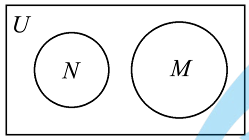
2024 届高三一轮复习联考(三)　全国卷

理科数学参考答案及评分意见

1.D 【解析】因为 M,N 是全集 U 的非空子集，且 $M\subseteq \complement_U N$，所以韦恩图为：

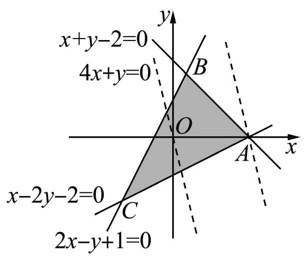


由韦恩图可知，D 正确.故选 D.

2.B 【解析】因为$(1+\mathrm{i})z=-2+\mathrm{i}$，所以$|z|=\left|\dfrac{-2+\mathrm{i}}{1+\mathrm{i}}\right|=\dfrac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{10}}{2}$.故选 B.

3.B 【解析】对$|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}|-|\boldsymbol{b}|$两边平方，整理可得向量$\boldsymbol{a}$与$\boldsymbol{b}$的夹角为 0，向量$\boldsymbol{a}$与$\boldsymbol{b}$平行且同向，从而存在实数 $t(t>0)$满足 $\boldsymbol{a}=t\boldsymbol{b}$；由 $\boldsymbol{a}=t\boldsymbol{b}$ 可得向量$\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$平行，$\boldsymbol{a}$与$\boldsymbol{b}$同向或者反向，因此“$\boldsymbol{a}=t\boldsymbol{b}$”是“$|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}|-|\boldsymbol{b}|$”的必要不充分条件.故选 B.

4.C 【解析】画出可行域如图所示，



联立$\begin{cases}x+y-2=0,\\x-2y-2=0,\end{cases}$解得$\begin{cases}x=2,\\y=0,\end{cases}$即 $A(2,0)$，由图可知当直线 $z=4x+y$ 过点 $A(2,0)$时，z 取得最大值，最大值为 8.故选 C.

5.D 【解析】由 $b^2=a^2+c^2-2ac\cos B=28$，得 $b=2\sqrt{7}$，设 AC 边上的高为 h，因为 $S_{\triangle ABC}=\dfrac{1}{2}ac\sin B=\dfrac{1}{2}bh$，所以 $h=\dfrac{ac\sin B}{b}=\dfrac{6\sqrt{21}}{7}$，即 AC 边上的高为$\dfrac{6\sqrt{21}}{7}$.故选 D.

6.D 【解析】根据题意得 2023 年初$(t=0)$时种群数量为 $k_0\cdot \mathrm{e}^{1.4\mathrm{e}}$，所以由 $y=k_0\cdot \mathrm{e}^{1.4\mathrm{e}-0.125n}<20\%\cdot k_0\cdot \mathrm{e}^{1.4\mathrm{e}}$，化简得 $\mathrm{e}^{-0.125n}<\dfrac{1}{5}$，则 $n>8\ln 5\approx 12.9$，又因为 $n\in \mathbf{N}^*$，所以 n 的最小值为 13.故选 D.

7.B 【解析】对于 A，当 α 内有无数条直线都与 β 平行，平面 α 与平面 β 可能平行，也可能是相交的，所以 A 不正确；对于 B，若平面 α 内的任意一条直线都与 β 平行，则平面 α 内必存在两条相交直线和平面 β 平行，根据面面平行的判定定理，可得 $\alpha /\!/ \beta$，所以 B 正确；对于 C，垂直于同一平面的两个平面不一定平行，还可以相交，所以 C 不正确；对于 D，平行于同一条直线的两个平面可能平行，也可能相交故 D 不正确.故选 B.

8.B 【解析】因为函数 $f(x)=\left(\dfrac{1}{3}\right)^{x^2-ax}$ 在区间$[0,1]$上是减函数，令 $g(x)=x^2-ax$，则函数 $g(x)=x^2-ax$ 在区间$[0,1]$是增函数，所以$\dfrac{a}{2}\leqslant 0$，则 $a\leqslant 0$.故选 B.

