第Ⅰ卷

一、选择题：本大题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分. 在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.

1. 若集合 $M=\{x|-1<2-x\leqslant 1\}$，$N=\{x|x^2-6x+8<0\}$，则 $M\cup N=$

A. $(2,3]$　　B. $(2,3)$　　C. $[1,4)$　　D. $(1,4)$

2. 命题"存在一个偶函数，其值域为 R"的否定为

A. 所有的偶函数的值域都不为 R

B. 存在一个偶函数，其值域不为 R

C. 所有的奇函数的值域都不为 R

D. 存在一个奇函数，其值域不为 R

3. 函数 $f(x)=\sqrt{3-3^x}+\ln|x|$ 的定义域为

A. $[-1,+\infty)$　　B. $[-1,0)\cup(0,+\infty)$

C. $(-\infty,-1]$　　D. $(-1,0)\cup(0,+\infty)$

4. 若 $b=10a$，且 a 为整数，则"b 能被 5 整除"是"a 能被 5 整除"的

A. 充分不必要条件　　B. 必要不充分条件

C. 充要条件　　D. 既不充分也不必要条件

5. 将曲线 $y=2\sin(4x+\frac{\pi}{5})$ 上的每个点的横坐标伸长为原来的 2 倍(纵坐标不变)，得到的曲线的对称轴方程为

A. $x=-\frac{3\pi}{80}+\frac{k\pi}{8}(k\in\mathbf{Z})$　　B. $x=-\frac{3\pi}{20}+\frac{k\pi}{2}(k\in\mathbf{Z})$

C. $x=\frac{3\pi}{80}+\frac{k\pi}{8}(k\in\mathbf{Z})$　　D. $x=\frac{3\pi}{20}+\frac{k\pi}{2}(k\in\mathbf{Z})$

6. 图中的 4 片叶子由曲线 $y^2=|x|$ 与曲线 $|y|=x^2$ 围成，则每片叶子的面积为

A. $\frac{1}{6}$　　B. $\frac{\sqrt{3}}{6}$

C. $\frac{1}{3}$　　D. $\frac{2}{3}$

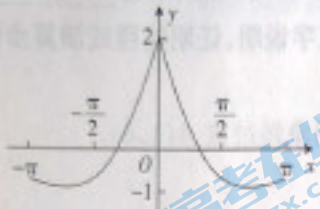
密　封　线　内　不　准　答　题

7. 下列不等式正确的是

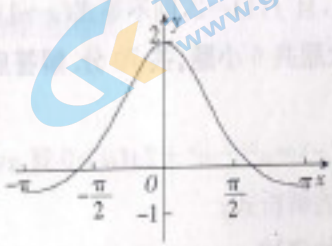
A. $\sin 130^\circ > \sin 40^\circ > \log_3 4$　　B. $\tan 226^\circ < \ln 0.4 < \tan 48^\circ$

C. $\cos(-20^\circ) < \sin 65^\circ < \lg 11$　　D. $\tan 410^\circ > \sin 80^\circ > \log_5 2$

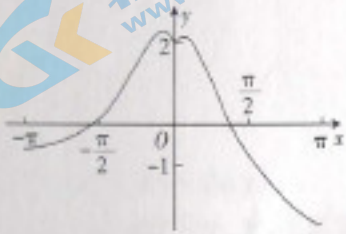
8. 函数 $f(x)=\dfrac{2\cos x-x^2}{e^{|x|}}$ 在 $[-\pi,\pi]$ 上的图象大致为



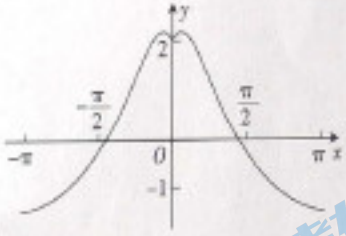
A



B



C



D

9. 已知 $\cos 27^\circ \approx 0.891$，则 $\sqrt{2}(\cos 72^\circ+\cos 18^\circ)$ 的近似值为

