2021 北京门头沟高三二模

数　　学

一、选择题共 10 个小题，每小题 4 分，共 40 分。在每小题给出的四个选项中，选出符合题目要求的一项。

1．（4 分）复数 $z=\dfrac{2i}{1-i}$ 在复平面内对应的点在(　　)

A．第一象限　　B．第二象限　　C．第三象限　　D．第四象限

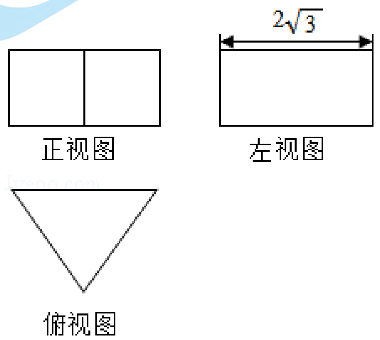
2．（4 分）集合 $A=\{x\,|\,x>0\}$，$B=\{x\,|\,x^2-3x\leqslant 4\}$，则 $A\bigcap B=$(　　)

A．R　　B．$[4$，$+\infty)$　　C．$(0$，$4]$　　D．$[-1$，$+\infty)$

3．（4 分）角 α 终边上一点 $P(1,2)$，把角 α 按逆时针方向旋转 180° 得到角为 θ，$\sin\theta=$(　　)

A．$-\dfrac{\sqrt{5}}{5}$　　B．$\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$　　C．$\dfrac{\sqrt{5}}{5}$　　D．$-\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$

4．（4 分）一个体积为 $12\sqrt{3}$ 正三棱柱的三视图如图所示，则这个三棱柱的左视图的面积为(　　)



A．$6\sqrt{3}$　　B．8　　C．$8\sqrt{3}$　　D．12

5．（4 分）中国古代数学著作《算法统宗》中有这样一个问题：“三百七十八里关，初步健步不为难，次日脚痛减一半，六朝才得到其关，要见次日行里数，请公仔细算相还．”其大意为：“有一个人走 378 里路，第一天健步行走，从第二天起脚痛每天走的路程为前一天的一半，走了 6 天后到达目的地．”则该人第五天走的路程为(　　)

A．48 里　　B．24 里　　C．12 里　　D．6 里

6．（4 分）“$\sin\alpha=\cos\alpha$”是“$\alpha=2k\pi+\dfrac{\pi}{4}$，$k\in Z$”的(　　)

A．充分不必要条件　　B．必要不充分条件

C．充分必要条件　　D．既不充分也不必要条件

7.（4 分）点 $P(\cos\theta,\sin\theta)$ 到直线 $3x+4y-12=0$ 的距离的取值范围为(　　)

A．$[\frac{12}{5}，\frac{17}{5}]$　　B．$[\frac{7}{5}，\frac{12}{5}]$　　C．$[\frac{7}{5}，\frac{17}{5}]$　　D．$[\frac{12}{5}，\frac{24}{5}]$

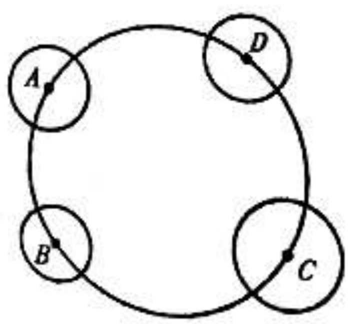
8.（4 分）魏晋时期，数学家刘徽首创割圆术，他在《九章算术注》方田章圆田术中指出："割之弥细，所失弥少，割之又割，以至于不可割，则与圆周合体而无所失矣．"这是一种无限与有限的转化过程，比如在正数 $\dfrac{12}{1+\dfrac{12}{1+....}}$ 中的"…"代表无限次重复，设 $x=\dfrac{12}{1+\dfrac{12}{1+....}}$，则可利用方程 $x=\dfrac{12}{1+x}$ 求得 x，类似地可得正数 $\sqrt{5\sqrt{5\sqrt{5....}}}$ 等于(　　)

A．3　　B．5　　C．7　　D．9

9.（4 分）已知抛物线 $C:y^2=2px(p>0)$ 的焦点为 F，过 F 且斜率为 $\sqrt{3}$ 的直线与抛物线 C 上相交于 P，Q 两点，且 P，Q 两点在准线上的投影分别为 M，N 两点，则 ΔFMN 的面积为(　　)

A．$\frac{8}{3}p^2$　　B．$\frac{8\sqrt{3}}{3}p^2$　　C．$\frac{4\sqrt{3}}{3}p^2$　　D．$\frac{2\sqrt{3}}{3}p^2$

10.（4 分）某维修公司的四个维修点如图环形分布，公司给 A，B，C，D 四个维修点某种配件各 50 个在使用前发现需要将发送给 A，B，C，D 四个维修点的配件调整为 40，45，54，61，但调整只能在相邻维修点间进行，每次调动只能调整 1 个配件，为完成调整，则(　　)



A．最少需要 16 次调动，有 2 种可行方案

B．最少需要 15 次调动，有 1 种可行方案

C．最少需要 16 次调动，有 1 种可行方案

D．最少需要 15 次调动，有 2 种可行方案

二、填空题共 5 小题，每小题 5 分，满分 25 分．

11.（5 分）函数 $y=\log_{\frac{1}{2}}(3x-2)+\sqrt{1-x}$ 的定义域是____．

12.（5 分）ΔABC 外接圆圆心为 O，且 $2\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}=\vec{0}$，则 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=$____．

13.（5 分）$P(x，\ y)(x>0，\ y>0)$ 是双曲线 $C:\frac{x^2}{4}-y^2=1$ 上的一点，$A(-2,0)$，$B(2,0)$，设 $\angle PAB=\alpha$，$\angle PBA=\beta$，ΔABP 的面积为 S，则 $S\tan(\alpha+\beta)$ 的值为____.