9.B 【解析】相邻两对称中心的距离为 2π，则$\dfrac{T}{2}=2\pi$，则 $T=4\pi$，$T=\dfrac{2\pi}{\omega}\Rightarrow \omega=\dfrac{2\pi}{T}=\dfrac{1}{2}$.已知 $f(x)$为奇函数，则 $f(0)=0$，即 $2\cos\varphi=0$，根据 $0<\varphi<\pi$ 可知 $\varphi=\dfrac{\pi}{2}$，则 $f(x)=2\cos\left(\dfrac{1}{2}x-\dfrac{\pi}{2}\right)=2\sin\dfrac{1}{2}x$，$g(x)=$

$2\sin\left(\frac{1}{2}\left(x-\frac{\pi}{3}\right)\right)=2\sin\left(\frac{1}{2}x-\frac{\pi}{6}\right)$.令$\frac{1}{2}x-\frac{\pi}{6}=k\pi(k\in\mathbf{Z})$,$x=2k\pi+\frac{\pi}{3}(k\in\mathbf{Z})$,故 A 错误,B 正确;令$\frac{1}{2}x-\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{2}+k\pi(k\in\mathbf{Z})$,$x=2k\pi+\frac{4\pi}{3}(k\in\mathbf{Z})$,故 C、D 错误.故选 B.

10.A 【解析】因为 $f(x+1)$为偶函数,所以 $f(x+1)=f(-x+1)$,所以 $f(x)$的图象关于直线 $x=1$ 对称,所以 $f(x+2)=f(-x)$.又因为 $f(x+4)=f(-x)$,所以 $f(x)$的图象关于直线 $x=2$ 对称,所以由 $\begin{cases}f(x+4)=f(x+2),\\f(x+2)=f(-x),\end{cases}$ 得 $f(x+2)=f(x)$,所以 $f(x)$是周期为 2 的函数.由$\begin{cases}f(x+2)=f(x),\\f(x+2)=f(-x)\end{cases}$ 得 $f(-x)=f(x)$,所以 $f(x)$为偶函数.故选 A.

11.C 【解析】该数列的一阶商数列为 2,4,8,16,…,则二阶商数列为 2,2,2,…,因为二阶商数列是常数列,故二阶商数列后面的项均为 2,所以一阶商数列后面的项依次为 $2^5,2^6,2^7,\cdots$,从而原数列后面的项依次为 $2^{15},2^{21},\cdots$,故$A_7=2^{21}$.故选 C.

12.A 【解析】$f'(x)=e^x-e^{-x}$,由题意知当 $x>0$ 时,$f'(x)>0$,即 $f(x)$在$(0,+\infty)$上单调递增,所以只需比较$\frac{1}{5},\sin\frac{1}{5},\ln\left(1+\frac{1}{5}\right)$的大小.当 $x>0$ 时,$x>\sin x$,则$\sin\frac{1}{5}<\frac{1}{5}$,所以 $a>b$;令 $g(x)=\sin x-\ln(1+x)$,$x\in\left(0,\frac{1}{3}\right)$,则 $g'(x)=\cos x-\frac{1}{1+x}$,令 $\varphi(x)=g'(x)$,$x\in\left(0,\frac{1}{3}\right)$,则 $\varphi'(x)=-\sin x+\frac{1}{(1+x)^2}$在区间$\left(0,\frac{1}{3}\right)$上单调递减,可得 $\varphi'(x)>\varphi'\left(\frac{1}{3}\right)=-\sin\frac{1}{3}+\frac{1}{\left(1+\frac{1}{3}\right)^2}>-\frac{1}{3}+\frac{9}{16}=\frac{11}{48}>0$,即 $\varphi'(x)>0$ 在区间$\left(0,\frac{1}{3}\right)$上恒成立,则$\varphi(x)$在区间$\left(0,\frac{1}{3}\right)$上单调递增,可得 $\varphi(x)>\varphi(0)=0$,即 $g'(x)>0$ 在区间$\left(0,\frac{1}{3}\right)$上恒成立,可知 $g(x)$在区间$\left(0,\frac{1}{3}\right)$上单调递增,则 $g(x)>g(0)=0$ 在区间$\left(0,\frac{1}{3}\right)$上恒成立,令 $x=\frac{1}{5}\in\left(0,\frac{1}{3}\right)$,则 $g\left(\frac{1}{5}\right)=\sin\frac{1}{5}-\ln\left(1+\frac{1}{5}\right)>0$,即 $\sin\frac{1}{5}>\ln\frac{6}{5}$,所以 $b>c$.综上所述,$c<b<a$.故选 A.