A. 1.77　　B. 1.78　　C. 1.79　　D. 1.81

10. 已知定义在 R 上的函数 $f(x)$ 满足 $f(x)=f(2-x)$，且 $f(x)$ 的图象关于点 $(3,0)$ 对称，当 $1\leqslant x\leqslant 2$ 时，$f(x)=2x+\log_3(4x+3)$，则 $f(\frac{1609}{2})=$

A. -4　　B. 4　　C. -5　　D. 5

11. 函数 $f(x)=\dfrac{\sin 4x+\sqrt{3}\cos 4x}{\sin 2x-\sqrt{3}\cos 2x}$ 的值域为

A. $(-2,2)$　　B. $(-1,1)$　　C. $[-1,1]$　　D. $[-2,2]$

12. 若函数 $f(x)=2x^3-ax^2(a<0)$ 在 $(\frac{a}{2},\frac{a+6}{3})$ 上有最大值，则 a 的取值范围为

A. $[-4,0)$　　B. $(-\infty,-4]$　　C. $[-2,0)$　　D. $(-\infty,-2]$

第 II 卷

北京高考在线 www.gkaozx.com

第Ⅱ卷

二、填空题：本大题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分. 把答案填在答题卡的相应位置.

13. 设函数 $f(x)=\begin{cases}2\lg x, x>0,\\ (\frac{1}{4})^x, x<0,\end{cases}$ 则 $f(-f(10))=$ ▲ .

14. 直线 $2y+1=0$ 与曲线 $y=\cos x$ 在 $(-\frac{3\pi}{4},\frac{3\pi}{2})$ 上的交点的个数为 ▲ .

15. 张军自主创业，在网上经营一家干果店，销售的干果中有松子、开心果、腰果、核桃，价格依次为 120 元/千克、80 元/千克、70 元/千克、40 元/千克，为增加销量，张军对这四种干果进行促销：一次购买干果的总价达到 150 元，顾客就少付 $x(2x\in Z)$ 元. 每笔订单顾客网上支付成功后，张军会得到支付款的 80%.

①若顾客一次购买松子和腰果各 1 千克，需要支付 180 元，则 $x=$ ▲ ；

②在促销活动中，为保证张军每笔订单得到的金额均不低于促销前总价的七折，则 x 的最大值为 ▲ .（本题第一空 2 分，第二空 3 分）

16. 已知函数 $f(x)$ 的定义域为 $(0,+\infty)$，其导函数 $f'(x)$ 满足 $f(x)+xf'(x)<\frac{xf(x)}{x+1}$ 对 $x\in(0,+\infty)$ 恒成立，且 $f(1)=2$，则不等式 $(x+1)f(x+1)<x+2$ 的解集是 ▲ .

三、解答题：本大题共 6 小题，共 70 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

17.（10 分）

已知函数 $f(x)=a^{2x}-a^{x}+2a(a>0$ 且 $a\neq1)$ 的图象经过点 $A(1,6)$.

(1)求 $f(x)$ 的解析式；

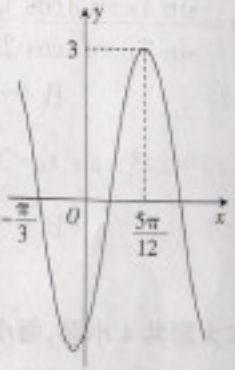
(2)求 $f(x)$ 的值域.

18.（12 分）

已知函数 $f(x)=3\sin(\omega x+\varphi)(\omega>0,|\varphi|<\frac{\pi}{2})$ 的部分图象如图所示.

(1)求 ω,φ；

(2)若 $f(\frac{\alpha}{2})=\frac{9}{5},\alpha\in(\frac{\pi}{3},\frac{5\pi}{6})$，求 $\sin\alpha$.



19.(12 分)

已知函数 $f(x)=x-ae^{ax}(a>0)$.

(1)求曲线 $y=f(x)$ 在点 $(0,f(0))$ 处的切线方程;

(2)若 $f(x)<0$ 恒成立,求 a 的取值范围.

20.(12分)

将函数 $g(x)=4\sin x\cdot\cos(x+\frac{\pi}{6})$ 的图象向左平移 $\varphi(0<\varphi\leqslant\frac{\pi}{2})$ 个单位长度后得到 $f(x)$ 的图象.