14.（5 分）函数 $f(x)=\sin 2x$ 的图象向右平移____个长度单位得到函数 $g(x)=\sin(2x-\frac{\pi}{3})$ 的图象，若函数 $g(x)$ 在区间 $(0,a)$ 上单调递增，则 a 的最大值为____.

15.（5 分）如图，在棱长为 2 的正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，点 P 是该正方体对角线 BD_1 上的动点，给出下列四个结论：

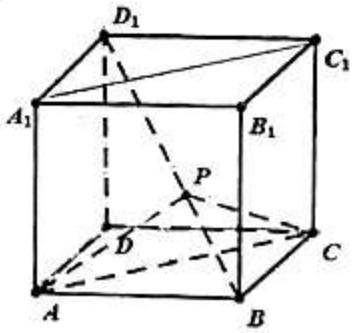
① $AC\perp B_1P$；

② ΔAPC 面积的最大值是 $2\sqrt{3}$；

③ ΔAPC 面积的最小值是 $\sqrt{2}$；

④当 $BP=\frac{2\sqrt{3}}{3}$ 时，平面 $ACP//$ 平面 A_1C_1D.

其中所有正确结论的序号是 ____.



三、解答题共 6 小题，共 85 分，解答应写出文字说明，演算步骤或证明过程。

16.（13 分）已知 ΔABC 满足____，且 $b=5$，$B=\frac{\pi}{4}$，从条件①、条件②、条件③中选择一个作为已知填在横线上，并求解下列问题：

（I）$\sin C$；

（II）求 ΔABC 的面积.

条件① $\tan A=2$，

条件② $b^2+c^2-a^2=2\sqrt{5}c$，

条件③ $3b=\sqrt{5}c$.

17.（13 分）京西某地到北京西站有阜石和莲石两条路，且到达西站所用时间互不影响．如表是该地区经这两条路抵达西站所用时长的频率分布表：

时间（分钟）	10 ~ 20	20 ~ 30	30 ~ 40	40 ~ 50	50 ~ 60
莲石路 (L_1) 的频率	0.1	0.2	0.3	0.2	0.2
阜石路 (L_2) 的频率	0	0.1	0.4	0.4	0.1

若甲、乙两人分别有 40 分钟和 50 分钟的时间赶往西站（将频率视为概率）．

（I）甲、乙两人应如何选择各自的路径？

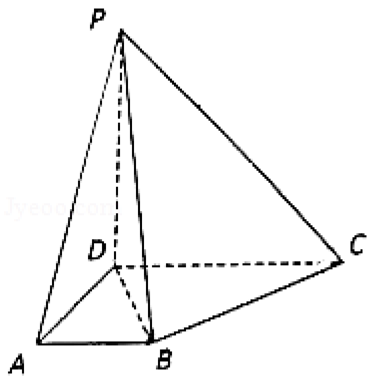
（II）按照（I）的方案，用 X 表示甲、乙两人按时抵达西站的人数，求 X 的分布列和数学期望．

18.（15 分）如图：$PD\perp$ 平面 $ABCD$，四边形 $ABCD$ 为直角梯形，$AB//CD$，$\angle ADC=90^\circ$，$PD=CD=2AD=2AB=2$．

（I）求证：平面 $BDP\perp$ 平面 PBC；

（II）求二面角 $B-PC-D$ 的余弦值；

（III）在棱 PA 上是否存在点 Q，使得 $DQ//$ 平面 PBC？若存在，求 $\dfrac{PQ}{PA}$ 的值，若不存在，请说明理由．



19.（14 分）F_1、F_2 分别为椭圆 $C:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的左、右焦点，过右焦点 F_2 的直线 l 与椭圆 C 交于 A，B 两点，且 AB 不为长轴，ΔABF_1 的周长为 8，椭圆 C 的离心率为 $\dfrac{1}{2}$．

（I）求此椭圆 C 的方程；

（II）A_2 为其右顶点，求证：直线 A_2A，A_2B 两直线的斜率之积为定值，并求出此定值．

20．（15 分）已知函数 $f(x)=a(x^2-1)-2lnx$， $a\in R$．

（I） $a=2$ 时，求在 $(1$， f （1） $)$ 处的切线方程；

（II）讨论 $f(x)$ 的单调性；

（III）证明：当 $a\geqslant 1$ 时， $f(x)\geqslant ax+\dfrac{1}{x}-(a+1)$ 在区间 $(1,+\infty)$ 上恒成立．

21．（15 分）已知定义在 R 上的函数 $\varphi(x)$ 的图象是一条连续不断的曲线，且在任意区间上 $\varphi(x)$ 不是常值函数．设 $a=t_0<t_1<\ldots<t_n=b$，其中分点 t_1， …， t_{n-1} 将区间 $[a$， $b]$ 分成 $n(n\in N^*)$ 个小区间 $[t_{i-1}$， $t_i]$，记 $M\{a$， b， $n\}=|\varphi(t_0)-\varphi(t_1)|+|\varphi(t_1)-\varphi(t_2)|+\ldots+|\varphi(t_{n-1}-\varphi(t_n)|$，称 $\varphi(x)$ 为关于区间 $[a$， $b]$ 的 n 阶划分的“落差总和”．当 $M\{a$， b， $n\}$ 取得最大值且 n 取得最小值 n_0 时，称 $\varphi(x)$ 存在“最佳划分” $M\{a$， b， $n_0\}$．

（I）已知 $\varphi(x)=\sin x$，求 $M\{0$， π， $2\}$ 的最大值 M_0 （不必论证）；

（II）已知 φ （a） $<\varphi$ （b），求证： $\varphi(x)$ 在区间 $[a$， $b]$ 上存在“最佳划分” $M\{a$， b， $1\}$ 的充要条件是 $\varphi(x)$ 在区间 $[a$， $b]$ 上单调递增．

2021 北京门头沟高三二模数学

参考答案

一、选择题共 10 个小题，每小题 4 分，共 40 分。在每小题给出的四个选项中，选出符合题目要求的一项。

1.【分析】利用复数的运算法则、几何意义即可得出.