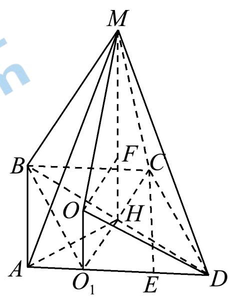
13.1 【解析】由题意可得:$f(-5)=f(-3)=f(-1)=f(1)=\log_2 2=1$.

14.$\frac{\sqrt{3}}{2}$ 【解析】由 $1+\frac{\sqrt{3}}{\tan 80^\circ}=\frac{1}{\cos\alpha}$,得 $\frac{\sin 80^\circ}{\sin 80^\circ}+\frac{\sqrt{3}\cos 80^\circ}{\sin 80^\circ}=\frac{2\left(\frac{1}{2}\sin 80^\circ+\frac{\sqrt{3}}{2}\cos 80^\circ\right)}{\sin 80^\circ}=\frac{2\sin(80^\circ+60^\circ)}{2\sin 40^\circ\cos 40^\circ}=\frac{2\sin 140^\circ}{2\sin 40^\circ\cos 40^\circ}=\frac{\sin 40^\circ}{\sin 40^\circ\cos 40^\circ}=\frac{1}{\cos 40^\circ}=\frac{1}{\cos\alpha}$,则 $\cos\alpha=\cos 40^\circ$,∵α 是锐角,∴$\alpha=40^\circ$.则 $\sin(\alpha+20^\circ)=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

15.$\frac{1}{2\,024}$ 【解析】根据题意可得$\{a_n\}$各项均不为 0,则 $a_n-a_{n+1}=a_{n+1}a_n$,则$\frac{1}{a_{n+1}}-\frac{1}{a_n}=1$,故数列$\left\{\frac{1}{a_n}\right\}$是首项为 2,公差为 1 的等差数列,则$\frac{1}{a_n}=n+1$,$a_n=\frac{1}{n+1}$,故 $a_{2\,023}=\frac{1}{2\,024}$.

16.20π 【解析】如图,取 AD 的两个三等分点 O_1、E,连接 BD、O_1C、CE,设 $BD\cap O_1C=H$,连接 MH、AH,则 $AO_1=\frac{1}{3}AD=1$,∴$O_1D=BC=2$,又∵$BC\parallel AD$,∴$BC\parallel O_1D$,所以,四边形 $BCDO_1$ 为平行四边形.∵$O_1C\cap BD=H$,∴H 为 BD 的中点,所以在 Rt△ABD 中,$AH=BH=DH=\frac{1}{2}BD=\sqrt{3}$,由勾股定理可得 $O_1B=\sqrt{AO_1^2+AB^2}=2$,则 $O_1B=O_1D$,在 Rt△O_1AB 中,$\tan\angle AO_1B=\frac{AB}{AO_1}=\sqrt{3}$,∴$\angle AO_1B=\frac{\pi}{3}$,∵$BC\parallel AD$,

$\therefore \angle CBO_1=\frac{\pi}{3}$，又 $BC=O_1D=O_1B$，则$\triangle O_1BC$ 为等边三角形，$\therefore O_1C=O_1B=O_1D=2$，则 O_1 是$\triangle BCD$ 的外接圆的圆心.因为 $MA=MB=MD=2\sqrt{3}$，H 为 BD 的中点，$\therefore MH\perp BD$，$\because MA=MB$，$AH=BH$，$MH=MH$，$\therefore \triangle MAH\cong\triangle MBH$，$\therefore \angle MHA=\angle MHB=\frac{\pi}{2}$，$\therefore MH\perp AH$，又$\because MH\perp BD$，$AH\cap BD=H$，$\therefore MH\perp$平面 $ABCD$，且 $MH=\sqrt{MA^2-AH^2}=3$.设 O 为三棱锥 $M-BCD$ 外接球的球心，连接 OO_1、OM、OD，则 $OO_1/\!/MH$，过 O 作 $OF\perp MH$，垂足为 F，则外接球的半径 R 满足 $R^2=OO_1^2+2^2=(3-OO_1)^2+O_1H^2$，设 $OO_1=x$，又 $O_1H=\frac{1}{2}O_1C=1$，解得 $x=1$，从而 $R^2=x^2+2^2=5$，故三棱锥 $M-BCD$ 外接球的表面积为 $4\pi R^2=20\pi$.