(1)若 $f(x)$ 为偶函数,$\tan\alpha>2$,求 $f(\alpha)$ 的取值范围;

(2)若 $f(x)$ 在 $(\pi,\frac{7\pi}{6})$ 上是单调函数,求 φ 的取值范围.

21.(12分)

已知函数 $f(x)=x(1-\sin x)$.

(1)求函数 $f(\pi x)$ 在 $(-20,20)$ 上的零点之和;

(2)证明:$f(x)$ 在 $(0,\frac{\pi}{2})$ 上只有1个极值点.

北京高考在线 www.gkaozx.com

22.(12分)

已知函数 $f(x)=\frac{1}{2}ax^2-x+2a^2\ln x(a\neq 0)$.

(1)讨论 $f(x)$ 的单调性;

(2)若 $f(x)$ 存在两个极值点 x_1,x_2,证明:$\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}<\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}$.

北京高考在线 www.gkaozx.com

高三数学考试参考答案(理科)

1. C 【解析】本题考查集合的并集与一元二次不等式的解法,考查运算求解能力.

$\because M=[1,3),N=(2,4),\therefore M\cup N=[1,4)$.

2. A 【解析】本题考查特称命题的否定,考查推理论证能力.

命题"存在一个偶函数,其值域为 **R**"的否定为"所有的偶函数的值域都不为 **R**".

3. B 【解析】本题考查函数的定义域,考查运算求解能力.

$\because \begin{cases}3-3^{x}\geqslant 0,\\ |x|>0,\end{cases}\therefore x\in[-1,0)\cup(0,+\infty)$.

4. B 【解析】本题考查充分条件、必要条件,考查推理论证能力.

若 a 能被 5 整除,则 $b=10a$ 必能被 5 整除;若 b 能被 5 整除,则 $a=\frac{b}{10}$ 未必能被 5 整除. 故选 B.

5. D 【解析】本题考查三角函数图象的周期变换与对称性,考查运算求解能力.

将曲线 $y=2\sin(4x+\frac{\pi}{5})$ 上的每个点的横坐标伸长为原来的 2 倍后得到曲线 $y=2\sin(2x+\frac{\pi}{5})$,令 $2x+\frac{\pi}{5}=\frac{\pi}{2}+k\pi(k\in\mathbf{Z})$,得 $x=\frac{3\pi}{20}+\frac{k\pi}{2}(k\in\mathbf{Z})$.

6. C 【解析】本题考查定积分的应用,考查运算求解能力.

由 $\begin{cases}y=\sqrt{x},\\ y=x^2,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}x=0,\\ y=0,\end{cases}\begin{cases}x=1,\\ y=1,\end{cases}$ 所以根据图形的对称性,可得每片叶子的面积为 $\int_0^1(\sqrt{x}-x^2)\,dx=(\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}-\frac{1}{3}x^3)\Big|_0^1=\frac{1}{3}$.

7. D 【解析】本题考查三角函数与对数的大小比较,考查推理论证能力.

$\because \sin 40^\circ<1<\log_3 4,\ln 0.4<0<\tan 226^\circ,\cos(-20^\circ)=\cos 20^\circ=\sin 70^\circ>\sin 65^\circ$,$\therefore$排除 A,B,C, $\tan 410^\circ=\tan 50^\circ>1>\sin 80^\circ>\frac{1}{2}>\log_5 2$,故选 D.

8. A 【解析】本题考查函数图象的识别,考查推理论证能力.

易知 $f(x)$ 为偶函数,排除 C. 因为 $f(\frac{\pi}{2})<0,f(\pi)=-\frac{2+\pi^2}{e^{\pi}}>-\frac{2+\pi^2}{e^3}>-1$,所以排除 B,D,故选 A.

9. B 【解析】本题考查三角恒等变换,考查运算求解能力.

$\cos 72^\circ+\cos 18^\circ=\sin 18^\circ+\cos 18^\circ=\sqrt{2}\sin(18^\circ+45^\circ)=\sqrt{2}\sin 63^\circ=\sqrt{2}\cos 27^\circ$,

$\sqrt{2}(\cos 72^\circ+\cos 18^\circ)\approx 2\times 0.891=1.782$,所以 $\sqrt{2}(\cos 72^\circ+\cos 18^\circ)$ 的近似值为 1.78.

