

高三数学

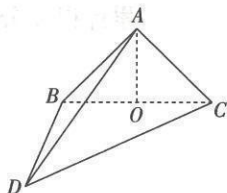
注意事项:

1. 答题前,考生务必将自己的姓名、考生号、考场号、座位号填写在答题卡上。
2. 回答选择题时,选出每小题答案后,用铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。如需改动,用橡皮擦干净后,再选涂其他答案标号。回答非选择题时,将答案写在答题卡上。写在本试卷上无效。
3. 考试结束后,将本试卷和答题卡一并交回。
4. 本试卷主要考试内容:高考全部内容。

一、选择题:本题共 8 小题,每小题 5 分,共 40 分。在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的。

1. $|i(3-i)+2| =$
A. $\sqrt{10}$ B. $3\sqrt{2}$ C. 3 D. $2\sqrt{3}$
2. 已知向量 a, b 满足 $|a|=3, a \cdot b = -5$, 则 $(a-2b) \cdot a =$
A. -1 B. 2 C. 15 D. 19
3. 设集合 $A = \{x | \lg(x^2+1) \leq 1\}, B = \{y | y = x^2 - 1\}$, 则 $A \cap B =$
A. \emptyset B. $[-3, 3]$
C. $[-1, 3]$ D. $[3, +\infty)$

4. 如图,在四面体 $ABCD$ 中, $AB=AC, BC \perp BD$, 平面 $ABC \perp$ 平面 BCD, O 为线段 BC 的中点,则下列判断错误的是
A. $AC \perp BD$
B. $BD \perp$ 平面 ABC
C. $AB \perp CD$
D. $AO \perp$ 平面 BCD



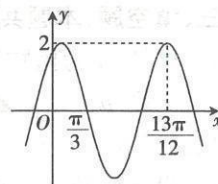
5. 大多数居民在住宅区都会注意噪音问题。记 p 为实际声压,通常我们用声压级 $L(p)$ (单位:分贝)来定义声音的强弱,声压级 $L(p)$ 与声压 p 存在近似函数关系: $L(p) = a \lg \frac{p}{p_0}$, 其中 a 为常数且常数 $p_0 (p_0 > 0)$ 为听觉下限阈值。若在某栋居民楼内,测得甲穿硬底鞋走路的声压 p_1 为穿软底鞋走路的声压 p_2 的 100 倍,且穿硬底鞋走路的声压级为 $L(p_1) = 60$ 分贝,恰为穿软底鞋走路的声压级 $L(p_2)$ 的 3 倍。若住宅区夜间声压级超过 50 分贝即扰民,该住宅区夜间不扰民情况下的声压为 p' , 则

- A. $a=20, p' \leq 10\sqrt{10}p_2$ B. $a=20, p' \leq \frac{1}{10}p_1$
C. $a=10, p' \leq 10\sqrt{10}p_2$ D. $a=10, p' \leq \frac{1}{10}p_1$

6. 已知函数 $f(x) = A \sin(\omega x + \varphi) (A > 0, \omega > 0)$ 的部分图象如图所示, 则

$$f\left(\frac{3\pi}{4}\right) =$$

- A. 1 B. -1
C. $\sqrt{2}$ D. $-\sqrt{2}$



7. 若 $a = \sqrt{3} + \frac{1}{2\sqrt{2}}, b = \sqrt{5} - \frac{1}{2\sqrt{3}}, c = \sqrt{2} + \frac{1}{\sqrt{3}}$, 则

- A. $a > c > b$ B. $a > b > c$ C. $c > b > a$ D. $b > c > a$

8. 已知 F 是双曲线 $E: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的左焦点, O 为坐标原点, 过点 F 且斜率为 $\frac{\sqrt{7}}{3}$ 的直线与 E 的右支交于点 $M, \overrightarrow{MN} = 3\overrightarrow{NF}, MF \perp ON$, 则 E 的离心率为

- A. 3 B. $\sqrt{2}$ C. $\sqrt{3}$ D. 2

二、选择题:本题共 4 小题,每小题 5 分,共 20 分。在每小题给出的选项中,有多项符合题目要求。全部选对的得 5 分,部分选对的得 2 分,有选错的得 0 分。

9. 某人记录了自己一周内每天的运动时长(单位:分钟): 54, 58, 46, 62, 80, 50, x . 若这组数据的第 40 百分位数与第 20 百分位数的差为 3, 则 x 的值可能为

- A. 47 B. 45 C. 53 D. 60

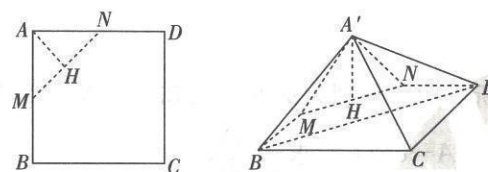
10. 已知函数 $f(x) = x^3 - 3x^2 + 1$ 的图象在点 $(m, f(m))$ 处的切线为 l_m , 则

- A. l_m 的斜率的最小值为 -2 B. l_m 的斜率的最小值为 -3
C. l_0 的方程为 $y = 1$ D. l_{-1} 的方程为 $y = 9x + 6$