17.**解**：(1)设$\{a_n\}$的公差为 d，则$\begin{cases}9a_1+36d=-99,\\4a_1+6d=16a_1+120d,\end{cases}$ ······ 2 分

解得$\begin{cases}a_1=-19,\\d=2.\end{cases}$ ······ 4 分

故 $a_n=a_1+(n-1)d=2n-21$. ······ 6 分

(2)由(1)可知，$S_n=\frac{n(a_1+a_n)}{2}=n^2-20n=(n-10)^2-100$. ······ 8 分

当 $n=10$ 时，S_n 取得最小值-100. ······ 10 分

由 $S_m\leqslant S_n+1$ 恒成立，得 $m^2-20m+99\leqslant 0$，解得 $9\leqslant m\leqslant 11$.

因为 $m\in\mathbf{N}^*$，所以 m 的最大值为 11. ······ 12 分

18.**解**：(1)因为 $\boldsymbol{m}=\left(2\sin\left(x-\frac{\pi}{12}\right),\sqrt{3}\right)$，$\boldsymbol{n}=\left(\sin\left(x-\frac{\pi}{12}\right),\sin\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)\right)$，

所以 $f(x)=\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{n}=2\sin^2\left(x-\frac{\pi}{12}\right)+\sqrt{3}\sin\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)$

$=1-\cos\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)+\sqrt{3}\sin\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)=2\sin\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)+1$， ······ 3 分

由$-\frac{\pi}{2}+2k\pi\leqslant 2x-\frac{\pi}{3}\leqslant\frac{\pi}{2}+2k\pi,k\in\mathbf{Z}$，得$-\frac{\pi}{12}+k\pi\leqslant x\leqslant\frac{5\pi}{12}+k\pi,k\in\mathbf{Z}$， ······ 5 分

所以 $f(x)$的单调增区间为$\left[-\frac{\pi}{12}+k\pi,\frac{5\pi}{12}+k\pi\right],k\in\mathbf{Z}$. ······ 6 分

(2)由 $f(\omega x)=1$，得 $2\sin\left(2\omega x-\frac{\pi}{3}\right)+1=1$，则 $\sin\left(2\omega x-\frac{\pi}{3}\right)=0$， ······ 7 分

由 $0\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{3}$，得$-\frac{\pi}{3}\leqslant 2\omega x-\frac{\pi}{3}\leqslant\frac{2\omega\pi}{3}-\frac{\pi}{3}$， ······ 9 分

因为 $f(\omega x)=1(\omega>0)$在$\left[0,\frac{\pi}{3}\right]$上有唯一解，

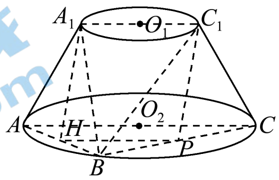
所以 $0\leqslant\frac{2\omega\pi}{3}-\frac{\pi}{3}<\pi$，…………………………………………………………………………………………… 11 分

得 $\frac{1}{2}\leqslant\omega<2$. ……… 12 分

19. **解**：(1)存在，BC 中点即为所求. …………………………………………………………………………………… 1 分

证明如下：取 BC 中点 P，连接 C_1P，取 AB 中点 H，连接 A_1H，PH，则有 $PH\parallel AC$，$PH=\frac{1}{2}AC$. ………… 2 分

如图，在等腰梯形 A_1ACC_1 中，$AC\parallel A_1C_1$，$AC=2A_1C_1$，所以 $HP\parallel A_1C_1$，$HP=A_1C_1$，则四边形 A_1C_1PH 为平行四边形，所以 $C_1P\parallel A_1H$. …………………………………………………………………………………… 4 分

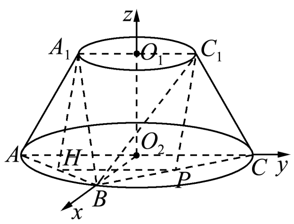


又 $A_1H\subset$平面 A_1AB，$C_1P\not\subset$平面 A_1AB，所以 $C_1P\parallel$平面 A_1AB. ………………………………………… 5 分

(2)过点 B 作 $BO'\perp AC$ 于O'，在等腰梯形 A_1ACC_1 中，$AC=2AA_1=2A_1C_1=4$，所以该梯形的高 $h=\sqrt{3}$，… …… 6 分

所以等腰梯形 A_1ACC_1 的面积为 $S=3\sqrt{3}$，所以四棱锥 $B-A_1ACC_1$ 的体积 $V=\frac{1}{3}S\times BO'=2\sqrt{3}$，解得 $BO'=2$，所以点O'与 O_2 重合. …………………………………………………………………………………………… 7 分

以 O_2 为原点，$\overrightarrow{O_2B}$，$\overrightarrow{O_2C}$，$\overrightarrow{O_2O_1}$方向为 x，y，z 轴正方向建立空间直角坐标系.