【解答】解：复数 $z=\frac{2i}{1-i}=\frac{2i(1+i)}{(1-i)(1+i)}=\frac{2i(1+i)}{2}=i-1$ 在复平面内对应的点 $(-1,1)$ 在第二象限，

故选：B .

【点评】本题考查了复数的运算法则、几何意义，考查了推理能力与计算能力，属于基础题.

2.【分析】可求出集合 B，然后进行交集的运算即可.

【解答】解：$\because A=\{x\,|\,x>0\}$，$B=\{x\,|-1\leqslant x\leqslant 4\}$，

$\therefore A\bigcap B=(0，4]$.

故选：C .

【点评】本题考查了集合的描述法和区间的定义，一元二次不等式的解法，交集及其运算，考查了计算能力，属于基础题.

3.【分析】由已知结合三角函数的定义及诱导公式即可直接求解.

【解答】解：由题意得，$\sin\alpha=\frac{2\sqrt{5}}{5}$，$\cos\alpha=\frac{\sqrt{5}}{5}$，$\theta=\alpha+180°$，

所以 $\sin\theta=\sin(\alpha+180°)=-\sin\alpha=-\frac{2\sqrt{5}}{5}$.

故选：D .

【点评】本题主要考查了三角函数的定义及诱导公式，属于基础题.

4.【分析】此几何体是一个正三棱柱，正视图即内侧面，底面正三角形的高是 $2\sqrt{3}$，由正三角形的性质可以求出其边长，由于本题中体积已知，故可设出棱柱的高，利用体积公式建立起关于高的方程求高，再由正方形的面积公式求侧视图的面积即可.

【解答】解：设棱柱的高为 h，

由左视图知，底面正三角形的高是 $2\sqrt{3}$，由正三角形的性质知，其边长是 4，

故底面三角形的面积是 $\frac{1}{2}\times 2\sqrt{3}\times\ 4=4\ \sqrt{3}$

由于其体积为$12\sqrt{3}$，故有$h\times 4\sqrt{3}=12\sqrt{3}$，得$h=3$

由三视图的定义知，侧视图的宽即此三棱柱的高，故侧视图的宽是 3，其面积为$3\times 2\sqrt{3}=6\sqrt{3}$

故选：A.

【点评】本题考点是简单空间图形的三视图，考查根据作三视图的规则几何体的直观图的能力以及利用体积公式建立方程求参数的能力，三视图的投影规则是："主视、俯视 长对正；主视、左视高平齐，左视、俯视 宽相等".

5.【分析】由题意可知，每天走的路程里数构成以$\frac{1}{2}$为公比的等比数列，由$S_6=378$求得首项，再由等比数列的通项公式求得该人第五天走的路程.

【解答】解：记每天走的路程里数为$\{a_n\}$，

由题意知$\{a_n\}$是公比$\frac{1}{2}$的等比数列，

由$S_6=378$，得$S_6=\dfrac{a_1(1-\frac{1}{2^6})}{1-\frac{1}{2}}=378$，

解得：$a_1=192$，

$\therefore a_5=192\times\frac{1}{2^4}=12$（里）.

故选：C.

【点评】本题考查等比数列的通项公式的运用，是基础题，解题时要认真审题，注意等比数列的性质的合理运用.

6.【分析】根据充分必要条件的定义结合集合的包含关系判断即可.

【解答】解：由"$\sin\alpha=\cos\alpha$"得：$\alpha=k\pi+\frac{\pi}{4}$，$k\in Z$，

故$\sin\alpha=\cos\alpha$是"$\alpha=\frac{\pi}{4}+2k\pi,(k\in Z)$"的必要不充分条件，

故选：B.

【点评】本题考查了充分必要条件，考查三角函数以及集合的包含关系，是一道基础题.

7.【分析】利用点到直线的距离公式，三角函数的性质可得答案.

【解答】解：记d为点$P(\cos\theta,\sin\theta)$到直线$3x+4y-12=0$的距离，

即：$d=\frac{1}{5}|3\cos\theta+4\sin\theta-12|=\frac{1}{5}|5\sin(\theta+\varphi)-12|$，其中 $\tan\varphi=\frac{3}{4}$；

当 θ 变化时，d 的最大值为 $\frac{17}{5}$，d 的最小值为 $\frac{7}{5}$，

故选：C.

【点评】本题考查的知识点是点到直线的距离公式，三角函数的性质，属于基础题.

8.【分析】设 $\sqrt{5\sqrt{5\sqrt{5.....}}}=x$ 可解决此题.

【解答】解：设 $\sqrt{5\sqrt{5\sqrt{5.....}}}=x$，则 $x=\sqrt{5x}$，解得：$x=5$ 或 0（舍去）.

故选：B.

【点评】本题考查方程思想，考查数学运算能力，属于基础题.

9.【分析】求出直线 PQ 的方程，与抛物线 $y^2=2px$ 联立，求出 P，Q 的坐标，得到 MN，然后求解三角形的面积.