10. C 【解析】本题考查函数的对称性与周期性,考查推理论证能力与抽象概括能力.

因为 $f(x)$ 的图象关于点 $(3,0)$ 对称,所以 $f(x)+f(6-x)=0$. 又 $f(x)=f(2-x)$,所以 $f(2-x)+f(6-x)=0$,所以 $f(x)=-f(x+4)$,则 $f(x)=f(x+8)$,所以 $f(\frac{1609}{2})=f(\frac{9}{2}+100\times 8)=f(\frac{9}{2})$. 因为 $f(\frac{9}{2})+f(6-\frac{9}{2})=0,f(\frac{9}{2})=-f(\frac{3}{2})=-(3+\log_3 9)=-5$,所以 $f(\frac{1609}{2})=-5$.

11. A 【解析】本题考查三角恒等变换与三角函数的值域,考查推理论证能力.

$\because f(x)=\frac{2\sin(4x+\frac{\pi}{3})}{-2\cos(2x+\frac{\pi}{6})}=-2\sin(2x+\frac{\pi}{6}),\cos(2x+\frac{\pi}{6})\neq 0$,

且当且仅当 $\cos(2x+\frac{\pi}{6})=0$ 时,$|\sin(2x+\frac{\pi}{6})|=1$,$\therefore f(x)$ 的值域为 $(-2,2)$.

12. B 【解析】本题考查导数的综合应用,考查化归与转化的数学思想及运算求解能力.

令 $f'(x)=2x(3x-a)$,得 $x_1=0,x_2=\frac{a}{3}(a<0)$,

当 $\frac{a}{3}<x<0$ 时,$f'(x)<0$;当 $x<\frac{a}{3}$ 或 $x>0$ 时,$f'(x)>0$.

从而 $f(x)$ 在 $x=\frac{a}{3}$ 处取得极大值 $f(\frac{a}{3})=-\frac{a^3}{27}$.

由 $f(x)=-\frac{a^3}{27}$，得 $(x-\frac{a}{3})^2(2x+\frac{a}{3})=0$，解得 $x=\frac{a}{3}$ 或 $x=-\frac{a}{6}$.

$\because f(x)$ 在 $(\frac{a}{2},\frac{a+6}{3})$ 上有最大值，$\therefore \frac{a}{3}<\frac{a+6}{3}\leqslant-\frac{a}{6}$，$\therefore a\leqslant-4$.

13. 16 【解析】本题考查分段函数求值，考查运算求解能力.

$f(-f(10))=f(-2)=4^2=16$.

14. 3 【解析】本题考查三角函数的图象及函数与方程，考查数形结合的数学方法.

$\because \cos(-\frac{3\pi}{4})=-\frac{\sqrt{2}}{2}<-\frac{1}{2}$，

$\therefore$ 直线 $2y+1=0$ 与曲线 $y=\cos x$ 在 $(-\frac{3\pi}{4},\frac{3\pi}{2})$ 上有 3 个交点.

15. 10；18. 5 【解析】本题考查数学在生活中的实际应用，考查数学建模的数学核心素养.

顾客一次购买松子和腰果各 1 千克，需要支付 $120+70-x=180$ 元，则 $x=10$.

设顾客一次购买干果的总价为 M 元，当 $0<M<150$ 时，张军每笔订单得到的金额显然不低于促销前总价的七折. 当 $M\geqslant150$ 时，$0.8(M-x)\geqslant0.7M$，即 $M\geqslant8x$ 对 $M\geqslant150$ 恒成立，则 $8x\leqslant150$，$x\leqslant18.75$，又 $2x\in\mathbf{Z}$，所以 x 的最大值为 18. 5.

16. $(0,+\infty)$ 【解析】本题考查导数的应用，考查函数构造法的应用与推理论证能力.

设函数 $g(x)=\frac{xf(x)}{x+1}(x>0)$，则 $g'(x)=\frac{[f(x)+xf'(x)](x+1)-xf(x)}{(x+1)^2}$.