则 $C(0,2,0)$，$B(2,0,0)$，$A(0,-2,0)$，$A_1(0,-1,\sqrt{3})$，$C_1(0,1,\sqrt{3})$，

$\overrightarrow{AA_1}=(0,1,\sqrt{3})$，$\overrightarrow{AB}=(2,2,0)$，$\overrightarrow{CC_1}=(0,-1,\sqrt{3})$，$\overrightarrow{BC}=(-2,2,0)$，……………………………………… 9 分

设平面 A_1AB 的一个法向量为 $\boldsymbol{a}=(x_1,y_1,z_1)$，

所以$\begin{cases}\overrightarrow{AA_1}\cdot\boldsymbol{a}=0,\\ \overrightarrow{AB}\cdot\boldsymbol{a}=0,\end{cases}$即$\begin{cases}y_1+\sqrt{3}z_1=0,\\ 2x_1+2y_1=0,\end{cases}$取 $z_1=1$，则 $\boldsymbol{a}=(\sqrt{3},-\sqrt{3},1)$. ……………………………………… 10 分

设平面 C_1CB 的一个法向量为 $\boldsymbol{b}=(x_2,y_2,z_2)$，

所以$\begin{cases}\overrightarrow{CC_1}\cdot\boldsymbol{b}=0,\\ \overrightarrow{BC}\cdot\boldsymbol{b}=0,\end{cases}$即$\begin{cases}-y_2+\sqrt{3}z_2=0,\\ -2x_2+2y_2=0,\end{cases}$取 $z_2=1$，则 $\boldsymbol{b}=(\sqrt{3},\sqrt{3},1)$. ……………………………………… 11 分

设平面 A_1AB 与平面 C_1CB 夹角为 α，

则 $\cos\alpha=\frac{|\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}|}{|\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{b}|}=\frac{|3-3+1|}{\sqrt{3+3+1}\times\sqrt{3+3+1}}=\frac{1}{7}$.

故平面 A_1AB 与平面 C_1CB 夹角的余弦值为$\frac{1}{7}$. ……………………………………………………………………… 12 分

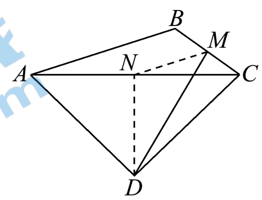
20.**解**：(1)在$\triangle ABC$中，由余弦定理，得$AC^2=AB^2+BC^2-2AB\times BC\times\cos\frac{2\pi}{3}=4+1-2\times2\times1\times\left(-\frac{1}{2}\right)=7$. ……………………………………………………………………………………………… 2 分

取AC中点N，连接DN,MN，

$\because AD=CD,AD\perp CD,N$为$AC$的中点，

$\therefore DN\perp AC,DN=\frac{1}{2}AC$. ……………………………………………………………………………… 4 分

则$\triangle ACD$的面积$S_{\triangle ACD}=\frac{1}{2}\times AC\times DN=\frac{1}{4}AC^2=\frac{7}{4}$. ………………………………………… 5 分



(2)设$\angle ABC=\alpha,\angle BAC=\beta$.

