

第一部分 (选择题, 共 40 分)

一、选择题共 8 小题, 每小题 5 分, 共 40 分。在每小题列出的四个选项中, 选出符合题目要求的一项。

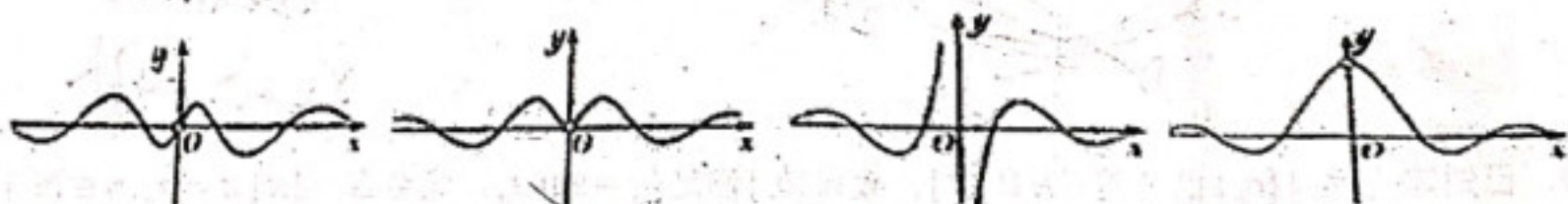
1. 已知集合 $A = \{x | x^2 - 2x - 3 < 0\}$, 集合 $B = \{x | 2^{x+1} > 1\}$, 则 $C_B A =$

- A. $[3, +\infty)$ B. $(3, +\infty)$ C. $(-\infty, -1] \cup [3, +\infty)$ D. $(-\infty, -1) \cup (3, +\infty)$

2. 函数 $f(x) = \ln(1+x) - \ln(1-x)$ 是

- A. 奇函数, 且在定义域上是减函数 B. 奇函数, 且在定义域上是增函数
 C. 偶函数, 且在定义域上是增函数 D. 偶函数, 且在定义域上是减函数

3. 函数 $f(x) = \frac{\cos \frac{\pi}{2} x}{x + \frac{1}{x}}$ 的图象可能是



- A. $\log_a 1$ B.

4. 函数 $y = \log_a(x-2) - 3$ ($a > 0, a \neq 1$) 的图象过定点 (m, n) , 则幂函数 $y = x^{\frac{m}{n}}$ 的单调减区间为

- A. $(-\infty, 0)$ B. $(0, +\infty)$ C. $(-\infty, 0)$ 和 $(0, +\infty)$ D. \mathbb{R}

5. 已知 $a = \sin \frac{2\pi}{7}$, $b = \cos \frac{12\pi}{7}$, $c = \tan \frac{9\pi}{7}$, 则 ()

- A. $a > b > c$ B. $c > b > a$ C. $c > a > b$ D. $a > c > b$

6. 已知函数 $f(x) = |4 \sin x \cos x - \frac{1}{2}|$, 若 $f(x-a) = f(x+a)$ 恒成立, 则实数 a 的最小正值为

- A. 2π B. π C. $\frac{\pi}{2}$ D. $\frac{\pi}{4}$

7. 已知二次函数 $f(x) = \frac{1}{4}x^2 + 1$, 过点 $M(a, 0)$ 作直线 l_1, l_2 与 $f(x)$ 的图象相切于 A, B 两点, 则直线 AB

- A. 过定点 $(0, 1)$ B. 过定点 $(0, 2)$ C. 过定点 $(a, 1)$ D. 过定点 $(a, 2)$

8. 庙会是我国古老的传统民俗文化活动, 又称“庙市”或“节场”. 庙会大多在春节、元宵节等节日举行. 庙会上有丰富多彩的文化娱乐活动, 如“砸金蛋” (游玩者每次砸碎一颗金蛋, 如果有奖品, 则“中奖”). 今年春节期间, 某校甲、乙、丙、丁四位同学相约来到某庙会, 每人均获得砸一颗金蛋的机会. 游戏开始前, 甲、乙、丙、丁四位同学对游戏中奖结果进行了预测, 预测结果如下:

甲说: “我或乙能中奖”; 乙说: “丁能中奖”; 丙说: “我或乙能中奖”; 丁说: “甲不能中奖”.

游戏结束后, 这四位同学中只有一位同学中奖, 且只有一位同学的预测结果是正确的, 则中奖的同学是

A. 甲

B. 乙

~~C. 丙~~

~~D. 丁~~

第二部分 (非选择题 共 110 分)

二、填空题: 本大题共 6 小题, 每小题 5 分, 共 30 分. 把答案填在答题卡上.

9. 已知三个数 $(\frac{1}{2})^{\frac{1}{2}}$, $\sin 1$, $\log_2 \pi$ 中最小的数是_____.

10. 函数 $f(x) = 2\sin^2 x + \sqrt{3}\cos x$ 的最小值是_____.

11. 关于 x 的方程 $x^2 - (2k-1)x + \frac{k^2}{4} = 0$ 存在正实根, 则 k 的取值范围是_____.

12. 把函数 $y = \sin(x + \frac{3\pi}{4})$ 的图象向右平移 θ ($\theta > 0$) 个单位, 所得的图象关于 y 轴对称, 则 θ 的最小值为_____.

13. 设函数 $f(x) = |\ln x|$, 若函数 $g(x) = f(x) - ax$ 在区间 $(0, 2019)$ 上有三个零点, 则实数 a 的取值范围是_____.

