2023 北京五中高三（上）期中

数　　学

班级______ 姓名_______学号______ 成绩________

一. 选择题：共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分. 在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项.

1．已知集合 $P=\{x|x^2\le 4\}$，$M=\{m\}$，若 $P\cap M=M$，则 m 的取值范围是

A. $(-\infty,2]$　　B. $[-2,2]$　　C. $[2,+\infty)$　　D. $(-\infty,2]\cup[2,+\infty)$

2．已知 m,n 是两条不同的直线，α,β 是两个不同的平面，则下列命题正确的是

A．若 $m//\alpha,n//\alpha$，则 $m//n$　　B．若 $m//\alpha,m//\beta$，则 $\alpha//\beta$

C．若 $\alpha\perp\beta,m\perp\beta,m\not\subset\alpha$，则 $m//\alpha$　　D．若 $\alpha\perp\beta,m\subset\alpha$，则 $m\perp\beta$

3．下列函数中，既是偶函数，又在区间 $(0,+\infty)$ 上单调递增的是

A．$y=x^3$　B．$y=-x^2+1$　C．$y=\log_2 x$　D．$y=\begin{cases}2^x, & x\ge 0\\ 2^{-x}, & x<0\end{cases}$

4. 已知直线 $l_1:mx+2y-1=0$ 与直线 $l_2:x+(m-1)y-m=0$ 平行，则 m 的值为

A．-1　　B．2　　C．-1 或 2　　D．-2

5．已知圆 $O:x^2+y^2=1$，过直线 $3x+4y-10=0$ 上的动点 P 作圆 O 的一条切线，切点为 A，则 $|PA|$ 的最小值为

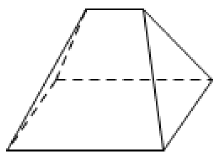
A．1　　B．$\sqrt{2}$　　C．$\sqrt{3}$　　D．2

6．关于函数 $f(x)=\sin x-x\cos x$，下列说法正确的是

A．$f(x)$ 是偶函数　　B．0 是 $f(x)$ 的极值点

C．$f(x)$ 在 $(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$ 上有且仅有1个零点　　D．$f(x)$ 的值域是 $[-1,1]$

7.《九章算术》卷五商功中有如下描述：今有刍甍，下广三丈，袤四丈，上袤二丈，无广，高一丈. 意思为：今有底面为矩形的屋脊状的几何体，下底面宽 3 丈，长 4 丈，上棱长 2 丈，高 1 丈. 现有一刍甍，如图所示，则该刍甍的体积为



A．5 立方丈　　B．20 立方丈　　C．40 立方丈　　D．80 立方丈

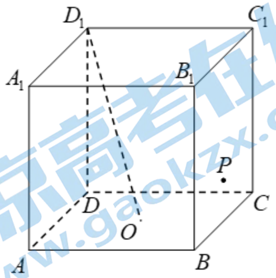
8．已知 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 是两个互相垂直的单位向量，$\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+\lambda\boldsymbol{b}(\lambda\in R)$，则“$\lambda=1$”是“$\boldsymbol{c}$ 和 $\boldsymbol{a}$ 夹角为 $\frac{\pi}{4}$”的

A．充分不必要条件　B．必要不充分条件　C．充要条件　D．既不充分也不必要条件

9．已知 A,B 为双曲线 E 的左，右顶点，点 M 在双曲线 E 上，满足 ΔABM 为等腰三角形，顶角为 $120°$，则双曲线 E 的离心率为

A. $\sqrt{5}$　　B. 2　　C. $\sqrt{3}$　　D. $\sqrt{2}$

10．如图，正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的棱长为 2，点 O 为底面 $ABCD$ 的中心，点 P 在侧面 BB_1C_1C 的边界及其内部运动．若 $D_1O\perp OP$，则△ D_1C_1P 面积的最小值为



A．$\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$　　B．$\dfrac{4\sqrt{5}}{5}$　　C．$\sqrt{5}$　　D．$2\sqrt{5}$

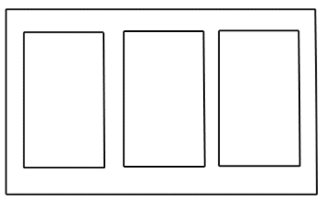
二. 填空题：共 5 小题，每小题 5 分，共 25 分.