【解答】解：抛物线 $C:y^2=2px(p>0)$ 的焦点坐标为 $F(\frac{p}{2}$，$0)$，

由题意可得直线 $PQ:y=\sqrt{3}(x-\frac{p}{2})$，

联立 $\begin{cases}y^2=2px\\ y=\sqrt{3}(x-\frac{p}{2})\end{cases}$，得：$12x^2-20px+3p^2=0$，

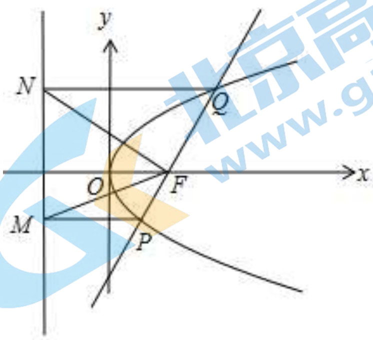
解得：$P(\frac{p}{6},-\frac{\sqrt{3}}{3}p)$，$Q(\frac{3p}{2},\sqrt{3}p)$，

则 $MN=\sqrt{3}p+\frac{\sqrt{3}}{3}p=\frac{4\sqrt{3}}{3}p$，

在 ΔMNF 中，MN 边上的高 $h=p$，

则 $S_{\Delta MFN}=\frac{1}{2}\times\frac{4\sqrt{3}}{3}p\times p=\frac{2\sqrt{3}}{3}p^2$.

故选：D.



【点评】本题考查抛物线的简单性质的应用，考查计算能力，是中档题.

10.【分析】根据题意，先分析两处互不相邻BD两处的调整方法数目，进而分析可得答案.

【解答】解：根据题意，因为B、D两处互不相邻，所以B处至少调整5次，D处至少调整11次，故最少需要调整16次

相应的可行方案有2种，

方案①：A调整10个给D，B调整5个给C，然后C再调整1个给D；

方案②：A调整11个给D，B调整1个给A，调整4个给C，

故选：A.

【点评】本题考查合情推理的应用，注意认真审题，明确题意，属于基础题.

二、填空题共5小题，每小题5分，满分25分.

11.【分析】根据函数的解析式，列不等式组求出使函数有意义的x的取值范围即可.

【解答】解：函数$y=\log_{\frac{1}{2}}(3x-2)+\sqrt{1-x}$中，

令$\begin{cases}3x-2>0\\1-x\geqslant 0\end{cases}$，解得$\frac{2}{3}<x\leqslant 1$，

所以该函数的定义域是$(\frac{2}{3}，1]$.

故答案为：$(\frac{2}{3}，1]$.

【点评】本题考查了根据函数的解析式求定义域的应用问题，是基础题.

12.【分析】画出图形，结合已知条件判断两个向量的关系，然后求解$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$即可.

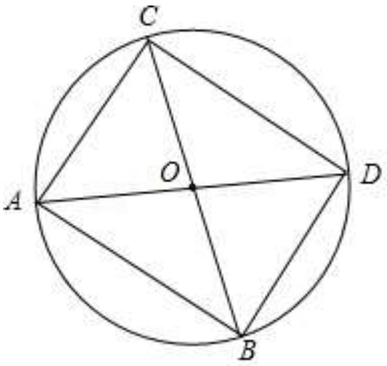
【解答】解：如图，ΔABC外接圆圆心为O，且$2\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{0}$，

可知$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}=-\overrightarrow{OA}=2\overrightarrow{AO}=\overrightarrow{AD}$，

所以ΔABC是直角三角形，$AB\perp AC$，

则$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=0$.

故答案为：0.



【点评】本题考查向量的数量积的求法，数形结合的应用，是基础题．

13．【分析】将 P 的坐标代入双曲线的方程可得 $x^2-4=4y^2$，运用直线的斜率公式和两角和的正切公式，以及三角形的面积公式，化简整理，可得所求值．

【解答】解：$P(x，y)(x>0，y>0)$ 是双曲线 $C:\frac{x^2}{4}-y^2=1$ 上的一点，

可得 $x^2-4=4y^2$，

$\tan\alpha+\tan\beta=\frac{y}{x+2}-\frac{y}{x-2}=\frac{-4y}{x^2-4}=\frac{-4y}{4y^2}=-\frac{1}{y}$，

$\tan\alpha\tan\beta=\frac{y}{x+2}\cdot\frac{-y}{x-2}=\frac{-y^2}{x^2-4}=\frac{-y^2}{4y^2}=-\frac{1}{4}$，

$S=\frac{1}{2}|AB|\cdot y=2y$，

所以 $S\tan(\alpha+\beta)=2y\cdot\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}=2y\cdot\frac{-\frac{1}{y}}{1+\frac{1}{4}}=-\frac{8}{5}$．

故答案为：$-\frac{8}{5}$．

【点评】本题考查双曲线的方程和运用，以及两角和的正切公式，考查化简运算能力，属于中档题．

14．【分析】根据三角函数图象变换关系，以及利用三角函数的单调性进行求解即可．

【解答】解：由 $g(x)=\sin(2x-\frac{\pi}{3})=\sin 2(x-\frac{\pi}{6})$，

即函数 $f(x)=\sin 2x$ 的图象向右平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位即可得到 $g(x)$ 的图象，