14. 已知 $f(x) = m(x-2m)(x+m+3)$, $g(x) = 2^x - 2$, 若同时满足条件:

① $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) < 0$ 或 $g(x) < 0$; ② $\exists x \in (-\infty, -4), f(x)g(x) < 0$.

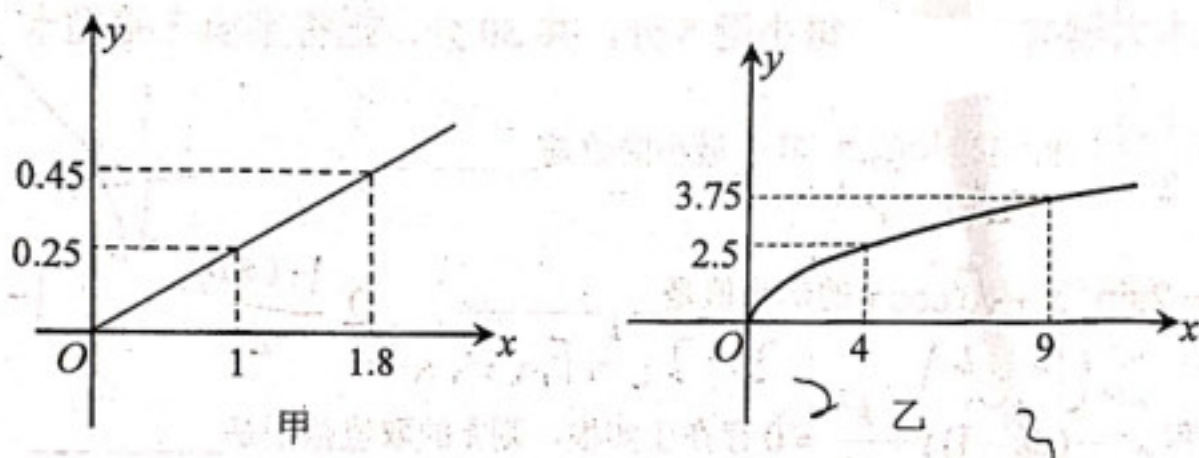
则实数 m 的取值范围是_____.

三、解答题：本大题共 6 小题，共 80 分。解答应写出文字说明，演算步骤或证明过程。

15. (I) 已知 $A(-2, m)$ 是角 α 终边上的一点，且 $\cos(\alpha - \frac{3\pi}{2}) = \frac{\sqrt{5}}{5}$ ，求 $\tan \alpha$ 的值。

(II) 若集合 $M = \{\theta | \sin \theta \geq \frac{1}{2}, 0 \leq \theta \leq \pi\}$ ， $N = \{\theta | \cos \theta \leq \frac{1}{2}, 0 \leq \theta \leq \pi\}$ ，求 $M \cap N$ 。

16. 有两个投资项目 A 、 B ，根据市场调查与预测，项目 A 的利润与投资成正比，其关系如图甲；项目 B 的利润与投资的算术平方根成正比，其关系如图乙。（注：利润与投资单位：万元）



(I) 分别将 A 、 B 两个投资项目的利润表示为投资 x (万元) 的函数关系式；

(II) 现将 $x(0 \leq x \leq 10)$ (万元) 投资项目 A ， $10-x$ (万元) 投资项目 B ， $h(x)$ 表示投资项目 A 所得利润与投资项目 B 所得利润之和。求 $h(x)$ 的最大值，及相应的 x 值。

17. 已知函数 $f(x) = \sqrt{3} \cos 2x - 2 \cos^2(x + \frac{\pi}{4}) + 1$ 。

(I) 求 $f(\frac{\pi}{2})$ 的值；

(II) 求 $f(x)$ 的单调递增区间；

(III) 求 $f(x)$ 在区间 $[0, \frac{\pi}{2}]$ 上的最值。

18. 已知函数 $f(x) = xe^x - ae^{x-1}$, 且 $f'(1) = e$.

(I) 求 a 的值及 $f(x)$ 的单调区间;

(II) 若关于 x 的方程 $f(x) = kx^2 - 2$ ($k > 2$) 存在两个不相等的正实根 x_1, x_2 , 证明: $|x_1 - x_2| > \ln \frac{4}{e}$.

19. 已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > b > 0$) 经过点 $(1, \frac{\sqrt{3}}{2})$, 离心率为 $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

(I) 求椭圆 C 的方程;

(II) 直线 $y = k(x-1)$ ($k \neq 0$) 与椭圆 C 交于 A, B 两点, 点 M 是椭圆 C 的右顶点. 直线 AM 与直线 BM 分别与 y 轴交于点 P, Q , 试问以线段 PQ 为直径的圆是否过 x 轴上的定点? 若是, 求出定点坐标; 若不是, 说明理由.

20. 已知等差数列 $\{a_n\}$ 的公差 $d \in (0, \pi]$, 数列 $\{b_n\}$ 满足 $b_n = \sin a_n$, 集合 $S = \{x | x = b_n, n \in \mathbf{N}^*\}$.

(I) 若 $a_1 = 0$, $d = \frac{2\pi}{3}$, 求集合 S ;

(II) 若 $a_1 = \frac{\pi}{2}$, 求 d 使得集合 S 恰有两个元素;

(III) 若集合 S 恰有三个元素, $b_{n+T} = b_n$, T 是不超过 5 的正整数, 求 T 的所有可能值, 并写出与之相应的一个等差数列 $\{a_n\}$ 的通项公式及集合 S .