11．已知抛物线 $C:y^2=ax$ 的准线方程为 $x=-\dfrac{1}{8}$，则 $a=$____.

12．已知双曲线 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 的两条渐近线方程为 $y=\pm\dfrac{\sqrt{3}}{3}x$，若焦点到渐近线的距离为 1，则双曲线方程为________________.

13．函数 $f(x)=\sin 2x$ 的图像向左平移______个长度单位得到函数 $g(x)=\sin(2x+\dfrac{\pi}{4})$ 的图像，若函数 $g(x)$ 在区间 $(0,a)$ 单调递增，则 a 的最大值为______

14．北京 2022 年冬奥会将于 2022 年 2 月 4 日开幕.某社区为了宣传冬奥会，决定在办公楼外墙建一个面积为 $8m^2$ 的矩形展示区，并计划在该展示区内设置三个全等的矩形宣传栏(如图所示)，要求上下各空 0.25m，左右各空 0.25m，相邻宣传栏之间也空 0.25m. 设三个宣传栏的面积之和为 S (单位: m^2)，则 S 的最大值为________.



15．对于函数 $f(x)=\begin{cases}\sin\pi x, x\in[0,2]\\ \dfrac{1}{2}f(x-2), x\in(2,+\infty)\end{cases}$，下列 4 个结论正确的是___.

①任取 $x_1,x_2\in[0,+\infty)$，都有 $|f(x_1)-f(x_2)|\le 2$；

② $f(x)=2kf(x+2k)\left(k\in N^*\right)$，对一切 $x\in[0,+\infty)$ 恒成立；

③若关于 x 的方程 $f(x)=m(m<0)$ 有且只有两个不同的实根 x_1,x_2，则 $x_1+x_2=3$；

④函数 $y=f(x)-\ln(x-1)$ 有 5 个零点

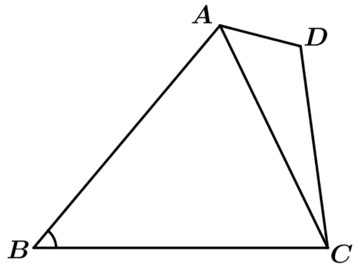
三、解答题：本大题共 6 小题，共 85 分．解答应写出文字说明，演算步骤或证明过程．

16．如图，在四边形 $ABCD$ 中，$\angle D=2\angle B$，且 $AD=1,CD=3,\cos B=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

（1）求 AC 的长；

（2）若________；求△ABC 的面积.

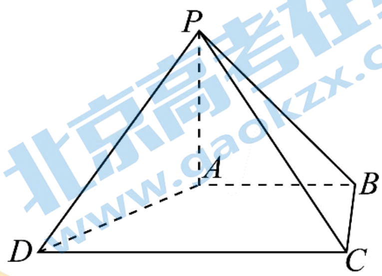
从① $BC=\sqrt{6}$，② $\angle BCA=\dfrac{\pi}{3}$ 这两个条件中任选一个，补充在上面问题中并作答.



注：如果选择多个条件分别解答，按第一个解答计分.

17.如图，在四棱锥 $P-ABCD$ 中，$PA\perp$ 面 $ABCD$，$AB // CD$，且 $CD=2, PA=AB=BC=1, AB\perp BC$.

（Ⅰ）求证：$AD\perp PC$；



（Ⅱ）求平面 PCD 与平面 PAB 的夹角；

（Ⅲ）在线段 PB 上是否存在一点 M，使得直线 PC 与平面 ADM 垂直，如果垂直，求此时点 M 到平面 PCD 的距离，如果不垂直，说明理由.

18. 智能体温计由于测温方便、快捷，已经逐渐代替水银体温计应用于日常体温检测. 调查发现，使用水银体温计测温结果与人体的真实体温基本一致，而使用智能体温计测量体温可能会产生误差. 对同一人而言，如果用智能体温计与水银体温计测温结果相同，我们认为智能体温计“测温准确”；否则，我们认为智能体温计“测温失误”.