因为 $f(x)+xf'(x)<\frac{xf(x)}{x+1}$，所以 $[f(x)+xf'(x)](x+1)-xf(x)<0$，$g'(x)<0$，

故 $g(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递减. 所以 $(x+1)f(x+1)<x+2\Leftrightarrow\frac{(x+1)f(x+1)}{x+2}<1\Leftrightarrow\begin{cases}x+1>0,\\g(x+1)<1=g(1),\end{cases}$

则 $x+1>1$，即 $x>0$.

17. 解：(1) 因为 $f(x)=a^{2x}-a^x+2a(a>0$ 且 $a\neq1)$ 的图象经过点 $A(1,6)$，

所以 $f(1)=a^2+a=6$. …… 1 分

因为 $a>0$ 且 $a\neq1$，所以 $a=2$，…… 3 分

所以 $f(x)$ 的解析式为 $f(x)=4^x-2^x+4$（或 $f(x)=2^{2x}-2^x+4$）. …… 4 分

(2) $f(x)=(2^x-\frac{1}{2})^2+\frac{15}{4}$，…… 5 分

当 $2^x=\frac{1}{2}$，即 $x=-1$ 时，$f(x)$ 取得最小值 $\frac{15}{4}$. …… 8 分

因为 $2^x>0$，…… 9 分

所以 $f(x)$ 的值域为 $[\frac{15}{4},+\infty)$. …… 10 分

18. 解：(1) 由图可知 $\frac{3}{4}T=\frac{5\pi}{12}-(-\frac{\pi}{3})=\frac{3\pi}{4}$，…… 1 分

故 $T=\pi$，则 $\omega=\frac{2\pi}{T}=2$. …… 3 分

又 $f(x)$ 的图象过点 $(\frac{5\pi}{12},3)$，则 $f(\frac{5\pi}{12})=3$，得 $\sin(\frac{5\pi}{6}+\varphi)=1$. …… 4 分

而 $|\varphi|<\frac{\pi}{2}$，所以 $\varphi=-\frac{\pi}{3}$. …… 6 分

(2) 由 (1) 知，$f(x)=3\sin(2x-\frac{\pi}{3})$，则 $f(\frac{\alpha}{2})=3\sin(\alpha-\frac{\pi}{3})=\frac{9}{5}$，

则 $\sin(\alpha-\frac{\pi}{3})=\frac{3}{5}$. …… 7 分

因为 $\alpha\in(\frac{\pi}{3},\frac{5\pi}{6})$，所以 $\alpha-\frac{\pi}{3}\in(0,\frac{\pi}{2})$，所以 $\cos(\alpha-\frac{\pi}{3})=\frac{4}{5}$，…… 9 分

所以 $\sin\alpha=\sin[(\alpha-\frac{\pi}{3})+\frac{\pi}{3}]=\sin(\alpha-\frac{\pi}{3})\cos\frac{\pi}{3}+\cos(\alpha-\frac{\pi}{3})\sin\frac{\pi}{3}$ …… 10 分

$=\frac{1}{2}\times\frac{3}{5}+\frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{4}{5}=\frac{3+4\sqrt{3}}{10}$. …… 12 分

19. 解：(1) $f'(x)=1-a^2e^{ax}$， …… 1 分

所以 $f'(0)=1-a^2$. …… 2 分

又 $f(0)=-a$，所以曲线 $y=f(x)$ 在点 $(0,f(0))$ 处的切线方程为 $y+a=(1-a^2)x$，

即 $y=(1-a^2)x-a$. …… 5 分

(2) 因为 $a>0$，所以 $a^2>0$. 令 $f'(x)=0$，得 $x=-\frac{2\ln a}{a}$； …… 6 分

令 $f'(x)>0$，得 $x<-\frac{2\ln a}{a}$； …… 7 分

令 $f'(x)<0$，得 $x>-\frac{2\ln a}{a}$. …… 8 分

所以 $f(x)_{\max}=f(-\frac{2\ln a}{a})=-\frac{2\ln a+1}{a}$. …… 10 分

因为 $f(x)<0$ 恒成立，所以 $-\frac{2\ln a+1}{a}<0$，因为 $a>0$，所以 $a>e^{\frac{1}{2}}$，

故 a 的取值范围为 $(e^{\frac{1}{2}},+\infty)$. …… 12 分

20. 解：(1) $\because g(x)=4\sin x(\frac{\sqrt{3}}{2}\cos x-\frac{1}{2}\sin x)=\sqrt{3}\sin 2x-(1-\cos 2x)$

