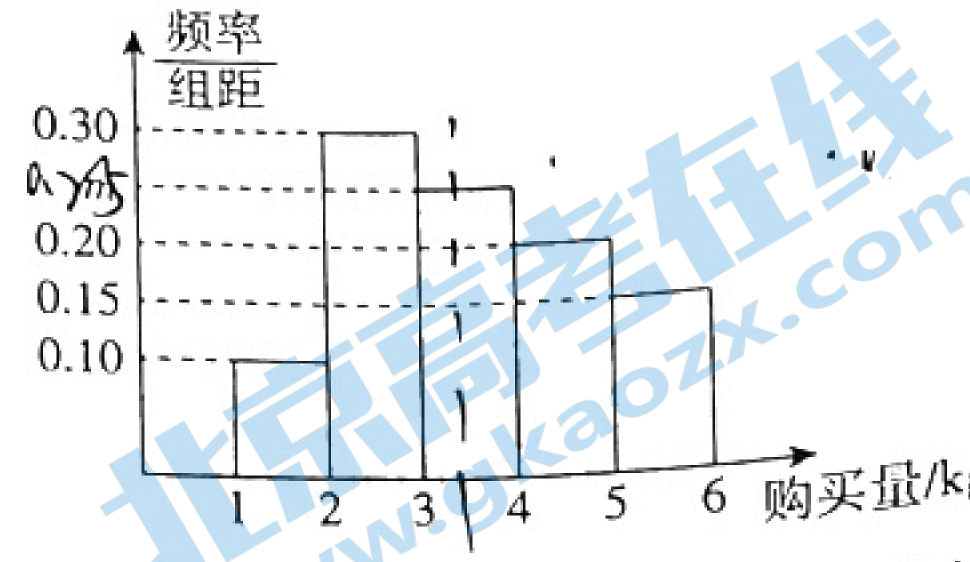
已知$\triangle ABC$ 中，$\tan(\frac{5\pi}{4}-A)=\frac{1}{3}$.

(1)求 $\sin^2A+\cos2A$ 的值；

(2)若$\triangle ABC$ 的面积为 4，$AB=4$，求 BC 的值.

18.（本小题满分 12 分）

某公司新推出一款水果口味的袋装小蛋糕，为了调查消费者对该款小蛋糕口感的满意程度，现在 A 超市进行特价销售活动，规定每个顾客最多购买 6 kg 的小蛋糕，现将特价销售活动期间小蛋糕的购买情况统计如图所示.



(1) 求 m 的值；

(2) 估计该款小蛋糕购买量的中位数以及平均数（同一组中的数据用该组区间的中点值作代表）；

(3) 为了研究消费者对蛋糕口感的满意程度与消费者的性别是否具有相关性，导购员作出了如下统计，判断是否有 99.9% 的把握认为对蛋糕口感的满意程度与消费者的性别有关？

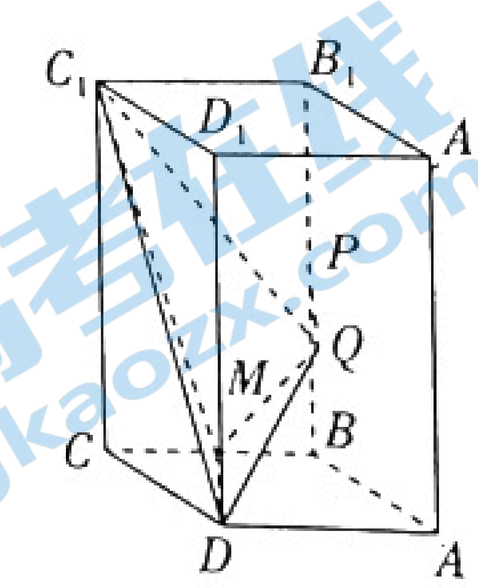
	男性顾客	女性顾客
对蛋糕的口感满意	40 a	80 b
对蛋糕的口感不满意	60 c	20 d

附：$K^2=\dfrac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$.

$P(K^2\geq k)$	0.100	0.050	0.010	0.001
k	2.706	3.841	6.635	10.828

19.（本小题满分 12 分）

已知直四棱柱 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 如图所示，其中四边形 $ABCD$ 是面积为 $2\sqrt{3}$ 的菱形，$\angle ABC=120^\circ$，$AA_1=2AB$，点 M，P 分别为线段 BC，BB_1 的中点，点 Q 为四边形 ADD_1A_1 的中心.



(1) 求证：$PQ\parallel$ 平面 C_1DM；

(2) 求四面体 C_1QMD 的体积.

20.（本小题满分 12 分）

已知函数 $f(x)=\dfrac{x^3-3mx^2+4}{4(e^{m-1}+1)}$.

(1) 当 $0<m<1$ 时，判断函数 $f(x)$ 的零点个数；

(2) 当 $m>1$ 时，求证：$f(x)+m^3>1$ 在 $x\in(0,+\infty)$ 上恒成立.

21.（本小题满分 12 分）

已知椭圆 $C:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的离心率为 $\frac{1}{2}$，且过点 $(\frac{1}{2},-\frac{3\sqrt{5}}{4})$. 椭圆 C 与圆 $C':x^2+y^2-6x+8=0$ 交于点 A.

(1)求椭圆 C 的方程；

(2)已知过点 A 的直线 l 与圆 C' 交于 A,M 两点，与椭圆 C 交于 A,N 两点，若 $12|AM|=7|AN|$，求直线 l 的方程.

请考生从第 22、23 题中任选一题作答，并用 2B 铅笔将答题卡上所选题目对应的方框涂黑，按所选涂题号进行评分；多涂、多答，按所涂的首题进行评分；不涂，按本选考题的首题进行评分.

22.【选修 4—4：坐标系与参数方程】（本小题满分 10 分）

已知平面直角坐标系 xOy 中，直线 l 的参数方程为 $\begin{cases}x=-t\\y=1-\sqrt{3}t\end{cases}$（$t$ 为参数），曲线 C 的参数方程为 $\begin{cases}x=2\cos\theta\\y=2+2\sin\theta\end{cases}$（$\theta$ 为参数）；以原点为极点，x 轴正半轴为极轴建立极坐标系，其中点 M 的极坐标为 $(1,\frac{\pi}{2})$.

(1)求直线 l 以及曲线 C 的普通方程；

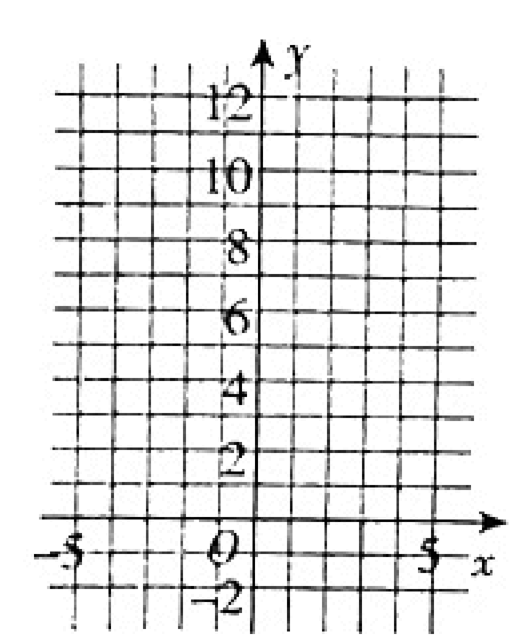
(2)若直线 l 与曲线 C 交于 A,B 两点，求 $\left|\frac{1}{|MA|}-\frac{1}{|MB|}\right|$ 的值.

23.【选修 4—5：不等式选讲】（本小题满分 10 分）

已知函数 $f(x)=|2x-3|+|x+1|$.

(1)在下列网格纸中作出函数 $f(x)$ 的图象；

(2)若关于 x 的不等式 $f(x)+x^2\geq 3x+a$ 恒成立，求实数 a 的取值范围.



百校联盟 2021 届普通高中教育教学质量监测考试

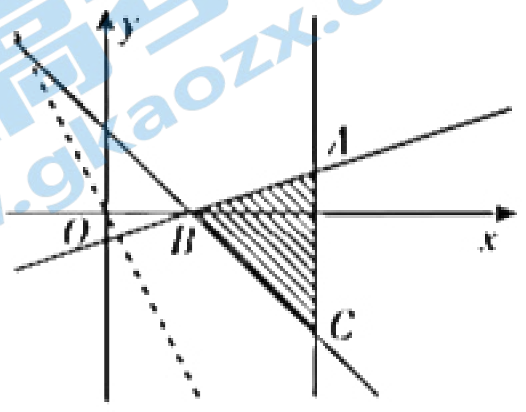
全国Ⅰ卷　文科数学　参考答案

1. C 【解析】依题意，$A=\{x|(x-3)(x+5)<0\}=\{x|-5<x<3\}$，故 $A\cap B=\{-4,-1,2\}$.

2. C 【解析】依题意，$\frac{4-5i}{2+3i}=\frac{(4-5i)(2-3i)}{(2+3i)(2-3i)}=-\frac{7}{13}-\frac{22}{13}i$，对应的点为$(-\frac{7}{13},-\frac{22}{13})$，位于第三象限.

3. D 【解析】由图可知，①正确；2020 年 12 月煤炭进口量比 11 月份增加量为 3908－1176＝2732 万吨，故②正确；2020 年 3 月至 10 月煤炭进口量的月平均值为 2316.25 万吨，超过 2000 万吨，故③正确.

4. B 【解析】作出不等式组所表示的平面区域如图阴影部分所示；观察可知，当直线 $z=2x+y$ 过点 $B(2,0)$时，z 有最小值 4.



5. D 【解析】设数列$\{a_n\}$的公比为 q，则 $a_3a_8=a_5a_6=2a_6^2$，所以 $q=\frac{1}{2}$；而 $a_3+a_6=\frac{5}{4}$，

则 $a_2+a_5=\frac{\frac{5}{4}}{\frac{1}{2}}=\frac{5}{2}$，$a_1+a_4=\frac{\frac{5}{2}}{\frac{1}{2}}=5$，故 $S_6=5+\frac{5}{2}+\frac{5}{4}=\frac{35}{4}$.