$\because M,N$分别为边BC,AC的中点，

$\therefore MN/\!/AB,MN=\frac{1}{2}AB=1,\angle MNC=\angle BAC=\beta$. ………………………………………………… 6 分

在$\triangle ABC$中，由余弦定理，得$AC^2=AB^2+BC^2-2AB\cdot BC\cdot\cos\alpha=5-4\cos\alpha$. ………………… 7 分

由正弦定理$\frac{AC}{\sin\alpha}=\frac{BC}{\sin\beta}$，

得$\sin\beta=\frac{BC\cdot\sin\alpha}{AC}=\frac{\sin\alpha}{AC}$. ………………………………………………………………………… 8 分

在$\triangle MDN$中，$\cos\angle MND=\cos(\angle MNC+\angle CND)=\cos\left(\beta+\frac{\pi}{2}\right)=-\sin\beta$，

由余弦定理，得$DM^2=MN^2+DN^2-2MN\cdot DN\cdot\cos\angle MND$

$=1+\frac{1}{4}AC^2+2\times1\times\frac{1}{2}AC\times\sin\beta$

$=1+\frac{1}{4}\times(5-4\cos\alpha)+2\times1\times\frac{1}{2}AC\times\frac{\sin\alpha}{AC}$.

$=\frac{9}{4}-\cos\alpha+\sin\alpha$， …………………………………………………………………………………………… 9 分

$=\frac{9}{4}+\sqrt{2}\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{4}\right)$，其中$0<\alpha<\pi$，

当$\alpha-\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{2}$，即$\alpha=\frac{3}{4}\pi$时，$DM$有最大值：

$$\sqrt{\frac{9}{4}+\sqrt{2}}=\sqrt{\frac{8+4\sqrt{2}+1}{4}}=\sqrt{\left(\frac{2\sqrt{2}+1}{2}\right)^2}=\frac{2\sqrt{2}+1}{2}.$$

$\therefore DM$长度的最大值为$\frac{2\sqrt{2}+1}{2}$. ……………………………………………………………………… 12 分

21.(1)**证明**：$f(x)=x(a\ln x-x-1)=ax\ln x-x^2-x$的定义域为$(0,+\infty)$，

当$a=1$时，$f'(x)=\ln x-2x$. …………………………………………………………………………………… 1 分

设 $g(x)=\ln x-2x$，则 $g'(x)=\frac{1}{x}-2=\frac{1-2x}{x}$，

由 $g(x)=0$，得 $x=\frac{1}{2}$，

当 $0<x<\frac{1}{2}$ 时，$g'(x)>0$；当 $x>\frac{1}{2}$ 时，$g'(x)<0$，

$\therefore g(x)$ 在 $\left(0,\frac{1}{2}\right)$ 上单调递增，在 $\left(\frac{1}{2},+\infty\right)$ 上单调递减，

$\therefore g(x)$ 的最大值为 $g\left(\frac{1}{2}\right)=\ln\frac{1}{2}-1=-\ln 2-1<0$，…………………………………… 3 分

$\therefore g(x)<0$，即 $f'(x)<0$ 在 $(0,+\infty)$ 上恒成立，

$\therefore f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递减. …………………………………………………………………… 4 分

(2)(ⅰ)**解**：由题意知 $a\neq 0$，由 $f(x)+x=0$，得 $ax\ln x-x^2=0\Rightarrow a\ln x=x\Rightarrow\frac{\ln x}{x}=\frac{1}{a}$，

设 $h(x)=\frac{\ln x}{x}(x>0)$，则 $h'(x)=\frac{1-\ln x}{x^2}$，

由 $h'(x)=0$，得 $x=\mathrm{e}$，

当 $x\in(0,\mathrm{e})$ 时，$h'(x)>0$，函数 $h(x)$ 单调递增，

当 $x\in(\mathrm{e},+\infty)$ 时，$h'(x)<0$，函数 $h(x)$ 单调递减，

$\therefore h(x)$ 有极大值，也是最大值，$h(\mathrm{e})=\frac{1}{\mathrm{e}}$. …………………………………………………… 6 分

又当 $x\to 0$ 时，$h(x)\to-\infty$，当 $x\to+\infty$ 时，$h(x)>0$，$h(x)\to 0$，

所以要使 $f(x)+x=0$ 有两个不同的实数根 x_1,x_2，则 $0<\frac{1}{a}<\frac{1}{\mathrm{e}}$，

即 $a>\mathrm{e}$，即实数 a 的取值范围为 $(\mathrm{e},+\infty)$. ……………………………………………… 8 分

(ⅱ)**证明**：由(ⅰ)不妨设 $x_1>\mathrm{e}>x_2>0$，

由 $f(x_1)+x_1=0$，$f(x_2)+x_2=0$，得 $x_1=a\ln x_1$，$x_2=a\ln x_2$，

则 $x_1-x_2=a(\ln x_1-\ln x_2)$，

要证 $x_1\cdot x_2>\mathrm{e}^2$，即证 $\ln x_1+\ln x_2>2$，等价于 $\frac{x_1}{a}+\frac{x_2}{a}>2$，