$=2\sin(2x+\frac{\pi}{6})-1$， …… 2 分

$\therefore f(x)=2\sin(2x+\frac{\pi}{6}+2\varphi)-1$. …… 3 分

又 $f(x)$ 为偶函数，则 $\frac{\pi}{6}+2\varphi=\frac{\pi}{2}+k\pi(k\in\mathbf{Z})$，$\because 0<\varphi\leqslant\frac{\pi}{2}$，$\therefore\varphi=\frac{\pi}{6}$， …… 4 分

$\therefore f(x)=2\sin(2x+\frac{\pi}{2})-1=2\cos 2x-1=\frac{2(\cos^2x-\sin^2x)}{\cos^2x+\sin^2x}-1=\frac{2(1-\tan^2x)}{1+\tan^2x}-1$. …… 5 分

$\because \tan\alpha>2$，$\therefore f(\alpha)=\frac{4}{1+\tan^2\alpha}-3<\frac{4}{1+2^2}-3=-\frac{11}{5}$， …… 6 分

又 $f(\alpha)=\frac{4}{1+\tan^2\alpha}-3>-3$，$\therefore f(\alpha)$ 的取值范围为 $(-3,-\frac{11}{5})$. …… 7 分

(2) $\because x\in(\pi,\frac{7\pi}{6})$，$\therefore 2x+\frac{\pi}{6}+2\varphi\in(2\pi+\frac{\pi}{6}+2\varphi,2\pi+\frac{\pi}{2}+2\varphi)$. …… 8 分

$\because 0<\varphi\leqslant\frac{\pi}{2}$，$\therefore\frac{\pi}{6}+2\varphi\in(\frac{\pi}{6},\frac{7\pi}{6}]$，$\frac{\pi}{2}+2\varphi\in(\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}]$. …… 9 分

$\because f(x)$ 在 $(\pi,\frac{7\pi}{6})$ 上是单调函数，$\therefore\begin{cases}\frac{\pi}{6}+2\varphi\geqslant\frac{\pi}{2},\\0<\varphi\leqslant\frac{\pi}{2},\end{cases}$ …… 10 分

$\therefore\varphi\in[\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{2}]$. …… 12 分

21. (1) 解：令 $f(\pi x)=\pi x(1-\sin\pi x)=0$，得 $x=0$ 或 $\sin\pi x=1$， …… 1 分

即 $x=0$ 或 $\pi x=\frac{\pi}{2}+2k\pi(k\in\mathbf{Z})$，即 $x=0$ 或 $x=\frac{1}{2}+2k(k\in\mathbf{Z})$， …… 3 分

所以 $f(\pi x)$ 在 $(-20,20)$ 上的零点之和为 $-\frac{39}{2}-\frac{35}{2}-\frac{31}{2}-\cdots-\frac{3}{2}+0+\frac{1}{2}+\frac{5}{2}+\cdots+\frac{37}{2}=$

$\frac{(-\frac{39}{2}+\frac{37}{2})\times 20}{2}=-10$. …… 5 分

(2) 证明：设 $g(x)=f'(x)$，$g'(x)=x\sin x-2\cos x$，

$h(x)=g'(x)$，$h'(x)=x\cos x+3\sin x$， …… 6 分

当 $x\in(0,\frac{\pi}{2})$ 时，$h'(x)>0$，则 $h(x)=g'(x)$ 为增函数. …… 7 分

因为 $g'(0)=-2<0$，$g'(\frac{\pi}{2})=\frac{\pi}{2}>0$，所以 $\exists m\in(0,\frac{\pi}{2})$，$g'(m)=0$，…… 8 分

所以当 $x\in(0,m)$ 时，$g'(x)<0$；当 $x\in(m,\frac{\pi}{2})$ 时，$g'(x)>0$，…… 9 分

从而 $g(x)$ 在 $(0,m)$ 上单调递减，在 $(m,\frac{\pi}{2})$ 上单调递增.