6. D 【解析】先将甲、乙、丙、丁 4 人分为 2 组，所有可能的情况为(甲乙丙、丁)，(甲乙丁、丙)，(甲丙丁、乙)，(乙丙丁、甲)，(甲乙、丙丁)，(甲丙、乙丁)，(甲丁、乙丙)，共 7 种，故报名的所有情况为有 14 种，其中满足条件的为(甲乙丙、丁)，(甲乙丁、丙)，(丁、甲乙丙)，(丙、甲乙丁)，(甲乙、丙丁)，(丙丁、甲乙)，共 6 种，故所求概率 $P=\frac{6}{14}=\frac{3}{7}$.

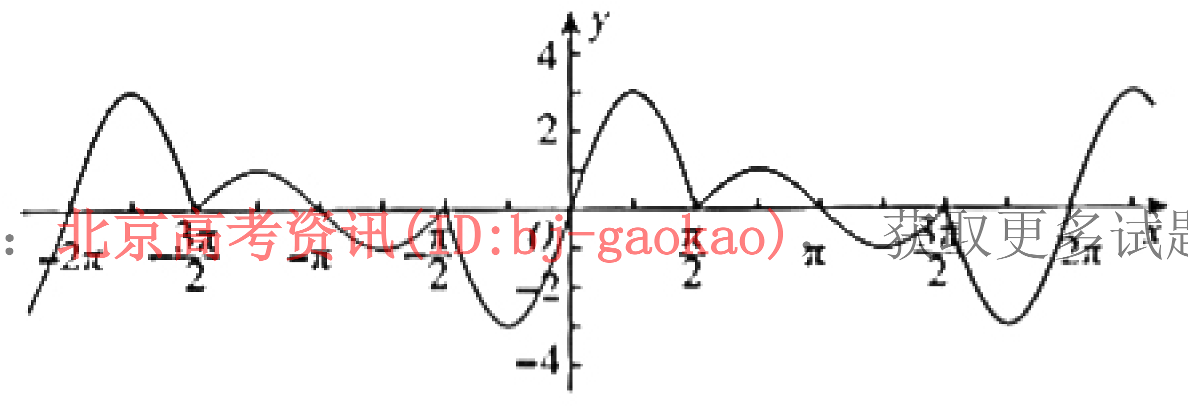
7. B 【解析】依题意，圆 $C:(x-3)^2+(y-2)^2=11$，圆心 $C(3,2)$，代入 $x-my+3=0$ 中，解得 $m=3$，故 $M(-5,3)$，则$|MN|=\sqrt{|MC|^2-r^2}=\sqrt{65-11}=3\sqrt{6}$.

8. C 【解析】依题意，$f(x)=x(1+\cos x)+2x+\frac{1}{x}+3$，易知 $y=x(1+\cos x)$，$y=2x+\frac{1}{x}$均为奇函数，图象关于原点对称，故函数 $f(x)$的图象关于$(0,3)$对称，故 A、D 错误；易知 $f(0.1)>13>f(\frac{\pi}{2})$，故 B 错误；当 $x>0$ 时，$x(1+\cos x)\geqslant 0$，$2x+\frac{1}{x}+3\geqslant 2\sqrt{2}+3$，即 $f(x)>5$，即函数 $y=f(x)-5$ 在$(0,+\infty)$上无零点.

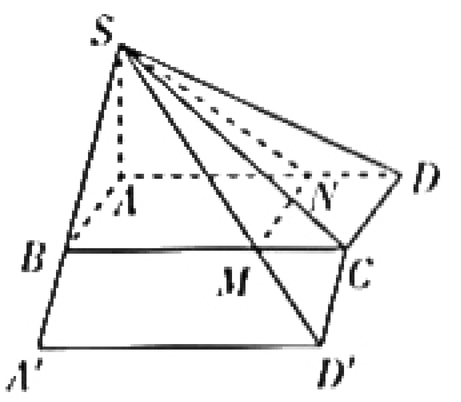
9. B 【解析】由题意，不妨设点 P 在第一象限，延长 F_1M 交直线 $y=\tan\alpha\cdot x(0<\alpha<\frac{\pi}{2})$于点 P，则由角平分线的性质可得 M 为 PF_1 的中点，$|OP|=|OF_1|=c$，易得 $P(a,b)$，则 $M(\frac{a+c}{2},\frac{b}{2})$代入双曲线 $C:\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ 中，则$\frac{(\frac{a+c}{2})^2}{a^2}-\frac{(\frac{b}{2})^2}{b^2}=1$，解得 $e=\frac{c}{a}=\sqrt{5}-1$.

10. C 【解析】依题意，$f(x)=\begin{cases}3\sin 2x, -\frac{\pi}{2}+2k\pi\leqslant x<\frac{\pi}{2}+2k\pi\\ -\sin 2x, \frac{\pi}{2}+2k\pi\leqslant x<\frac{3\pi}{2}+2k\pi\end{cases}(k\in Z)$，作出函数 $f(x)$的大致图象如下图所示；当 $x\in[0,\frac{3\pi}{2}]$时，$f(x)\in[-1,3]$，故 A 错误；函数 $f(x)$的最小正周期为 2π，故 B 错误；函数 $f(x)$的对

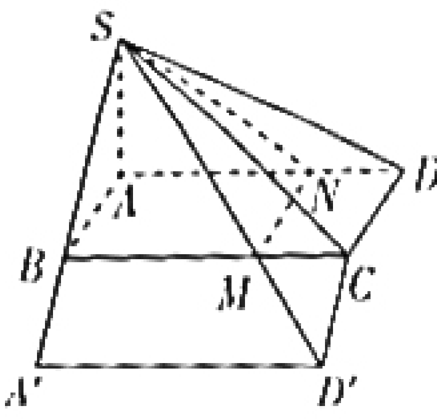
称中心为$(k\pi,0)(k\in Z)$，故 D 错误.



11. A 【解析】作出图形如右图所示；不妨设 $AB=1$；由 $\sin\angle SCA=\frac{\sqrt{39}}{13}$可得 $SA=\sqrt{3}$，要使 $SM+MD$ 最短，需将底面 $ABCD$ 沿 BC 翻折到平面 $A'BCD'$，使平面 $A'BCD'$与平面 SBC 重合；连接 SD'，则 $SM+MD\geqslant SD'$，即 S,M,D'共线时，取得最小值，此时，由 $AB=1$，$SA=\sqrt{3}$，则 $SB=2$，故 $SA'=3$，$A'D'=AD=3$，故 $BM=2$，作 $MN/\!/CD$ 交 AD 于 N，连接 SN，则 SM 与平面 SAD 所成角为$\angle MSN$，故 $\tan\angle MSN=\frac{MN}{SN}=\frac{\sqrt{7}}{7}$.



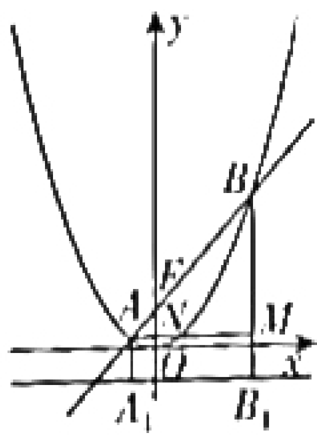
11. A 【解析】作出图形如右图所示；不妨设 $AB=1$；由 $\sin\angle SCA=\frac{\sqrt{39}}{13}$ 可得 $SA=\sqrt{3}$，要使 $SM+MD$ 最短，需将底面 $ABCD$ 沿 BC 翻折到平面 $A'BCD'$，使平面 $A'BCD'$ 与平面 SBC 重合；连接 SD'，则 $SM+MD\geq SD'$，即 S,M,D' 共线时，取得最小值，此时，由 $AB=1$，$SA=\sqrt{3}$，则 $SB=2$，故 $SA'=3$，$A'D'=AD=3$，故 $BM=2$，作 $MN\parallel CD$ 交 AD 于 N，连接 SN，则 SM 与平面 SAD 所成角为 $\angle MSN$，故 $\tan\angle MSN=\frac{MN}{SN}=\frac{\sqrt{7}}{7}$.



12. D 【解析】依题意，$m(x-\ln x)=x^2-2x$，则 $m=\frac{x^2-2x}{x-\ln x}$；故问题转化为 $y=m$ 与 $f(x)=\frac{x^2-2x}{x-\ln x}$ 的图象有交点；$f'(x)=\frac{(2x-2)(x-\ln x)-(1-\frac{1}{x})(x^2-2x)}{(x-\ln x)^2}=\frac{(x-1)(2x-2\ln x)-(x-1)(x-2)}{(x-\ln x)^2}=\frac{(x-1)(x-2\ln x+2)}{(x-\ln x)^2}$，易知 $x-2\ln x+2>0$，故当 $x\in[\frac{1}{3},1)$ 时，$f'(x)<0$，当 $x\in(1,3]$ 时，$f'(x)>0$；而 $f(1)=-1$，$f(\frac{1}{3})=\frac{\frac{1}{9}-\frac{2}{3}}{\frac{1}{3}-\ln\frac{1}{3}}<0$，$f(3)=\frac{3}{3-\ln 3}>0$，故实数 m 的取值范围为 $[-1,\frac{3}{3-\ln 3}]$.

13. $\frac{4\sqrt{5}}{3}$ 【解析】依题意，$2m^2+3m\cdot n=0$，故 $2\times 10+3\times\sqrt{10}\times|n|\times(-\frac{\sqrt{2}}{2})=0$，解得 $|n|=\frac{4\sqrt{5}}{3}$.

14. $\frac{5}{8}$ 【解析】作出图形如图所示；分别过点 A,B 作准线的垂线，垂足为 A_1,B_1，过点 A 作 $AM\perp BB_1$，垂足为 M，线段 AM 与 y 轴交于点 N；设 $|AF|=x$，则 $|AA_1|=x$，$|BF|=|BB_1|=4x$，则 $\frac{|FN|}{|BM|}=\frac{|AF|}{|AB|}=\frac{1}{5}$，解得 $|FN|=\frac{3}{5}x$，故 $|FN|+|AA_1|=p$，即 $\frac{3}{5}x+x=p$，解得 $x=\frac{5}{8}p$，故 $\frac{|AF|}{p}=\frac{5}{8}$.



15. $\frac{2\sqrt{2}}{3}$ 【解析】易知 $AB=2$；设 O_1 为 $\triangle ABC$ 的中心，则 $OO_1\perp$ 平面 ABC，则 $O_1A=\sqrt{3}\times\frac{2}{3}=\frac{2\sqrt{3}}{3}$，由 SA 是球 O 的直径可知，$\angle ABS=90^\circ$，又 $AB=BS=2$，所以 $AS=2\sqrt{2}$，在 $Rt\triangle AOO_1$ 中，$O_1O=\sqrt{(\frac{AS}{2})^2-O_1A^2}=\frac{\sqrt{6}}{3}$，从而点 S 到平面 ABC 的距离 $d=2O_1O=\frac{2\sqrt{6}}{3}$，故 $V=\frac{1}{3}\cdot S_{\triangle ABC}\cdot d=\frac{2\sqrt{2}}{3}$.