当 $0<x<a$ 时，$0<2x<2a$，

$-\frac{\pi}{3}<2x-\frac{\pi}{3}<2a-\frac{\pi}{3}$，

若 $g(x)$ 在区间 $(0,a)$ 上单调递增，

则 $2a-\frac{\pi}{3}\leqslant\frac{\pi}{2}$，得 $0<a\leqslant\frac{5\pi}{12}$，

即 a 的最大值为 $\frac{5\pi}{12}$，

故答案为：$\frac{\pi}{6}$，$\frac{5\pi}{12}$．

【点评】本题主要考查三角函数的图象和性质，利用三角函数图象变换以及三角函数的单调性是解决本题的关键．

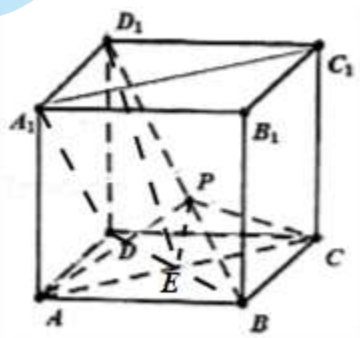
15．【分析】通过证明 $AC\perp$ 平面 BDD_1B_1 来证明 $AC\perp B_1P$；

将 ΔAPC 的面积表示出来，等价于求 PE 长度的最值，从而在 $\mathrm{Rt}\Delta\mathrm{BDD_1}$ 中分别求得最大值和最小值；

通过证明 $BD_1\perp$ 平面 APC 且 $BD_1\perp$ 平面 A_1C_1D 来证明平面 $ACP//$ 平面 A_1C_1D．

【解答】解：在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，$AC\perp BD$，$AC\perp DD_1$，$BD\bigcap DD_1=D$，

故 $AC\perp$ 面 BDD_1B_1，又 $B_1P\subset$ 面 BB_1D_1D，$\therefore AC\perp B_1P$，故①正确；



如图，连接 BD 交 AC 于 E，$\because EP\subset$ 面 BDD_1B_1，$\therefore AC\perp EP$，

故 $S_{\Delta APC}=\frac{1}{2}AC\cdot PE=\sqrt{2}PE$，

当 PE 与 ED_1 重合时，PE 最大，$DE=\sqrt{2}$，$ED_1=\sqrt{(\sqrt{2})^2+2^2}=\sqrt{6}$，

此时 $S_{\Delta APC}=\sqrt{2}PE=\sqrt{2}\times\sqrt{6}=2\sqrt{3}$，故②正确；

在 $\mathrm{Rt}\Delta\mathrm{BDD_1}$ 中，当 $PE\perp BD_1$ 时，PE 取最小值，$BD=2\sqrt{2}$，$BD_1=2\sqrt{3}$，$\sin\angle DBD_1=\frac{DD_1}{BD_1}=\frac{\sqrt{3}}{3}$，

此时 $PE=BE\sin\angle DBD_1=\sqrt{2}\times\frac{\sqrt{3}}{3}=\frac{\sqrt{6}}{3}$，所以 $S_{\Delta APC_{min}}=\sqrt{2}PE=\sqrt{2}\times\frac{\sqrt{6}}{3}=\frac{2\sqrt{3}}{3}$，故③错误；

当 $BP=\frac{2\sqrt{3}}{3}$ 时，在 ΔBEP 中，$BE=\sqrt{2}$，$\cos\angle DBD_1=\frac{BD}{BD_1}=\frac{\sqrt{6}}{3}$，

$\therefore PE=\sqrt{BP^2+BE^2-2BP\cdot BE\cos\angle PBE}=\sqrt{(\frac{2\sqrt{3}}{3})^2+2-2\times\frac{2\sqrt{3}}{3}\times\sqrt{2}\times\frac{\sqrt{6}}{3}}=\frac{\sqrt{6}}{3}$，

$\therefore PE\perp PB$，又 $AC\perp PB$，$AC\bigcap PE=E$，$\therefore BD_1\perp$ 面 APC，

由正方体易知 $BD_1\perp A_1C_1$，$BD_1\perp A_1D$，即 $BD_1\perp$ 面 A_1C_1D，$\therefore$ 面 $ACP//$ 面 A_1C_1D，故④正确；

故答案为：①②④．

【点评】本题考查了空间中的线线垂直的判定，以及面面平行的性质．

三、解答题共 6 小题，共 85 分，解答应写出文字说明，演算步骤或证明过程。

16.【分析】(I) 选① $\tan A=2$，结合同角基本关系先求出 $\cos A$，$\sin A$，进而可求 $\sin C$，然后结合余弦定理可求 $\cos A$，$\sin A$，结合诱导公式及和角正弦可求 $\sin C$；

选② $b^2+c^2-a^2=2\sqrt{5}c$，由余弦定理可求 $\cos A$，进而可求 $\sin A$，结合诱导公式及和角正弦可求 $\sin C$；

选③ $3b=\sqrt{5}c$，然后结合正弦定理可求 $\sin C$；

所以 $c=3\sqrt{5}$，$b=5$，$B=\frac{\pi}{4}$，

(II) 由 (I) 可求 $\cos C$，然后求出 $\sin A$，结合三角形面积公式可求．

【解答】解：选①，$(I)\tan A=2$，A 为锐角，

所以 $\cos A=\frac{\sqrt{5}}{5}$，$\sin A=\frac{2\sqrt{5}}{5}$，

$\sin C=\sin(A+B)=\sin A\cos B+\sin B\cos A=(\frac{2\sqrt{5}}{5}+\frac{\sqrt{5}}{5})\times\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{3\sqrt{10}}{10}$；

(II) 由正弦定理可得 $a=\frac{b\sin A}{\sin B}=\frac{5\times\frac{2\sqrt{5}}{5}}{\frac{\sqrt{2}}{2}}=2\sqrt{10}$，

所以 ΔABC 的面积为 $S=\frac{1}{2}ab\sin C=\frac{1}{2}\times2\sqrt{10}\times5\times\frac{3\sqrt{10}}{10}=15$；

选②，（I） $b^2+c^2-a^2=2\sqrt{5}c$，

由余弦定理得，$\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\frac{\sqrt{5}}{5}$，