又 $g(0)=1>0$，$g(\frac{\pi}{2})=0$，所以必存在唯一的 $x_0\in(0,\frac{\pi}{2})$，使得 $g(x_0)=0$，…… 10 分

当 $x\in(0,x_0)$ 时，$g(x)>0$；当 $x\in(x_0,\frac{\pi}{2})$ 时，$g(x)<0$. …… 11 分

故 $f(x)$ 在 $(0,\frac{\pi}{2})$ 上只有 1 个极值点 x_0. …… 12 分

22. (1)解：$f'(x)=ax-1+\frac{2a^2}{x}=\frac{ax^2-x+2a^2}{x}$，$x\in(0,+\infty)$. …… 1 分

设 $p(x)=ax^2-x+2a^2(x>0)$，$\Delta=1-8a^3$，

当 $a\geqslant\frac{1}{2}$ 时，$\Delta\leqslant0$，$p(x)\geqslant0$，则 $f'(x)\geqslant0$，$f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增. …… 2 分

当 $0<a<\frac{1}{2}$ 时，$\Delta>0$，$p(x)$ 的零点为 $x_1=\frac{1-\sqrt{1-8a^3}}{2a}$，$x_2=\frac{1+\sqrt{1-8a^3}}{2a}$，且 $0<x_1<x_2$，

令 $f'(x)>0$，得 $0<x<x_1$ 或 $x>x_2$，所以 $f(x)$ 在 $(0,\frac{1-\sqrt{1-8a^3}}{2a})$，$(\frac{1+\sqrt{1-8a^3}}{2a},+\infty)$ 上单调递增；…

…… 3 分

令 $f'(x)<0$，得 $x_1<x<x_2$，所以 $f(x)$ 在 $(\frac{1-\sqrt{1-8a^3}}{2a},\frac{1+\sqrt{1-8a^3}}{2a})$ 上单调递减. …… 4 分

当 $a<0$ 时，$\Delta>0$，$p(x)$ 的零点为 $\frac{1-\sqrt{1-8a^3}}{2a}$，$f(x)$ 在 $(0,\frac{1-\sqrt{1-8a^3}}{2a})$ 上单调递增，

在 $(\frac{1-\sqrt{1-8a^3}}{2a},+\infty)$ 上单调递减. …… 5 分

(2)证明：由(1)知，当 $0<a<\frac{1}{2}$ 时，$f(x)$ 存在两个极值点. …… 6 分

不妨假设 $0<x_1<x_2$，则 $x_1+x_2=\frac{1}{a}$.

要证 $\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}<\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}$，只需证 $f(x_1)-f(x_2)>\frac{(x_1-x_2)(x_1+x_2)}{x_1x_2}=\frac{x_1}{x_2}-\frac{x_2}{x_1}$，…… 7 分

只需证 $\frac{1}{2}(x_1-x_2)[a(x_1+x_2)-2]+2a^2\ln\frac{x_1}{x_2}=-\frac{1}{2}(x_1-x_2)+2a^2\ln\frac{x_1}{x_2}>\frac{x_1}{x_2}-\frac{x_2}{x_1}$，…… 8 分

即证 $2a^2\ln\frac{x_1}{x_2}-\frac{x_1}{x_2}+\frac{x_2}{x_1}>\frac{1}{2}(x_1-x_2)$. …… 9 分

设 $t=\frac{x_1}{x_2}(0<t<1)$，设函数 $g(t)=2a^2\ln t-t+\frac{1}{t}$，$g'(t)=-\frac{t^2-2a^2t+1}{t^2}$，

因为 $\Delta'=4a^4-4<0$，所以 $t^2-2a^2t+1>0$，$g'(t)<0$，…… 10 分

所以 $g(t)$ 在 $(0,1)$ 上单调递减，则 $g(t)>g(1)=0$. …… 11 分

又 $\frac{1}{2}(x_1-x_2)<0$，则 $g(t)>0>\frac{1}{2}(x_1-x_2)$，则 $2a^2\ln\frac{x_1}{x_2}-\frac{x_1}{x_2}+\frac{x_2}{x_1}>\frac{1}{2}(x_1-x_2)$，

从而 $\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}<\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}$. …… 12 分