16. $1-\frac{\sqrt{2021}}{2021}$ 【解析】令 $a_k=\frac{1}{k\sqrt{k+1}+(k+1)\sqrt{k}}=\frac{1}{\sqrt{k}\cdot\sqrt{k+1}\cdot(\sqrt{k}+\sqrt{k+1})}=\frac{\sqrt{k+1}-\sqrt{k}}{\sqrt{k}\cdot\sqrt{k+1}}=\frac{1}{\sqrt{k}}-\frac{1}{\sqrt{k+1}}$，故 $\frac{1}{1\sqrt{2}+2\sqrt{1}}+\frac{1}{2\sqrt{3}+3\sqrt{2}}+\frac{1}{3\sqrt{4}+4\sqrt{3}}+\cdots+\frac{1}{2020\sqrt{2021}+2021\sqrt{2020}}=1-\frac{\sqrt{2021}}{2021}$.

17.【解析】(1) 依题意，$a(\cos C-\frac{\sqrt{3}}{3}\sin C)=b$，…… 1分

由正弦定理，$\sin A\cos C-\frac{\sqrt{3}}{3}\sin A\sin C=\sin B$，…… 2分

所以 $\sin A\cos C-\frac{\sqrt{3}}{3}\sin A\sin C=\sin A\cos C+\sin C\cos A$，…… 4分

即 $-\frac{\sqrt{3}}{3}\sin A\sin C=\sin C\cos A$，又 $\sin C>0$，所以 $\tan A=-\sqrt{3}$，

因为 $A\in(0,\pi)$，故 $A=\frac{2\pi}{3}$. …… 6分

(2) 因为 $a^2+b^2-\sqrt{3}ab=c^2$，故 $\cos C=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}=\frac{\sqrt{3}}{2}$，故 $C=\frac{\pi}{6}$；…… 8分

由(1)可知，$\angle BAC=\frac{2\pi}{3}$，则 $\angle ABC=\frac{\pi}{6}$，所以 $AB=AC=2$；…… 9分

在 $\triangle MAB$ 中，$\angle MAB=\frac{\pi}{3}$，由余弦定理，

$MB^2=MA^2+AB^2-2MA\cdot AB\cos\angle MAB=9+4-6=7$，…… 11分

所以 $MB=\sqrt{7}$. …… 12分

18.【解析】(1) 依题意，$0.1+0.15+0.2+m+0.3=1$，解得 $m=0.25$；…… 3分

(2) 蛋糕购买量的中位数为 $3+\frac{0.5-0.4}{0.25}\times 1=3.4$；…… 5分

平均数为 $1.5\times 0.10+2.5\times 0.30+3.5\times 0.25+4.5\times 0.20+5.5\times 0.15=3.5$；…… 7分

(3) 由于 $K^2=\frac{200\times(40\times 20-60\times 80)^2}{100\times 100\times 120\times 80}\approx 33.333>10.828$，…… 10分

18.【解析】(1)依题意，$0.1+0.15+0.2+m+0.3=1$，解得 $m=0.25$；……………………………… 3分

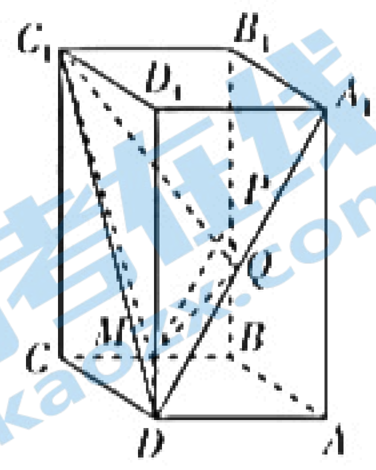
(2)蛋糕购买量的中位数为 $3+\frac{0.5-0.4}{0.25}\times1=3.4$；……………………………… 5分

平均数为 $1.5\times0.10+2.5\times0.30+3.5\times0.25+4.5\times0.20+5.5\times0.15=3.5$；……………… 7分

(3)由于 $K^2=\frac{200\times(40\times20-60\times80)^2}{100\times100\times120\times80}\approx33.333>10.828$，……………………… 10分

所以有99.9%的把握认为对蛋糕口感的满意程度与消费者的性别有关. ……………………… 12分

19.【解析】(1)连接 PM，A_1Q，因为点 M，P 分别为线段 BC，BB_1 的中点，……………………… 1分



故 $MP\parallel A_1D$，$MP=\frac{1}{2}A_1D$，……………………………… 2分

即 $MP\parallel QD$，$MP=QD$，故四边形 $MPQD$ 为平行四边形，……………… 3分

故 $PQ\parallel MD$；……………………………… 4分

而 $PQ\not\subset$ 平面 C_1DM，$MD\subset$ 平面 C_1DM，故 $PQ\parallel$ 平面 C_1DM；……………… 5分

(2)由(1)可知，$PQ\parallel$ 平面 C_1DM，所以点 Q 到平面 C_1DM 的距离与点 P 到平面 C_1DM 的距离相等，则四面体 C_1QMD 的体积 $V_{Q-C_1DM}=V_{P-C_1DM}=V_{D-C_1MP}$. ……………………… 6分

因为四边形 $ABCD$ 是面积为 $2\sqrt{3}$ 的菱形，$\angle ABC=120°$，故 $2\times\frac{\sqrt{3}}{4}\times AB^2=2\sqrt{3}$，解得 $AB=2$，……… 8分

易知 $DM\perp$ 平面 BB_1C_1C，故 $DM=\sqrt{3}$. ……………………………… 9分

$S_{\triangle C_1MP}=S_{梯形BMC_1B_1}-S_{\triangle BPM}-S_{\triangle B_1PC_1}=\frac{1}{2}\times(1+2)\times4-\frac{1}{2}\times1\times2-\frac{1}{2}\times2\times2=3$；

所以 $V_{D-C_1MP}=\frac{1}{3}S_{\triangle C_1MP}\cdot DM=\frac{1}{3}\times3\times\sqrt{3}=\sqrt{3}$，即四面体 C_1QMD 的体积为 $\sqrt{3}$. ……………… 12分

20.【解析】(1)依题意，$f'(x)=2-\frac{1}{e^x}=\frac{2e^x-1}{e^x}$，……………………………… 1分

令 $f'(x)=0$，解得 $x=-\ln2$，……………………………… 2分

故当 $x\in(-\infty,-\ln2)$ 时，$f'(x)<0$，当 $x\in(-\ln2,+\infty)$ 时，$f'(x)>0$，……………… 4分

即函数 $f(x)$ 的单调递减区间为 $(-\infty,-\ln2)$，递增区间为 $(-\ln2,+\infty)$. ……………… 5分

(2)由 $f(x)>(m+1)x$ 得 $\frac{1}{e^x}>(m-1)x$ 等价于 $(m-1)xe^x<1$ 恒成立，

当 $m=1$ 时，不等式为 $0<1$，符合题意；……………………………… 6分

当 $m>1$ 时，令 $x=\frac{1}{m-1}$，则不等式左侧为 $e^{\frac{1}{m-1}}>1$，不符合题意. ……………………… 8分

当 $m<1$ 时，令 $g(x)=(m-1)xe^x$，则 $g'(x)=(m-1)(x+1)e^x$，

当 $x<-1$ 时，$g'(x)>0$，$g(x)$ 单调递增，当 $x>-1$ 时，$g'(x)<0$，$g(x)$ 单调递减，

所以 $g(x)_{\max}=g(-1)=-(m-1)e^{-1}$，……………………………… 10分

解不等式 $-(m-1)e^{-1}<1$ 得 $m>1-e$，故 $1-e<m<1$，……………………………… 11分

综上，实数 m 的取值范围为 $(1-e,1]$. ……………………………… 12分

21.【解析】(1)因为圆 $C':(x-3)^2+y^2=1$，设直线 $l_1:k'x-y+m=0$；

联立 $\begin{cases}k'x-y+m=0\\ \frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1\end{cases}$，得 $(3+4k'^2)x^2+8k'mx+4m^2-12=0$，

故 $\Delta=(8k'm)^2-4(4m^2-12)(3+4k'^2)=0$，则 $4k'^2+3=m^2$①；……………………… 2分

而圆 C' 的圆心 $(3,0)$，半径为1，

故 $\frac{|3k'+m|}{\sqrt{1+k'^2}}=1$，即 $8k'^2+6k'm+m^2=1$②. ……………………………… 3分

联立①②，解得 $k'=\pm\frac{\sqrt{15}}{15}$，即直线 l_1 的斜率为 $\pm\frac{\sqrt{15}}{15}$. ……………………… 5分

(2)设 $M(x_M,y_M)$，$N(x_N,y_N)$，易知 $A(2,0)$；

显然直线 l_2 的斜率存在，设直线 l_2 的方程为 $y=k(x-2)$.

由方程组 $\begin{cases}y=k(x-2)\\ \frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1\end{cases}$，消去 y 得，$(4k^2+3)x^2-16k^2x+16k^2-12=0$.

所以 $x_N\cdot2=\frac{16k^2-12}{4k^2+3}$，解得 $x_N=\frac{8k^2-6}{4k^2+3}$. ……………………………… 7分

由方程组 $\begin{cases}y=k(x-2)\\ (x-3)^2+y^2=1\end{cases}$，消去 y 得，$(k^2+1)x^2-(4k^2+6)x+4k^2+8=0$，

所以 $x_M\cdot2=\frac{4k^2+8}{k^2+1}$，解得 $x_M=\frac{2k^2+4}{k^2+1}$. ……………………………… 9分

因为 $12|AM|=7|AN|$，所以 $2-x_N=\frac{12}{7}(x_M-2)$.