故 A 为锐角，$\sin A=\frac{2\sqrt{5}}{5}$，

所以$\sin C=\sin(A+B)=\sin A\cos B+\sin B\cos A=(\frac{2\sqrt{5}}{5}+\frac{\sqrt{5}}{5})\times\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{3\sqrt{10}}{10}$；

(II) 由正弦定理可得 $a=\frac{b\sin A}{\sin B}=\frac{5\times\frac{2\sqrt{5}}{5}}{\frac{\sqrt{2}}{2}}=2\sqrt{10}$，

所以 ΔABC 的面积为 $S=\frac{1}{2}ab\sin C=\frac{1}{2}\times2\sqrt{10}\times5\times\frac{3\sqrt{10}}{10}=15$；

选③，（I）$3b=\sqrt{5}c=15$，

所以 $c=3\sqrt{5}$，$b=5$，$B=\frac{\pi}{4}$，

由正弦定理得，$\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}$，

所以 $\sin C=\frac{3\sqrt{5}\times\frac{\sqrt{2}}{2}}{5}=\frac{3\sqrt{10}}{10}$；

(II) 由 (I) 知 $\cos C=\pm\frac{\sqrt{10}}{10}$，

因为 $c>b$，

所以 $C>B$，

故 C 有两解，

又 $\sin A=\sin(B+C)=\sin B\cos C+\sin C\cos B=\pm\frac{\sqrt{10}}{10}\times\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{3\sqrt{10}}{10}\times\frac{\sqrt{2}}{2}$，

即 $\sin A=\frac{\sqrt{5}}{5}$ 或 $\sin A=\frac{2\sqrt{5}}{5}$，

当 $\sin A=\frac{\sqrt{5}}{5}$ 时，$S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}bc\sin A=\frac{1}{2}\times5\times3\sqrt{5}\times\frac{\sqrt{5}}{5}=\frac{15}{2}$，

当 $\sin A=\frac{2\sqrt{5}}{5}$ 时，$S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}bc\sin A=\frac{1}{2}\times5\times3\sqrt{5}\times\frac{2\sqrt{5}}{5}=15$.

【点评】本题主要考查了正弦定理，余弦定理，和差角公式及同角平方关系，三角形面积公式在求解三角形中的应用，属于中档题.

17.【分析】（I）A_i 表示事件“甲选择路径 L_i 时，40 分钟内赶到火车站”， B_i 表示事件“乙选择路径 L_i 时，50 分钟内赶到西站”，用频率估计相应的概率 $P(A_1)$，$P(A_2)$ 比较两者的大小，及 $P(B_1)$，$P(B_2)$ 的从而进行判断甲与乙路径的选择；

（II）A，B 分别表示针对（I）的选择方案，甲、乙在各自允许的时间内抵达西站，由 (I) 知 P（A）$=0.6$，P（B）$=0.9$，且甲、乙相互独立，X 可能取值为 0，1，2，分别代入相互独立事件的概率公式求解对应的概

率，再进行求解期望即可．

【解答】解：(I) A_i 表示事件“甲选择路径 L_i 时，40 分钟内赶到西站”，

B_i 表示事件“乙选择路径 Li 时，50 分钟内赶到西站”， $i=1$，2．

用频率估计相应的概率可得：

因为 $P(A_1)=0.1+0.2+0.3=0.6$，

$P(A_2)=0.1+0.4=0.5$，

因为 $P(A_1)>P(A_2)$，所以甲应选择 L_1，

$P(B_1)=0.1+0.2+0.3+0.2=0.8$，

$P(B_2)=0.1+0.4+0.4=0.9$，

因为 $P(B_2)>P(B_1)$，所以乙应选择 L_2．

(II) A，B 分别表示针对（I）的选择方案，甲、乙在各自允许的时间内赶到西站，

由（I）知 P（A）$=0.6$，P（B）$=0.9$，

又由题意知，A，B 相互独立，

$P(X=0)=P(\bar{A}\bar{B})=P(\bar{A})P(\bar{B})=0.4\times0.1=0.04$，

$P(X=1)=P(\bar{A}B+A\bar{B})=P(\bar{A})P$（B）$+P$（A）$P(\bar{B})$

$=0.4\times0.9+0.6\times0.1=0.42$，

$P(X=2)=P(AB)=P$（A）（B）$=0.6\times0.9=0.54$，

X 的分布列为：

X	0	1	2
P	0.04	0.42	0.54

$E(X)=0\times0.04+1\times0.42+2\times0.54=1.5$．

【点评】本题主要考查了随机抽样用样本估计总体的应用，相互独立事件的概率的求解，离散型随机变量的分布列与数学期望的求解，考查运算求解能力，属于中档题．

18.【分析】(I) 只须证明平面 PBC 内直线 BC 垂直于平面 PBD 即可；(II) 用向量数量积计算二面角的余弦值；

（III）用反证法说明不存在．

【解答】（I）证明：取 CD 中点 M，连接 BM，

因为四边形 $ABCD$ 为直角梯形，$AB//CD$，$\angle ADC=90^{\circ}$，$CD=2AD=2AB=2$，

所以四边形 $ABMD$ 为正方形，$BC\perp BD$，因为 $PD\perp$ 平面 $ABCD$，$BC\subset$ 平面 $ABCD$，所以 $PD\perp BC$，