而 $\frac{1}{a}=\frac{\ln x_1-\ln x_2}{x_1-x_2}$，等价于证明 $\frac{\ln x_1-\ln x_2}{x_1-x_2}>\frac{2}{x_1+x_2}$，

即证 $\ln\frac{x_1}{x_2}>\frac{2(x_1-x_2)}{x_1+x_2}=\frac{2\left(\frac{x_1}{x_2}-1\right)}{\frac{x_1}{x_2}+1}$，

令 $t=\frac{x_1}{x_2}$，$t>1$，

要证 $\ln\frac{x_1}{x_2}>\frac{2\left(\frac{x_1}{x_2}-1\right)}{\frac{x_1}{x_2}+1}$，即证 $\ln t>\frac{2(t-1)}{t+1}$， ……………………………………… 10 分

令 $\varphi(t)=\ln t-\frac{2(t-1)}{t+1}(t>1)$，

则 $\varphi'(t)=\frac{1}{t}-\frac{4}{(t+1)^2}=\frac{(t-1)^2}{t(t+1)^2}>0(t>1)$，

所以函数 $\varphi(t)$在$(1,+\infty)$上单调递增， ………………………………………… 11 分

所以 $\varphi(t)>\varphi(1)=0$，即 $\ln t>\frac{2(t-1)}{t+1}$，

所以 $x_1\cdot x_2>e^2$. ………………………………………………………………………… 12 分

22.**解**:(1)由$\begin{cases}x=5\sin\alpha,\\y=3\cos\alpha,\end{cases}$消去 α 得$\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$，

所以曲线 C 的普通方程为$\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$. ………………………………………… 2 分

(2)直线 l 的极坐标方程为$\rho=\frac{3}{\sqrt{2}\sin\left(\theta-\frac{\pi}{4}\right)}$，故其直角坐标方程为 $x-y+3=0$，显然点 $P(-1,2)$在直线 l 上，

直线 l 的参数方程为$\begin{cases}x=-1+\frac{\sqrt{2}}{2}t,\\y=2+\frac{\sqrt{2}}{2}t.\end{cases}$ ………………………………………… 5 分

把$\begin{cases}x=-1+\frac{\sqrt{2}}{2}t,\\y=2+\frac{\sqrt{2}}{2}t,\end{cases}$代入$\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$，整理得 $17t^2+41\sqrt{2}t-116=0$， ………………………… 7 分

设点 A，点 B 对应的参数分别为 t_1,t_2，

则 $t_1+t_2=-\frac{41\sqrt{2}}{17}$，$t_1t_2=-\frac{116}{17}<0$，

所以$||PA|-|PB||=||t_1|-|t_2||=|t_1+t_2|=\frac{41\sqrt{2}}{17}$. ………………………………… 10 分

23.**解**:当 $x\leqslant1$ 时，不等式可化为:$3-2x\leqslant5\Rightarrow x\in[-1,1]$，……………………………… 1 分

当 $1<x<2$ 时，不等式可化为 $1\leqslant5\Rightarrow x\in(1,2)$，…………………………………………… 2 分

当 $x\geqslant2$ 时，不等式可化为 $2x-3\leqslant5\Rightarrow x\in[2,4]$， …………………………………… 3 分

综上，$|x-1|+|x-2|\leqslant5$ 的解集为$[-1,4]$. ………………………………………………… 5 分

(2)**证明**:$\because a+b+c=1,a,b,c\in\mathbf{R}^+$，

$\therefore\left(\frac{1}{a+b}-1\right)\left(\frac{1}{b+c}-1\right)\left(\frac{1}{c+a}-1\right)=\frac{c}{a+b}\times\frac{a}{b+c}\times\frac{b}{c+a}$. ……………………………… 7 分

故$\frac{c}{a+b}\times\frac{a}{b+c}\times\frac{b}{c+a}\leqslant\frac{c}{2\sqrt{ab}}\times\frac{a}{2\sqrt{bc}}\times\frac{b}{2\sqrt{ca}}=\frac{1}{8}$. ………………………………… 9 分

当且仅当 $a=b=c=\frac{1}{3}$时，取等号. …………………………………………………………… 10 分