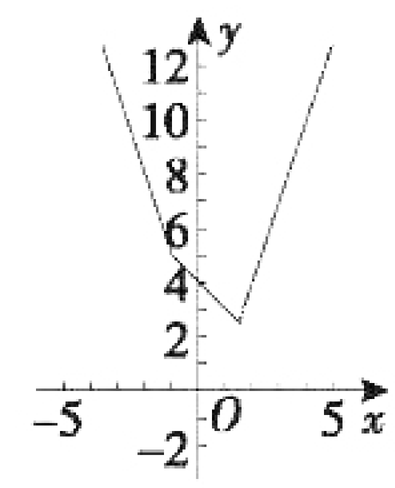
(2)易知点 $M(0,1)$；设直线 l 的参数方程为 $\begin{cases} x=\frac{1}{2}t \\ y=1+\frac{\sqrt{3}}{2}t \end{cases}$ (t 为参数)， ………………………………………… 5 分

设点 A,B 对应的参数分别 t_1,t_2，将直线 l 的参数方程代入 $x^2+y^2-4y=0$，

得 $t^2-\sqrt{3}t-3=0$，所以 $t_1t_2=-3,t_1+t_2=\sqrt{3}$. ………………………………………………………… 8 分

由于直线 l 过 $M(0,1)$，故 $\left|\frac{1}{|MA|}-\frac{1}{|MB|}\right|=\frac{|t_1+t_2|}{|t_1t_2|}=\frac{\sqrt{3}}{3}$. …………………………………………… 10 分

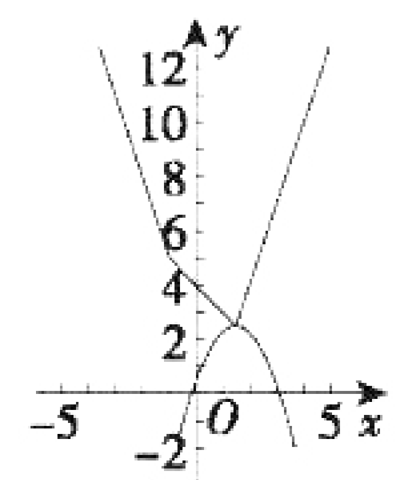
23.【解析】(1)依题意，$f(x)=\begin{cases} 3x-2,x>\frac{3}{2} \\ 4-x,-1\leqslant x\leqslant\frac{3}{2} \\ 2-3x,x<-1 \end{cases}$， ………………………………………………… 2 分



作出函数 $f(x)$ 的图象如图所示. ……………………………………………………………………… 5 分

(2)依题意，如图所示，$|2x-3|+|x+1|+x^2\geqslant 3x+a$，

故 $|2x-3|+|x+1|\geqslant -x^2+3x+a$， …………………………………………………………… 6 分



结合二次函数 $y=-x^2+3x+a$ 的图象可知，

临界状态为 $y=-x^2+3x+a$ 过 $y=f(x)$ 的最低点 $(\frac{3}{2},\frac{5}{2})$，

将 $(\frac{3}{2},\frac{5}{2})$ 代入 $y=-x^2+3x+a$ 中，解得 $a=\frac{1}{4}$， ………………………………………… 9 分

故实数 a 的取值范围为 $(-\infty,\frac{1}{4}]$. ……………………………………………………………… 10 分

全国Ⅱ卷　文科数学

注意事项：

1. 本试卷分第Ⅰ卷（选择题）和第Ⅱ卷（非选择题）两部分.
2. 答题前，考生务必将自己的姓名、准考证号填写在本试卷相应的位置.
3. 全部答案写在答题卡上，写在本试卷上无效.
4. 本试卷满分 150 分，测试时间 120 分钟.
5. 考试范围：高考全部内容.

第Ⅰ卷

一、选择题：本大题共 12 小题，每小题 5 分，在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.

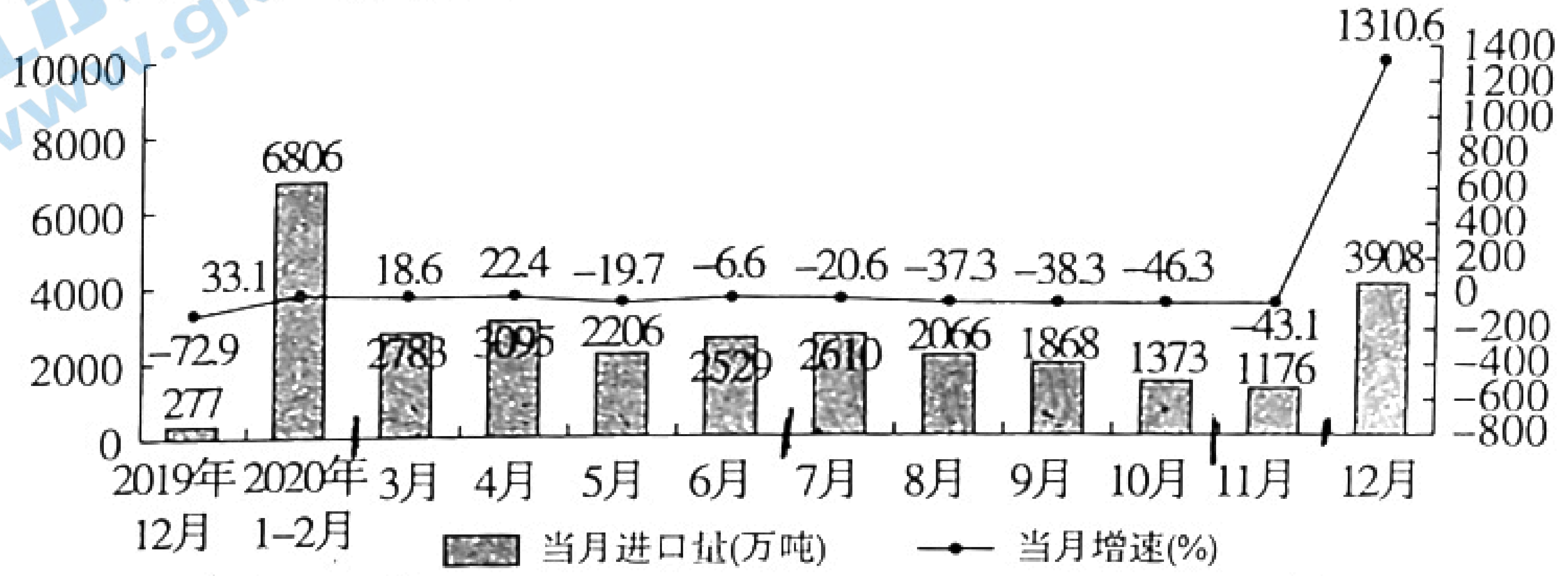
若集合 $A=\{2,3,4,5,6\}$，$B=\{x|(x+2)(x-5)<0\}$，则 $A\cap B=$

A. $\{2,3,4,5\}$　　B. $\{2,3,4\}$　　C. $\{5,6\}$　　D. $\{4,5,6\}$

若 $z_1=2+3i$，$z_2=4+i$，则 $|z_1-z_2|=$

A. 2　　B. $\sqrt{2}$　　C. $2\sqrt{2}$　　D. $2\sqrt{3}$

国家统计局发布的 2020 年煤炭进口月度走势图如图所示，现有如下说法：



①2020 年 7 月至 11 月期间，我国月煤炭的进口量逐渐减少；

②2020 年 12 月煤炭进口量比 11 月份增加 2732 万吨；

③2020 年 3 月至 10 月煤炭进口量的月平均值超过 2000 万吨.

则上述说法正确的个数为

A. 0　　B. 1　　C. 2　　D. 3

4. 若 $x,y\in(0,\frac{\pi}{2})\cup(\frac{\pi}{2},\pi)$，且 $\cos x>\cos y$，则下列不等式恒成立的是

A. $\tan x>\tan y$　　B. $\tan x<\tan y$　　C. $x^{\frac{1}{3}}>y^{\frac{1}{3}}$　　D. $x^{\frac{1}{3}}<y^{\frac{1}{3}}$

5. 已知等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n，若 $S_9=90$，$a_3=4$，则数列 $\{a_n\}$ 的公差为

A. -2　　B. 2　　C. -3　　D. 3

6. 学校举行庆祝元旦晚会，甲、乙、丙、丁计划报名参加晚会的相声、小品这 2 个节目，每个同学限报 1 个节目，每个节目都要有人报名，则甲、乙两人所报节目相同的概率为

A. $\frac{2}{7}$　　B. $\frac{3}{14}$　　C. $\frac{6}{7}$　　D. $\frac{3}{7}$

7. 若点 $M(a,a)$ 不在圆 $C:x^2+y^2-4x-6y+b=0$ 上，则实数 b 的取值范围为

A. $(-\infty,13)$　　B. $(\frac{25}{2},13)$　　C. $(\frac{23}{2},13)$　　D. $(-\infty,\frac{25}{2})$

8. 已知函数 $f(x)$ 是定义域为 $\mathbf{R}$ 的偶函数，且当 $x\geqslant0$ 时，$f(x)=\begin{cases}\sqrt{1-x^2},0\leqslant x\leqslant1\\ \frac{2}{3^x},x>1\end{cases}$，若 $y=f(x)-m$ 有 2 个零

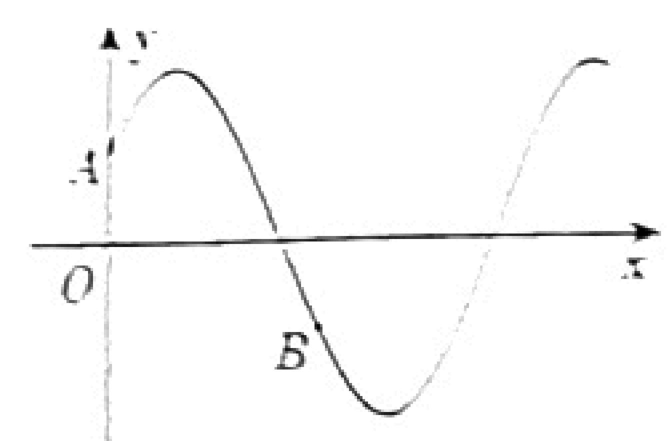
，则实数 m 的值不可能为

A. $\frac{4}{3}$　　B. 0　　C. $\frac{2}{3}$　　D. $\frac{1}{3}$

已知双曲线 $C:\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 的左、右焦点分别为 F_1、F_2，记双曲线 C 过一、三象限的渐近线的倾斜角为 α，若点 M 在过原点且倾斜角为 $\frac{\alpha}{2}$ 的直线上，且 $|MF_1|-|MF_2|=2a$，$\angle OMF_2=90°$，则双曲线 C 的离心率为