11. 已知 P 是圆 $C: x^2 + y^2 = 1$ 上一点, Q 是圆 $D: (x-3)^2 + (y+4)^2 = 4$ 上一点, 则

- A. $|PQ|$ 的最小值为 2
B. 圆 C 与圆 D 有 4 条公切线
C. 当 $|PQ|$ 取得最小值时, P 点的坐标为 $(\frac{4}{5}, -\frac{3}{5})$
D. 当 $|PQ| = 1 + \sqrt{21}$ 时, 点 D 到直线 PQ 的距离小于 2

12. 如图所示, 四边形 $ABCD$ 是边长为 4 的正方形, M, N 分别为线段 AB, AD 上异于点 A 的动点, 且满足 $AM = AN$, 点 H 为 MN 的中点, 将点 A 沿 MN 折至点 A' 处, 使 $A'H \perp$ 平面 BCD , 则下列判断正确的是



- A. 若点 M 为 AB 的中点, 则五棱锥 $A'-MBCDN$ 的体积为 $\frac{14\sqrt{2}}{3}$
B. 当点 M 与点 B 重合时, 三棱锥 $A'-BCD$ 的体积为 $\frac{16\sqrt{2}}{3}$
C. 当点 M 与点 B 重合时, 三棱锥 $A'-BCD$ 的内切球的半径为 $4 - 2\sqrt{3}$
D. 五棱锥 $A'-MBCDN$ 体积的最大值为 $\frac{128\sqrt{3}}{27}$

三、填空题:本题共4小题,每小题5分,共20分.

13. 已知 A 为抛物线 $C: x^2 = 2py (p > 0)$ 上一点, 点 A 到 C 的焦点的距离为 10, 到 x 轴的距离为 5, 则 $p =$ \blacktriangle .

14. 已知 $(2x^{-2} - x^3)^n$ 的二项式系数之和为 256, 则其展开式中 x^4 的系数为 \blacktriangle .

15. 设奇函数 $f(x)$ 的定义域为 \mathbf{R} , 且 $f(x+1)$ 是偶函数, 若 $f(1) = 7$, 则 $f(2023) + f(2024) =$ \blacktriangle .

16. $\frac{\tan 80^\circ - \tan 20^\circ}{1 + \frac{1}{2\cos 20^\circ}}$ 的值为 \blacktriangle .

四、解答题:本题共6小题,共70分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

17. (10分)

在等差数列 $\{a_n\}$ 中, $a_3 = 13, a_{13} = 53$.

(1) 求 $\{a_n\}$ 的通项公式;

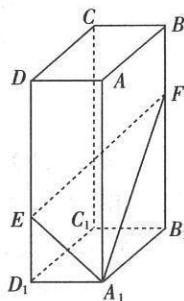
(2) 求数列 $\{2a_n + (-1)^n\}$ 的前 n 项和 S_n .

18. (12分)

如图, 在长方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 中, 点 E, F 分别在棱 DD_1, BB_1 上, $AB = 2, AD = 1, AA_1 = 3, D_1E = BF = 1$.

(1) 证明: $EF \perp A_1E$.

(2) 求平面 A_1EF 与平面 $ABCD$ 的夹角的余弦值.



19. (12分)

$\triangle ABC$ 的内角 A, B, C 所对的边分别为 a, b, c . 已知 $c^2 + 3b^2 = 2a^2$.

(1) 若 $(a-c)\cos B = b(\cos A - \cos C)$, 求 $\frac{\sin A}{\sin B}$;

(2) 若 $c = 1$, 当 $\cos B$ 取得最小值时, 求 $\triangle ABC$ 的面积.

20. (12分)

已知 $A_1(-2, 0)$ 是椭圆 $M: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的左顶点, 且 M 经过点 $(\frac{\sqrt{7}}{2}, \frac{3\sqrt{3}}{4})$.

(1) 求 M 的方程;

(2) 若直线 $l: y = k(x-1)$ 与 M 交于 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$ 两点, 且 $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = -1$, 求弦 AB 的长.

21. (12分)

某中学的风筝兴趣小组决定举行一次盲盒风筝比赛, 比赛采取得分制度评选优胜者, 可选择的风筝为硬翅风筝、软翅风筝、串式风筝、板式风筝、立体风筝, 共有 5 种风筝, 将风筝装入盲盒中摸取风筝, 每位参赛选手摸取硬翅风筝或软翅风筝均得 1 分并放飞风筝, 摸取串式风筝、板式风筝、立体风筝均得 2 分并放飞风筝, 每次摸取风筝的结果相互独立, 且每次只能摸取 1 只风筝, 每位选手每次摸取硬翅风筝或软翅风筝的概率为 $\frac{2}{5}$, 摸取其余 3 种风筝的概率为 $\frac{3}{5}$.

(1) 若选手甲连续摸了 2 次盲盒, 其总得分为 X 分, 求 X 的分布列与期望;

(2) 假设选手乙可持续摸取盲盒, 即摸取盲盒的次数可以为 $1, 2, 3, \dots$ 中的任意一个数, 记乙累计得 n 分的概率为 $P(n)$, 当 $n \geq 3$ 时, 求 $P(n)$.

22. (12分)

已知函数 $f(x) = e^x - ax^3 - x - 2$.

(1) 当 $a = 0$ 时, 求 $f(x)$ 的单调区间与极值;

(2) 若 $a \leq \frac{1}{6}$, 证明: 当 $x_1, x_2 \in [0, +\infty)$, 且 $x_1 > x_2$ 时, $\frac{f'(x_1) + f'(x_2)}{2} > \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2}$ 恒成立.