又因为 $PD\bigcap BD=D$，PD、$BD\subset$ 平面 PBD，所以 $BC\perp$ 平面 PBD，

又因为 $BC\subset$ 平面 PBC，所以平面 $PBC\perp$ 平面 PBD，

于是平面 $PBD\perp$ 平面 ABC．

（II）解：因为 $PD\perp$ 平面 $ABCD$，所以 $PD\perp AD$、$PD\perp DC$，

又因为 $\angle ADC=90^{\circ}$，所以 DA、DC、DP 两两垂直，

建立如图所示的空间直角坐标系，

$\overrightarrow{BC}=(-1,\ 1,\ 0)$，$\overrightarrow{BP}=(-1,\ -1,\ 2)$，

设平面 PBC 的法向量为 $\vec{m}=(x,\ y,\ z)$，

$\begin{cases}\overrightarrow{BC}\cdot\vec{m}=-x+y=0\\ \overrightarrow{BP}\cdot\vec{m}-x-y+2z=0\end{cases}$，令 $x=1$，$\vec{m}=(1,\ 1,\ 1)$，

平面 PCD 的法向量为 $\vec{n}=(1,\ 0,\ 0)$，

所以二面角 $B-PC-D$ 的余弦值为 $\dfrac{|\vec{m}\cdot\vec{n}|}{|\vec{m}|\cdot|\vec{n}|}=\dfrac{1}{\sqrt{3}\cdot 1}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$．

（III）解：不存在，理由如下：

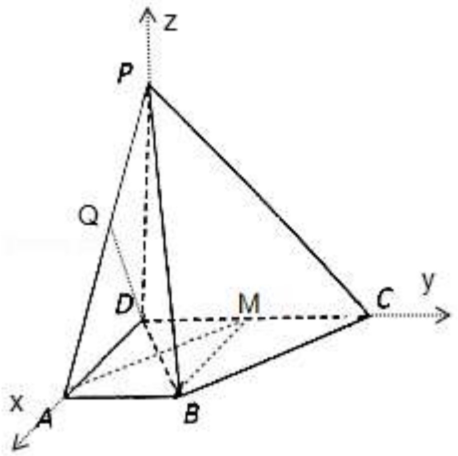
假设在棱 PA 上存在点 Q，使得 $DQ//$ 平面 PBC，

令 $\dfrac{PQ}{PA}=t(t\in[0,1])$，则 $Q(t,\ 0,\ 2(1-t))$，

$\overrightarrow{DQ}=(t,\ 0,\ 2(1-t))$，由（II）知平面 PBC 的法向量为 $\vec{m}=(1,\ 1,\ 1)$，

因为 $DQ//$ 平面 PBC，所以 $\overrightarrow{DQ}\cdot\vec{m}=2-t=0$，解得 $t=2$，与 $t\in[0,\ 1]$ 矛盾，

所以在棱 PA 上不存在点 Q，使得 $DQ//$ 平面 PBC．



【点评】本题考查了直线与平面的位置关系，考查了二面角的计算问题，属于中档题.

19.【分析】(I) 根据题意可得 $4a=8$，再根据离心率可求得 c，及而求得 b，由此得到椭圆方程；

(II) $A_2(2,0)$，设直线 $AB: x=ty+1$，设出点 A，B 坐标，联立直线方程与椭圆方程，消去 x 并整理后，由根与系数的关系化简即可得证.

【解答】解：(I) 由题意可知，$|AF_1|+|AF_2|=2a$，$|BF_1|+|BF_2|=2a$，而 ΔABF_1 的周长为 8，则 $4a=8$，故 $a=2$，

又 $e=\dfrac{c}{a}=\dfrac{1}{2}$，故 $c=1$，$b^2=a^2-c^2=3$，

$\therefore$ 椭圆 C 的方程为 $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1$；

(II) 证明：由 (I) 可知，$A_2(2,0)$，设直线 $AB: x=ty+1$，$A(x_1,y_1),B(x_2,y_2),k_{A_2A}=\dfrac{y_1}{x_1-2},k_{A_2B}=\dfrac{y_2}{x_2-2}$，

联立 $\begin{cases} x=ty+1 \\ \dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1 \end{cases}$ 得，$(3t^2+4)y^2+6ty-9=0$，

$\therefore\ y_1+y_2=-\dfrac{6t}{3t^2+4},y_1y_2=-\dfrac{9}{3t^2+4}$，

$\therefore\ x_1x_2=(ty_1+1)(ty_2+1)=t^2y_1y_2+t(y_1+y_2)+1=\dfrac{-12t^2+4}{3t^2+4}$，$x_1+x_2=t(y_1+y_2)+2=\dfrac{8}{3t^2+4}$，

$$\therefore\ k_{A_2A}\cdot k_{A_2B}=\frac{y_1y_2}{(x_1-2)(x_2-2)}=\frac{y_1y_2}{x_1x_2-2(x_1+x_2)+4}=\frac{\dfrac{-9}{3t^2+4}}{\dfrac{-12t^2+4}{3t^2+4}-\dfrac{16}{3t^2+4}+4}=\frac{-9}{-12t^2+4-16+12t^2+16}=-\frac{9}{4},$$

$\therefore$ 直线 A_2A，A_2B 两直线的斜率之积为定值 $-\dfrac{9}{4}$.