A. $2\sqrt{5}-2$　　B. $\sqrt{5}-1$　　C. $2\sqrt{5}-1$　　D. $\sqrt{5}$

0. 已知函数 $f(x)=4\cos(\omega x-\varphi)(\omega>0,-\frac{\pi}{2}<\varphi<\frac{\pi}{2})$ 的部分图象如图所示，其中 $A(0,2)$，$B(\frac{\pi}{3},-2)$，将函数 $f(x)$ 的图象的横坐标伸长为原来的 2 倍，再向右平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位后，得到函数 $g(x)$ 的图象，则函数 $g(x)$ 的单调递增区间为



A. $[-\frac{5\pi}{18}+\frac{4k\pi}{3},\frac{7\pi}{18}+\frac{4k\pi}{3}](k\in Z)$

B. $[\frac{7\pi}{18}+\frac{4k\pi}{3},\frac{19\pi}{18}+\frac{4k\pi}{3}](k\in Z)$

C. $[-\frac{13\pi}{18}+\frac{4k\pi}{3},-\frac{\pi}{18}+\frac{4k\pi}{3}](k\in Z)$

D. $[-\frac{\pi}{18}+\frac{4k\pi}{3},\frac{11\pi}{18}+\frac{4k\pi}{3}](k\in Z)$

11. 已知四棱锥 $S-ABCD$ 中，$SA\perp$ 平面 $ABCD$，四边形 $ABCD$ 为正方形，$SA=AB=6$，平面 α 过 SB、CD、SD 的中点，则平面 α 截四棱锥 $S-ABCD$ 所得的截面面积为

A. $\frac{45}{4}\sqrt{6}$　　B. $\frac{27\sqrt{6}}{2}$　　C. $9\sqrt{6}$　　D. $12\sqrt{6}$

12. 若 $\forall m,n\in R$，$e^{2n}+m^2-2n^2\geq 2n(e^n-m)+\lambda$ 恒成立，则实数 λ 的取值范围为

A. $(-\infty,\sqrt{2}]$　　B. $(-\infty,2]$　　C. $(-\infty,\frac{1}{2}]$　　D. $(-\infty,\frac{\sqrt{2}}{2}]$

第Ⅱ卷

本卷包括必考题和选考题两部分. 第 13 题～第 21 题为必考题，每个试题考生都必须作答. 第 22 题～第 23 题为选考题，考生根据要求作答.

二、填空题：本大题共 4 小题，每小题 5 分.

13. 已知平面向量 $m=(2,-3)$，$n=(1,\lambda)$，$p=(-1,4)$，若 m 与 n 共线，则 $n\cdot p=$______.

14. 已知抛物线 $C:y^2=2px(p>0)$ 的焦点为 F，若抛物线 C 与圆 $O:x^2+y^2=12$ 交于 P、Q 两点，且 $|PQ|=4\sqrt{2}$，则 $\triangle PFO$ 的面积为(O 为坐标原点)______.

15. 已知表面积为 100π 的球 O 的球面上有三个点 M、N、P，若 $\angle OMN=60°$，$OM=MP$，则当 O、M、N、P 不共面时，四面体 $OMNP$ 体积的最大值为______.

16. $\frac{1}{\sqrt{2}+2}+\frac{1}{2\sqrt{3}+3\sqrt{2}}+\frac{1}{6+4\sqrt{3}}+\cdots+\frac{1}{2020\sqrt{2021}+2021\sqrt{2020}}=$______.

三、解答题：解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

17. (本小题满分 12 分)

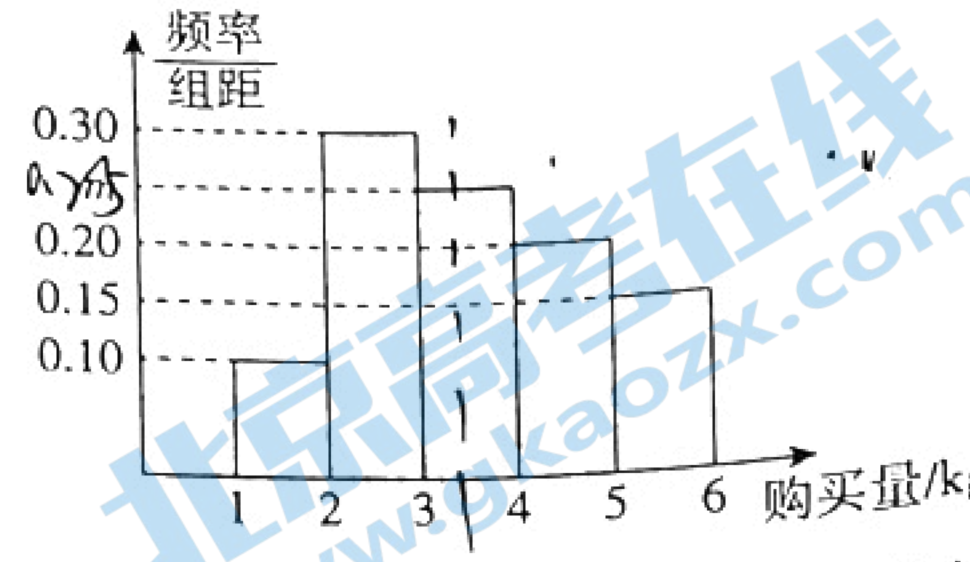
已知 $\triangle ABC$ 中，$\tan(\frac{5\pi}{4}-A)=\frac{1}{3}$.

(1)求 $\sin^2A+\cos2A$ 的值；

(2)若 $\triangle ABC$ 的面积为 4，$AB=4$，求 BC 的值.

18.（本小题满分 12 分）

某公司新推出一款水果口味的袋装小蛋糕，为了调查消费者对该款小蛋糕口感的满意程度，现在 A 超市进行特价销售活动，规定每个顾客最多购买 6 kg 的小蛋糕，现将特价销售活动期间小蛋糕的购买情况统计如图所示.



(1)求 m 的值；

(2)估计该款小蛋糕购买量的中位数以及平均数(同一组中的数据用该组区间的中点值作代表)；

(3)为了研究消费者对蛋糕口感的满意程度与消费者的性别是否具有相关性，导购员作出了如下统计，判断是否有 99.9% 的把握认为对蛋糕口感的满意程度与消费者的性别有关?

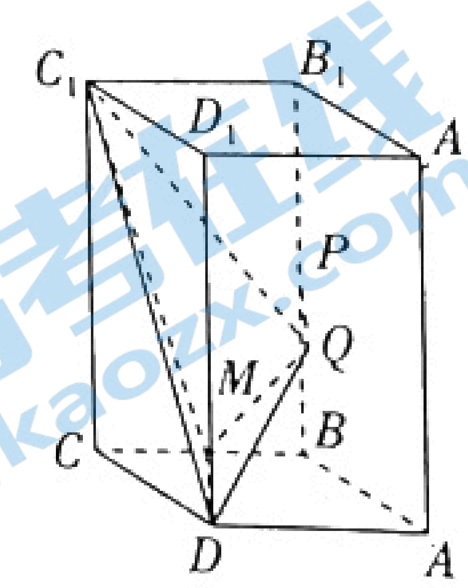
	男性顾客	女性顾客
对蛋糕的口感满意	40 a	80 b
对蛋糕的口感不满意	60 c	20 d

附：$K^2=\dfrac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$.

$P(K^2\geqslant k)$	0.100	0.050	0.010	0.001
k	2.706	3.841	6.635	10.828

19.（本小题满分 12 分）

已知直四棱柱 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 如图所示，其中四边形 $ABCD$ 是面积为 $2\sqrt{3}$ 的菱形，$\angle ABC=120°$，$AA_1=2AB$，点 M，P 分别为线段 BC，BB_1 的中点，点 Q 为四边形 ADD_1A_1 的中心.



(1)求证：$PQ\parallel$ 平面 C_1DM；

(2)求四面体 C_1QMD 的体积.

20.（本小题满分 12 分）

已知函数 $f(x)=\dfrac{x^3-3mx^2+4}{4(e^{m-1}+1)}$.

(1)当 $0<m<1$ 时，判断函数 $f(x)$ 的零点个数；

(2)当 $m>1$ 时，求证：$f(x)+m^3>1$ 在 $x\in(0,+\infty)$ 上恒成立.

21.(本小题满分 12 分)

已知椭圆 $C:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的离心率为 $\frac{1}{2}$，且过点 $(\frac{1}{2},-\frac{3\sqrt{5}}{4})$. 椭圆 C 与圆 $C':x^2+y^2-6x+8=0$ 交于点 A.

(1)求椭圆 C 的方程；

(2)已知过点 A 的直线 l 与圆 C' 交于 A,M 两点，与椭圆 C 交于 A,N 两点，若 $12|AM|=7|AN|$，求直线 l 的方程.

请考生从第 22、23 题中任选一题作答，并用 2B 铅笔将答题卡上所选题目对应的方框涂黑，按所选涂题号进行评分；多涂、多答，按所涂的首题进行评分；不涂，按本选考题的首题进行评分.

22.【选修 4—4：坐标系与参数方程】(本小题满分 10 分)

已知平面直角坐标系 xOy 中，直线 l 的参数方程为 $\begin{cases}x=-t\\y=1-\sqrt{3}t\end{cases}$ (t 为参数)，曲线 C 的参数方程为 $\begin{cases}x=2\cos\theta\\y=2+2\sin\theta\end{cases}$ (θ 为参数)；以原点为极点，x 轴正半轴为极轴建立极坐标系，其中点 M 的极坐标为 $(1,\frac{\pi}{2})$.

(1)求直线 l 以及曲线 C 的普通方程；

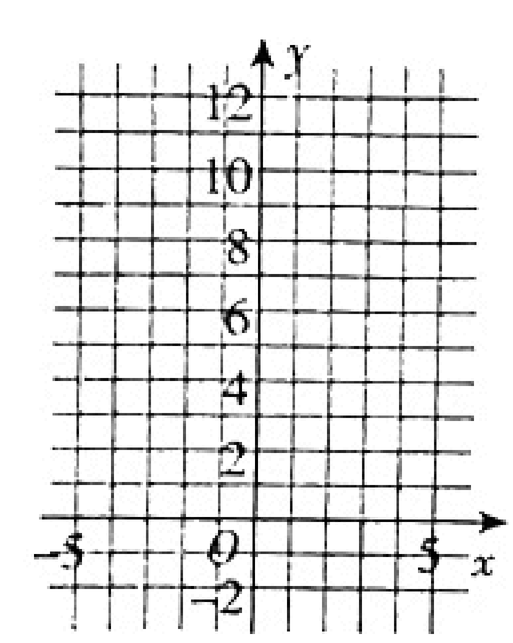
(2)若直线 l 与曲线 C 交于 A,B 两点，求 $|\frac{1}{|MA|}-\frac{1}{|MB|}|$ 的值.

23.【选修 4—5：不等式选讲】(本小题满分 10 分)

已知函数 $f(x)=|2x-3|+|x+1|$.

(1)在下列网格纸中作出函数 $f(x)$ 的图象；

(2)若关于 x 的不等式 $f(x)+x^2\geq 3x+a$ 恒成立，求实数 a 的取值范围.



百校联盟 2021 届普通高中教育教学质量监测考试

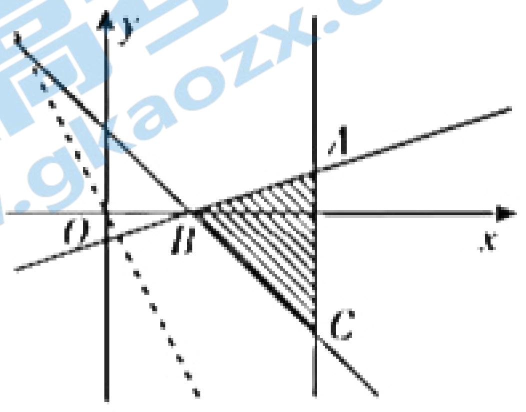
全国Ⅰ卷　文科数学　参考答案

1. C 【解析】依题意，$A=\{x|(x-3)(x+5)<0\}=\{x|-5<x<3\}$，故 $A\cap B=\{-4,-1,2\}$.

2. C 【解析】依题意，$\frac{4-5i}{2+3i}=\frac{(4-5i)(2-3i)}{(2+3i)(2-3i)}=-\frac{7}{13}-\frac{22}{13}i$，对应的点为$(-\frac{7}{13},-\frac{22}{13})$，位于第三象限.

3. D 【解析】由图可知，①正确；2020 年 12 月煤炭进口量比 11 月份增加量为 $3908-1176=2732$ 万吨，故②正确；2020 年 3 月至 10 月煤炭进口量的月平均值为 2316.25 万吨，超过 2000 万吨，故③正确.

4. B 【解析】作出不等式组所表示的平面区域如图阴影部分所示；观察可知，当直线 $z=2x+y$ 过点 $B(2,0)$时，z 有最小值 4.



5. D 【解析】设数列$\{a_n\}$的公比为 q，则 $a_3a_8=a_5a_6=2a_4^2$，所以 $q=\frac{1}{2}$；而 $a_3+a_6=\frac{5}{4}$，则 $a_2+a_5=\frac{\frac{5}{4}}{\frac{1}{2}}=\frac{5}{2}$，$a_1+a_4=\frac{\frac{5}{2}}{\frac{1}{2}}=5$，故 $S_6=5+\frac{5}{2}+\frac{5}{4}=\frac{35}{4}$.

6. D 【解析】先将甲、乙、丙、丁 4 人分为 2 组，所有可能的情况为(甲乙丙、丁)，(甲乙丁、丙)，(甲丙丁、乙)，(乙丙丁、甲)，(甲乙、丙丁)，(甲丙、乙丁)，(甲丁、乙丙)，共 7 种，故报名的所有情况为有 14 种，其中满足条件的为(甲乙丙、丁)，(甲乙丁、丙)，(丁、甲乙丙)，(丙、甲乙丁)，(甲乙、丙丁)，(丙丁、甲乙)，共 6 种，故所求概率 $P=\frac{6}{14}=\frac{3}{7}$.

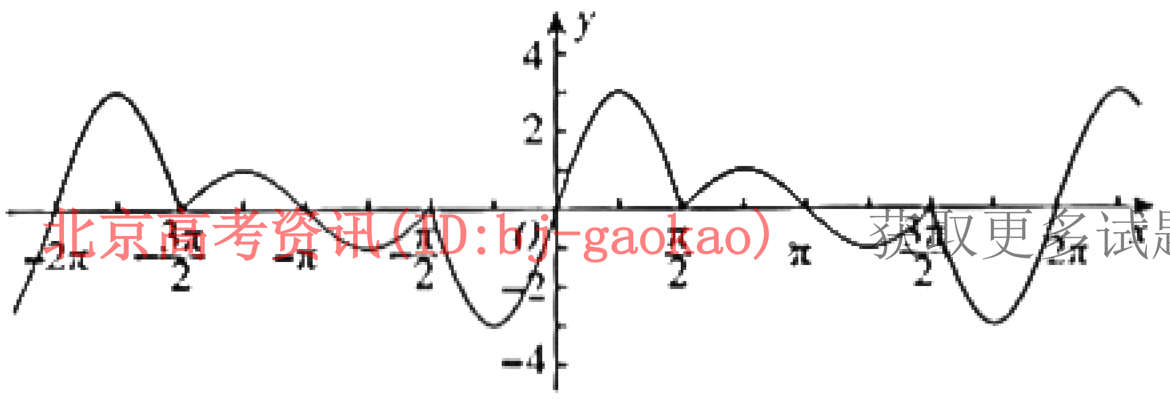
7. B 【解析】依题意，圆 C：$(x-3)^2+(y-2)^2=11$，圆心 $C(3,2)$，代入 $x-my+3=0$ 中，解得 $m=3$，故 $M(-5,3)$，则$|MN|=\sqrt{|MC|^2-r^2}=\sqrt{65-11}=3\sqrt{6}$.

8. C 【解析】依题意，$f(x)=x(1+\cos x)+2x+\frac{1}{x}+3$，易知 $y=x(1+\cos x)$，$y=2x+\frac{1}{x}$均为奇函数，图象关于原点对称，故函数 $f(x)$的图象关于$(0,3)$对称，故 A、D 错误；易知 $f(0.1)>13>f(\frac{\pi}{2})$，故 B 错误；当 $x>0$ 时，$x(1+\cos x)\geqslant 0$，$2x+\frac{1}{x}+3\geqslant 2\sqrt{2}+3$，即 $f(x)>5$，即函数 $y=f(x)-5$ 在$(0,+\infty)$上无零点.

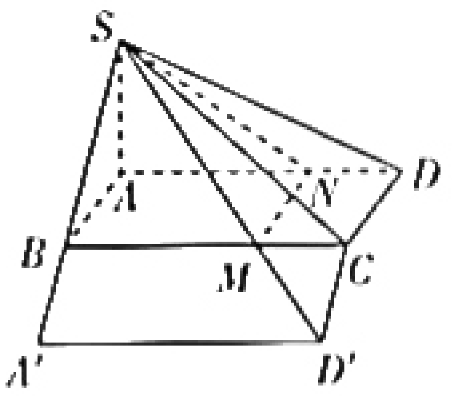
9. B 【解析】由题意，不妨设点 P 在第一象限，延长 F_1M 交直线 $y=\tan\alpha\cdot x(0<\alpha<\frac{\pi}{2})$于点 P，则由角平分线的性质可得 M 为 PF_1 的中点，$|OP|=|OF_1|=c$，易得 $P(a,b)$，则 $M(\frac{a+c}{2},\frac{b}{2})$代入双曲线 C：$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ 中，则$\frac{(\frac{a+c}{2})^2}{a^2}-\frac{(\frac{b}{2})^2}{b^2}=1$，解得 $e=\frac{c}{a}=\sqrt{5}-1$.

10. C 【解析】依题意，$f(x)=\begin{cases}3\sin 2x,-\frac{\pi}{2}+2k\pi\leqslant x<\frac{\pi}{2}+2k\pi\\-\sin 2x,\frac{\pi}{2}+2k\pi\leqslant x<\frac{3\pi}{2}+2k\pi\end{cases}(k\in Z)$，作出函数 $f(x)$的大致图象如下图所示；当 $x\in[0,\frac{3\pi}{2}]$时，$f(x)\in[-1,3]$，故 A 错误；函数 $f(x)$的最小正周期为 2π，故 B 错误；函数 $f(x)$的对

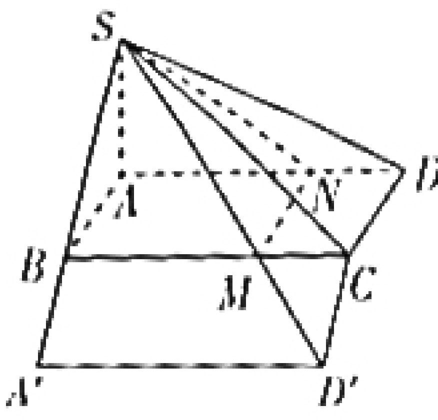
称中心为$(k\pi,0)(k\in Z)$，故 D 错误.



11. A 【解析】作出图形如右图所示；不妨设 $AB=1$；由 $\sin\angle SCA=\frac{\sqrt{39}}{13}$可得 $SA=\sqrt{3}$，要使 $SM+MD$ 最短，需将底面 $ABCD$ 沿 BC 翻折到平面 $A'BCD'$，使平面 $A'BCD'$与平面 SBC 重合；连接 SD'，则 $SM+MD\geqslant SD'$，即 S,M,D'共线时，取得最小值，此时，由 $AB=1$，$SA=\sqrt{3}$，则 $SB=2$，故 $SA'=3$，$A'D'=AD=3$，故 $BM=2$，作 $MN//CD$ 交 AD 于 N，连接 SN，则 SM 与平面 SAD 所成角为$\angle MSN$，故 $\tan\angle MSN=\frac{MN}{SN}=\frac{\sqrt{7}}{7}$.



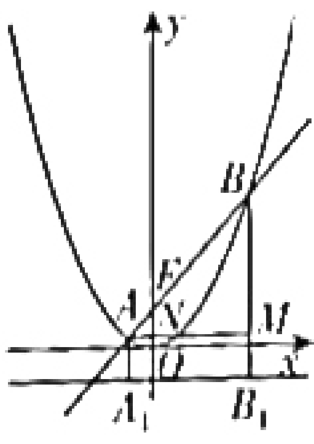
11. A 【解析】作出图形如右图所示；不妨设 $AB=1$；由 $\sin\angle SCA=\frac{\sqrt{39}}{13}$ 可得 $SA=\sqrt{3}$，要使 $SM+MD$ 最短，需将底面 $ABCD$ 沿 BC 翻折到平面 $A'BCD'$，使平面 $A'BCD'$ 与平面 SBC 重合；连接 SD'，则 $SM+MD\geqslant SD'$，即 S,M,D' 共线时，取得最小值，此时，由 $AB=1,SA=\sqrt{3}$，则 $SB=2$，故 $SA'=3,A'D'=AD=3$，故 $BM=2$，作 $MN\parallel CD$ 交 AD 于 N，连接 SN，则 SM 与平面 SAD 所成角为 $\angle MSN$，故 $\tan\angle MSN=\frac{MN}{SN}=\frac{\sqrt{7}}{7}$.