【点评】本题考查椭圆标准方程的求法，考查直线与椭圆的位置关系，考查圆锥曲线中的定值问题，考查运算

求解能力及逻辑推理能力，属于中档题．

20．【分析】（I）代入 a 的值，求出函数的导数，计算 f（1），f'（1），求出切线方程即可；

（II）求出函数的导数，通过讨论 a 的范围，求出函数的单调区间即可；

（III）问题转化为 $ax^2-ax-2lnx-\frac{1}{x}+1\geqslant 0$ 在 $(1,+\infty)$ 上恒成立，令 $h(x)=ax^2-ax-2lnx-\frac{1}{x}+1$，$(x>1)$，求出函数的导数，根据函数的单调性证明即可．

【解答】解：（I）$a=2$ 时，$f(x)=2(x^2-1)-2lnx$，

$f'(x)=4x-\frac{2}{x}$，f'（1）$=2$，f（1）$=0$，

故切线方程是：$y-0=2(x-1)$，即 $y=2(x-1)$．

（II）$f(x)=a(x^2-1)-2lnx$，

$f'(x)=2ax-\frac{2}{x}=\frac{2ax^2-2}{x}(x>0)$，

①当 $a\leqslant 0$ 时，$f'(x)<0$ 在 $(0,+\infty)$ 上恒成立，

$\therefore f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递减，

②当 $a>0$ 时，由 $f'(x)=0$，得 $x=\sqrt{\frac{1}{a}}$，

当 $x\in(0,\sqrt{\frac{1}{a}})$ 时，$f'(x)<0$，$f(x)$ 递减，

当 $x\in(\sqrt{\frac{1}{a}}$，$+\infty)$ 时，$f'(x)>0$，$f(x)$ 递增，

综上：$a\leqslant 0$ 时，$f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递减，

$a>0$ 时，$f(x)$ 在 $(0,\sqrt{\frac{1}{a}})$ 递减，在 $(\sqrt{\frac{1}{a}}$，$+\infty)$ 递增．

（III）证明：当 $a\geqslant 1$ 时，$f(x)\geqslant ax+\frac{1}{x}-(a+1)$，

即 $ax^2-ax-2lnx-\frac{1}{x}+1\geqslant 0$ 在 $(1,+\infty)$ 上恒成立，

令 $h(x)=ax^2-ax-2lnx-\frac{1}{x}+1$，$(x>1)$，

则 $h'(x)=2ax-a-\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}$，$h''(x)=2a+\frac{2}{x^3}(x-1)$，

由于 $a\geqslant 1$，$x>1$，则 $h''(x)>0$，

故 $h'(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 上单调递增，

而 h'（1）$=a-1\geqslant 0$，则 $h(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 上单调递增，

故 $h(x)>h$（1）$=0$，

故当 $a\geqslant 1$ 时，$f(x)\geqslant ax+\dfrac{1}{x}-(a+1)$ 在区间 $(1,+\infty)$ 上恒成立．

【点评】本题考查了切线方程问题，考查函数的单调性，最值问题，考查导数的应用以及不等式的证明，考查转化思想，是中档题．

21．【分析】(I）根据题意，直接计算出答案即可；

（II）先证明充分性，再证明必要性，进而得证．

【解答】解：(I）$M_0=|\varphi(0)-\varphi(\frac{\pi}{2})|+|\varphi(\frac{\pi}{2})-\varphi(\pi)|=2$；

（II）证明：若 $\varphi(x)$ 在 $[a，b]$ 上单调递增，则 (Tex translation failed)，

故 $\varphi(x)$ 在 $[a，b]$ 上存在"最佳划分" $M\{a，b，1\}$；

若 $\varphi(x)$ 在 $[a，b]$ 上存在"最佳划分" $M\{a，b，1\}$，假设 $\varphi(x)$ 在 $[a，b]$ 上不单调递增，则存在 x_1，$x_2\in[a，b]$，若 $x_1<x_2$，则 $\varphi(x_1)>\varphi(x_2)$．

由 $|\varphi$（a）$-\varphi$（b）$|\leqslant|\varphi$（a）$-\varphi(x_1)|+|\varphi(x_1)-\varphi(x_2)|+|\varphi(x_2)-\varphi$（b）$|(*)$，当且仅当 φ（a）$-\varphi(x_1)\geqslant 0$，$\varphi(x_1)-\varphi(x_2)\geqslant 0$，$\varphi(x_2)-\varphi$（b）$\geqslant 0$ 时等号成立，

此时 $|\varphi$（a）$-\varphi$（b）$|=\varphi$（a）$-\varphi(x_1)+\varphi(x_1)-\varphi(x_2)+\varphi(x_2)-\varphi$（b）$=\varphi$（a）$-\varphi$（b）$<0$，与题设矛盾，舍去，故 $(*)$ 式中等号不成立，

即：增加分点 x_1，x_2 后，"落差总和"会增加，故 $M\{a，b，n\}$ 取最大值时 n 的最小值大于 1，与条件矛盾，

所以 $\varphi(x)$ 在 $[a，b]$ 上单调递增．

综上，即得证．

【点评】本题以新定义为载体，旨在考查学生的逻辑推理能力，语言转化能力，培养学生的创新意识和应用意识，属于中档题．

关于我们

北京高考在线创办于 2014 年，隶属于北京太星网络科技有限公司，是北京地区极具影响力的中学升学服务平台。主营业务涵盖：北京新高考、高中生涯规划、志愿填报、强基计划、综合评价招生和学科竞赛等。

北京高考在线旗下拥有网站门户、微信公众平台等全媒体矩阵生态平台。平台活跃用户 40W+，网站年度流量数千万量级。用户群体立足于北京，辐射全国 31 省市。

北京高考在线平台一直秉承 ‘’ 精益求精、专业严谨 ‘’ 的建设理念，不断探索“K12 教育+互联网+大数据”的运营模式，尝试基于大数据理论为广大中学和家长提供新鲜的高考资讯、专业的高考政策解读、科学的升学规划等，为广大高校、中学和教科研单位提供“衔接和桥梁纽带”作用。

平台自创办以来，为众多重点大学发现和推荐优秀生源，和北京近百所中学达成合作关系，累计举办线上线下升学公益讲座数百场，帮助数十万考生顺利通过考入理想大学，在家长、考生、中学和社会各界具有广泛的口碑影响力

未来，北京高考在线平台将立足于北京新高考改革，基于对北京高考政策研究及北京高校资源优势，更好的服务全国高中家长和学生。