12. D 【解析】依题意，$m(x-\ln x)=x^2-2x$，则 $m=\frac{x^2-2x}{x-\ln x}$；故问题转化为 $y=m$ 与 $f(x)=\frac{x^2-2x}{x-\ln x}$ 的图象有交点；$f'(x)=\frac{(2x-2)(x-\ln x)-(1-\frac{1}{x})(x^2-2x)}{(x-\ln x)^2}=\frac{(x-1)(2x-2\ln x)-(x-1)(x-2)}{(x-\ln x)^2}=\frac{(x-1)(x-2\ln x+2)}{(x-\ln x)^2}$，易知 $x-2\ln x+2>0$，故当 $x\in[\frac{1}{3},1)$ 时，$f'(x)<0$，当 $x\in(1,3]$ 时，$f'(x)>0$；而 $f(1)=-1$，$f(\frac{1}{3})=\frac{\frac{1}{9}-\frac{2}{3}}{\frac{1}{3}-\ln\frac{1}{3}}<0$，$f(3)=\frac{3}{3-\ln 3}>0$，故实数 m 的取值范围为 $[-1,\frac{3}{3-\ln 3}]$.

13. $\frac{4\sqrt{5}}{3}$ 【解析】依题意，$2m^2+3m\cdot n=0$，故 $2\times10+3\times\sqrt{10}\times|n|\times(-\frac{\sqrt{2}}{2})=0$，解得 $|n|=\frac{4\sqrt{5}}{3}$.

14. $\frac{5}{8}$ 【解析】作出图形如图所示；分别过点 A,B 作准线的垂线，垂足为 A_1,B_1，过点 A 作 $AM\perp BB_1$，垂足为 M，线段 AM 与 y 轴交于点 N；设 $|AF|=x$，则 $|AA_1|=x$，$|BF|=|BB_1|=4x$，则 $\frac{|FN|}{|BM|}=\frac{|AF|}{|AB|}=\frac{1}{5}$，解得 $|FN|=\frac{3}{5}x$，故 $|FN|+|AA_1|=p$，即 $\frac{3}{5}x+x=p$，解得 $x=\frac{5}{8}p$，故 $\frac{|AF|}{p}=\frac{5}{8}$.



15. $\frac{2\sqrt{2}}{3}$ 【解析】易知 $AB=2$；设 O_1 为 $\triangle ABC$ 的中心，则 $OO_1\perp$ 平面 ABC，则 $O_1A=\sqrt{3}\times\frac{2}{3}=\frac{2\sqrt{3}}{3}$，由 SA 是球 O 的直径可知，$\angle ABS=90°$，又 $AB=BS=2$，所以 $AS=2\sqrt{2}$，在 $\mathrm{Rt}\triangle AOO_1$ 中，$O_1O=\sqrt{(\frac{AS}{2})^2-O_1A^2}=\frac{\sqrt{6}}{3}$，从而点 S 到平面 ABC 的距离 $d=2O_1O=\frac{2\sqrt{6}}{3}$，故 $V=\frac{1}{3}\cdot S_{\triangle ABC}\cdot d=\frac{2\sqrt{2}}{3}$.

16. $1-\frac{\sqrt{2021}}{2021}$ 【解析】令 $a_k=\frac{1}{k\sqrt{k+1}+(k+1)\sqrt{k}}=\frac{1}{\sqrt{k}\cdot\sqrt{k+1}\cdot(\sqrt{k}+\sqrt{k+1})}=\frac{\sqrt{k+1}-\sqrt{k}}{\sqrt{k}\cdot\sqrt{k+1}}=\frac{1}{\sqrt{k}}-\frac{1}{\sqrt{k+1}}$，故 $\frac{1}{1\sqrt{2}+2\sqrt{1}}+\frac{1}{2\sqrt{3}+3\sqrt{2}}+\frac{1}{3\sqrt{4}+4\sqrt{3}}+\cdots+\frac{1}{2020\sqrt{2021}+2021\sqrt{2020}}=1-\frac{\sqrt{2021}}{2021}$.

17.【解析】(1)依题意，$a(\cos C-\frac{\sqrt{3}}{3}\sin C)=b$，…………………………………… 1 分

由正弦定理，$\sin A\cos C-\frac{\sqrt{3}}{3}\sin A\sin C=\sin B$，…………………………………… 2 分

所以 $\sin A\cos C-\frac{\sqrt{3}}{3}\sin A\sin C=\sin A\cos C+\sin C\cos A$，…………………… 4 分

即 $-\frac{\sqrt{3}}{3}\sin A\sin C=\sin C\cos A$，又 $\sin C>0$，所以 $\tan A=-\sqrt{3}$，

因为 $A\in(0,\pi)$，故 $A=\frac{2\pi}{3}$. …………………………………… 6 分

(2)因为 $a^2+b^2-\sqrt{3}ab=c^2$，故 $\cos C=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}=\frac{\sqrt{3}}{2}$，故 $C=\frac{\pi}{6}$；…………………… 8 分

由(1)可知，$\angle BAC=\frac{2\pi}{3}$，则 $\angle ABC=\frac{\pi}{6}$，所以 $AB=AC=2$；…………………… 9 分

在 $\triangle MAB$ 中，$\angle MAB=\frac{\pi}{3}$，由余弦定理，…………………………………… 11 分

$MB^2=MA^2+AB^2-2MA\cdot AB\cos\angle MAB=9+4-6=7$，…………………………………… 12 分

所以 $MB=\sqrt{7}$.

18.【解析】(1)依题意，$0.1+0.15+0.2+m+0.3=1$，解得 $m=0.25$；…………………… 3 分

(2)蛋糕购买量的中位数为 $3+\frac{0.5-0.4}{0.25}\times1=3.4$；…………………………………… 5 分

平均数为 $1.5\times0.10+2.5\times0.30+3.5\times0.25+4.5\times0.20+5.5\times0.15=3.5$；…………………… 7 分

(3)由于 $K^2=\frac{200\times(40\times20-60\times80)^2}{100\times100\times120\times80}\approx33.333>10.828$，…………………… 10 分

18.【解析】(1)依题意,$0.1+0.15+0.2+m+0.3=1$,解得 $m=0.25$; …………………………………… 3 分

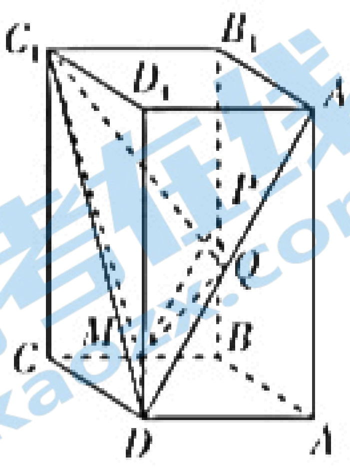
(2)蛋糕购买量的中位数为 $3+\frac{0.5-0.4}{0.25}\times1=3.4$; …………………………………… 5 分

平均数为 $1.5\times0.10+2.5\times0.30+3.5\times0.25+4.5\times0.20+5.5\times0.15=3.5$; …………………… 7 分

(3)由于 $K^2=\frac{200\times(40\times20-60\times80)^2}{100\times100\times120\times80}\approx33.333>10.828$, …………………………… 10 分

所以有 99.9%的把握认为对蛋糕口感的满意程度与消费者的性别有关. …………………………… 12 分

19.【解析】(1)连接 PM,A_1Q,因为点 M,P 分别为线段 BC,BB_1 的中点, …………………………… 1 分



故 $MP/\!/A_1D$,$MP=\frac{1}{2}A_1D$, …………………………………… 2 分

即 $MP/\!/QD$,$MP=QD$,故四边形 $MPQD$ 为平行四边形, …………………………… 3 分

故 $PQ/\!/MD$; …………………………………… 4 分

而 $PQ\not\subset$平面 C_1DM,$MD\subset$平面 C_1DM,故 $PQ/\!/$平面 C_1DM; …………………… 5 分

(2)由(1)可知,$PQ/\!/$平面 C_1DM,所以点 Q 到平面 C_1DM 的距离与点 P 到平面 C_1DM 的距离相等,则四面体 C_1QMD 的体积 $V_{Q-C_1DM}=V_{P-C_1DM}=V_{D-C_1MP}$. …………………………… 6 分

因为四边形 $ABCD$ 是面积为 $2\sqrt{3}$ 的菱形,$\angle ABC=120^\circ$,故 $2\times\frac{\sqrt{3}}{4}\times AB^2=2\sqrt{3}$,解得 $AB=2$, ……… 8 分

易知 $DM\perp$平面 BB_1C_1C,故 $DM=\sqrt{3}$. …………………………………… 9 分

$S_{\triangle C_1MP}=S_{梯形BMC_1B_1}-S_{\triangle BPM}-S_{\triangle B_1PC_1}=\frac{1}{2}\times(1+2)\times4-\frac{1}{2}\times1\times2-\frac{1}{2}\times2\times2=3$;

所以 $V_{D-C_1MP}=\frac{1}{3}S_{\triangle C_1MP}\cdot DM=\frac{1}{3}\times3\times\sqrt{3}=\sqrt{3}$,即四面体 C_1QMD 的体积为$\sqrt{3}$. …………………… 12 分

20.【解析】(1)依题意,$f'(x)=2-\frac{1}{e^x}=\frac{2e^x-1}{e^x}$, …………………………………… 1 分

令 $f'(x)=0$,解得 $x=-\ln2$, …………………………………… 2 分

故当 $x\in(-\infty,-\ln2)$时,$f'(x)<0$,当 $x\in(-\ln2,+\infty)$时,$f'(x)>0$, …………………………… 4 分

即函数 $f(x)$的单调递减区间为$(-\infty,-\ln2)$,递增区间为$(-\ln2,+\infty)$. …………………………… 5 分

(2)由 $f(x)>(m+1)x$ 得$\frac{1}{e^x}>(m-1)x$ 等价于$(m-1)xe^x<1$ 恒成立,

当 $m=1$ 时,不等式为 $0<1$,符合题意; …………………………………… 6 分

当 $m>1$ 时,令 $x=\frac{1}{m-1}$,则不等式左侧为 $e^{\frac{1}{m-1}}>1$,不符合题意, …………………………… 8 分

当 $m<1$ 时,令 $g(x)=(m-1)xe^x$,则 $g'(x)=(m-1)(x+1)e^x$,

当 $x<-1$ 时,$g'(x)>0$,$g(x)$单调递增,当 $x>-1$ 时,$g'(x)<0$,$g(x)$单调递减,

所以 $g(x)_{max}=g(-1)=-(m-1)e^{-1}$, …………………………………… 10 分

解不等式$-(m-1)e^{-1}<1$ 得 $m>1-e$,故 $1-e<m<1$, …………………………………… 11 分

综上,实数 m 的取值范围为$(1-e,1]$. …………………………………… 12 分

21.【解析】(1)因为圆 C':$(x-3)^2+y^2=1$,设直线 l_1:$k'x-y+m=0$;

联立$\begin{cases}k'x-y+m=0\\ \frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1\end{cases}$,得$(3+4k'^2)x^2+8k'mx+4m^2-12=0$,

故 $\Delta=(8k'm)^2-4(4m^2-12)(3+4k'^2)=0$,则 $4k'^2+3=m^2$①; …………………………… 2 分

而圆C'的圆心$(3,0)$,半径为 1,

故$\frac{|3k'+m|}{\sqrt{1+k'^2}}=1$,即 $8k'^2+6k'm+m^2=1$②, …………………………………… 3 分

联立①②,解得 $k'=\pm\frac{\sqrt{15}}{15}$,即直线 l_1 的斜率为$\pm\frac{\sqrt{15}}{15}$. …………………………… 5 分

(2)设 $M(x_M,y_M)$,$N(x_N,y_N)$,易知 $A(2,0)$;

显然直线 l_2 的斜率存在,设直线 l_2 的方程为:$y=k(x-2)$.

由方程组$\begin{cases}y=k(x-2)\\ \frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1\end{cases}$,消去 y 得,$(4k^2+3)x^2-16k^2x+16k^2-12=0$.

所以 $x_N\cdot2=\frac{16k^2-12}{4k^2+3}$,解得 $x_N=\frac{8k^2-6}{4k^2+3}$. …………………………………… 7 分

由方程组$\begin{cases}y=k(x-2)\\ (x-3)^2+y^2=1\end{cases}$,消去 y 得,$(k^2+1)x^2-(4k^2+6)x+4k^2+8=0$,

所以 $x_M\cdot2=\frac{4k^2+8}{k^2+1}$,解得 $x_M=\frac{2k^2+4}{k^2+1}$. …………………………………… 9 分

因为 $12|AM|=7|AN|$,所以 $2-x_N=\frac{12}{7}(x_M-2)$.

(2)由 $f(x)>(m+1)x$ 得 $\frac{1}{e^x}>(m-1)x$ 等价于 $(m-1)xe^x<1$ 恒成立，

当 $m=1$ 时，不等式为 $0<1$，符合题意；…… 6 分

当 $m>1$ 时，令 $x=\frac{1}{m-1}$，则不等式左侧为 $e^{\frac{1}{m-1}}>1$，不符合题意，…… 8 分

当 $m<1$ 时，令 $g(x)=(m-1)xe^x$，则 $g'(x)=(m-1)(x+1)e^x$，

当 $x<-1$ 时，$g'(x)>0$，$g(x)$ 单调递增，当 $x>-1$ 时，$g'(x)<0$，$g(x)$ 单调递减，

所以 $g(x)_{\max}=g(-1)=-(m-1)e^{-1}$，…… 10 分

解不等式 $-(m-1)e^{-1}<1$ 得 $m>1-e$，故 $1-e<m<1$，…… 11 分

综上，实数 m 的取值范围为 $(1-e,1]$．…… 12 分

21.【解析】(1)因为圆 C'：$(x-3)^2+y^2=1$，设直线 l_1：$k'x-y+m=0$；

联立 $\begin{cases}k'x-y+m=0\\ \frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1\end{cases}$，得 $(3+4k'^2)x^2+8k'mx+4m^2-12=0$，

故 $\Delta=(8k'm)^2-4(4m^2-12)(3+4k'^2)=0$，则 $4k'^2+3=m^2$①；…… 2 分

而圆 C' 的圆心 $(3,0)$，半径为 1，

故 $\frac{|3k'+m|}{\sqrt{1+k'^2}}=1$，即 $8k'^2+6k'm+m^2=1$②．…… 3 分

联立①②，解得 $k'=\pm\frac{\sqrt{15}}{15}$，即直线 l_1 的斜率为 $\pm\frac{\sqrt{15}}{15}$．…… 5 分

(2)设 $M(x_M,y_M)$，$N(x_N,y_N)$，易知 $A(2,0)$；

显然直线 l_2 的斜率存在，设直线 l_2 的方程为：$y=k(x-2)$．

由方程组 $\begin{cases}y=k(x-2)\\ \frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1\end{cases}$，消去 y 得，$(4k^2+3)x^2-16k^2x+16k^2-12=0$．

所以 $x_N\cdot 2=\frac{16k^2-12}{4k^2+3}$，解得 $x_N=\frac{8k^2-6}{4k^2+3}$．…… 7 分

由方程组 $\begin{cases}y=k(x-2)\\ (x-3)^2+y^2=1\end{cases}$，消去 y 得，$(k^2+1)x^2-(4k^2+6)x+4k^2+8=0$，

所以 $x_M\cdot 2=\frac{4k^2+8}{k^2+1}$，解得 $x_M=\frac{2k^2+4}{k^2+1}$．…… 9 分

因为 $12|AM|=7|AN|$，所以 $2-x_N=\frac{12}{7}(x_M-2)$，

即 $\frac{12}{4k^2+3}=\frac{12}{7}\cdot\frac{2}{1+k^2}$，解得 $k=\pm1$，…… 11 分

所以直线 l_2 的方程为 $x-y-2=0$ 或 $x+y-2=0$．…… 12 分

22.【解析】(1)依题意，直线 l 的普通方程为 $y=\sqrt{3}x+1$，…… 2 分

曲线 C 的普通方程为 $x^2+y^2-4y=0$．…… 4 分

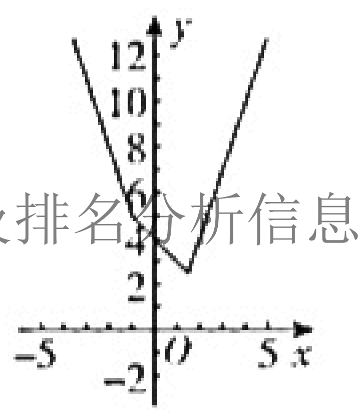
(2)易知点 $M(0,1)$；设直线 l 的参数方程为 $\begin{cases}x=\frac{1}{2}t\\ y=1+\frac{\sqrt{3}}{2}t\end{cases}$（$t$ 为参数），…… 5 分

设点 A，B 对应的参数分别 t_1，t_2，将直线 l 的参数方程代入 $x^2+y^2-4y=0$，

得 $t^2-\sqrt{3}t-3=0$，所以 $t_1t_2=-3$，$t_1+t_2=\sqrt{3}$．…… 8 分

由于直线 l 过 $M(0,1)$，故 $\left|\frac{1}{|MA|}-\frac{1}{|MB|}\right|=\frac{|t_1+t_2|}{|t_1t_2|}=\frac{\sqrt{3}}{3}$．…… 10 分

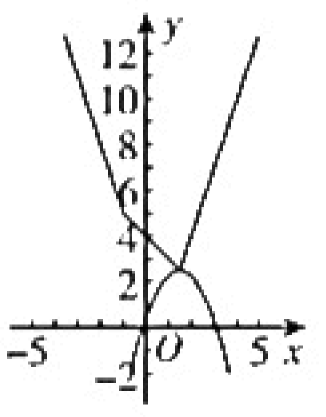
23.【解析】(1)依题意，$f(x)=\begin{cases}3x-2,x>\frac{3}{2}\\ 4-x,-1\le x\le\frac{3}{2}\\ 2-3x,x<-1\end{cases}$，…… 2 分



作出函数 $f(x)$ 的图象如图所示，…… 5 分

(2)依题意，如图所示，$|2x-3|+|x+1|+x^2\geqslant 3x+a$，

故 $|2x-3|+|x+1|\geqslant -x^2+3x+a$，…… 6 分



结合二次函数 $y=-x^2+3x+a$ 的图象可知，

临界状态为 $y=-x^2+3x+a$ 过 $y=f(x)$ 的最低点 $(\frac{3}{2},\frac{5}{2})$，

将 $(\frac{3}{2},\frac{5}{2})$ 代入 $y=-x^2+3x+a$ 中，解得 $a=\frac{1}{4}$，…… 9 分

故实数 a 的取值范围为 $(-\infty,\frac{1}{4}]$．…… 10 分

关于我们

北京高考在线创办于 2014 年，隶属于北京太星网络科技有限公司，是北京地区极具影响力的中学升学服务平台。主营业务涵盖：北京新高考、高中生涯规划、志愿填报、强基计划、综合评价招生和学科竞赛等。

北京高考在线旗下拥有网站门户、微信公众平台等全媒体矩阵生态平台。平台活跃用户 40W+，网站年度流量数千万量级。用户群体立足于北京，辐射全国 31 省市。

北京高考在线平台一直秉承 “ 精益求精、专业严谨 ” 的建设理念，不断探索“K12 教育+互联网+大数据”的运营模式，尝试基于大数据理论为广大中学和家长提供新鲜的高考资讯、专业的高考政策解读、科学的升学规划等，为广大高校、中学和教科研单位提供“衔接和桥梁纽带”作用。

平台自创办以来，为众多重点大学发现和推荐优秀生源，和北京近百所中学达成合作关系，累计举办线上线下升学公益讲座数百场，帮助数十万考生顺利通过考入理想大学，在家长、考生、中学和社会各界具有广泛的口碑影响力

未来，北京高考在线平台将立足于北京新高考改革，基于对北京高考政策研究及北京高校资源优势，更好的服务全国高中家长和学生。