现在某社区随机抽取了 20 人用两种体温计进行体温检测，数据如下：

序号	智能体温计测温（$^\circ C$）	水银体温计测温（$^\circ C$）	序号	智能体温计测温（$^\circ C$）	水银体温计测温（$^\circ C$）
01	36.6	36.6	11	36.3	36.2
02	36.6	36.5	12	36.7	36.7
03	36.5	36.7	13	36.2	36.2
04	36.5	36.5	14	35.4	35.4
05	36.5	36.4	15	35.2	35.3
06	36.4	36.4	16	35.6	35.6
07	36.2	36.2	17	37.2	37.0
08	36.3	36.4	18	36.8	36.8
09	36.5	36.5	19	36.6	36.6
10	36.3	36.4	20	36.7	36.7

（Ⅰ）试估计用智能体温计测量该社区 1 人“测温准确”的概率；

（Ⅱ）用频率估计概率，从该社区中任意抽查 3 人用智能体温计测量体温，设随机变量 X 为使用智能体温计“测温准确”的人数，求 X 的分布列与数学期望；

（Ⅲ）医学上通常认为，人的体温在不低于 $37.3^\circ C$ 且不高于 $38^\circ C$ 时处于“低热”状态. 该社区某一天用智能体温计测温的结果显示，有 3 人的体温都是 $37.3^\circ C$，能否由上表中的数据来认定这 3 个人中至少有 1 人处于“低热”状态？说明理由.

19. 已知椭圆 $C: x^2+3y^2=6$ 的右焦点为 F.

（Ⅰ）求点 F 的坐标和椭圆 C 的离心率；

（Ⅱ）直线 $l: y=kx+m\left(k\neq 0\right)$ 过点 F ，且与椭圆 C 交于 P ， Q 两点，如果点 P 关于 x 轴的对称点为 P'，判断直线 $P'Q$ 是否经过 x 轴上的定点，如果经过，求出该定点坐标；如果不经过，说明理由.

20. 已知函数 $f(x)=\dfrac{\ln x}{(x+a)^2}$，其中 a 为常数.

（Ⅰ）若 $a=0$，求函数 $f(x)$ 的极值；

（Ⅱ）若函数 $f(x)$ 在 $(0,-a)$ 上单调递增，求实数 a 的取值范围；

（Ⅲ）若 $a=-1$，设函数 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 上的极值点为 x_0 ，求证： $f(x_0)<-2$.

21. 对于向量 $X_0=\left(a_0,b_0,c_0\right)$，若 a_0， b_0， c_0 三数互不相等，令向量 $X_{i+1}=\left(a_{i+1},b_{i+1},c_{i+1}\right)$，其中 $a_{i+1}=\left|a_i-b_i\right|$， $b_{i+1}=\left|b_i-c_i\right|$， $c_{i+1}=\left|c_i-a_i\right|$， $i=0,1,2,3,\cdots$.

（Ⅰ）当 $X_0=\left(5,2,1\right)$ 时，试写出向量 X_{100}；

（Ⅱ）证明：对于任意的 $i\in N$ ，向量 X_i 中的三个数 a_i， b_i， c_i 至多有一个为 0；

（Ⅲ）若 $a_0,b_0,c_0\in N$ ，证明：存在正整数 t ，使得 $X_t=X_{t+3}$

参考答案

一. 选择题：共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分. 在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
B	C	D	B	C	C	A	A	D	B

二. 填空题：共 5 小题，每小题 5 分，共 25 分.

11.【答案】 $\frac{1}{2}$

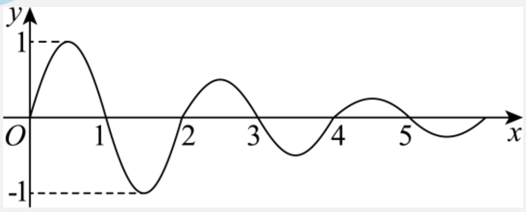
12.【答案】 $\frac{x^2}{3}-y^2=1$

13.【答案】 $\frac{\pi}{8}$， $\frac{\pi}{8}$

14. 【答案】 $\frac{9}{2}$

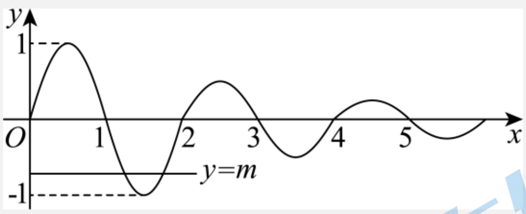
15. 【答案】①③

【详解】对于①，函数 $f(x)$ 的图象如下图所示：由图可知， $f(x)_{\max}=1, f(x)_{\min}=-1$， 则任取 $x_1,x_2\in[0,+\infty)$， 都有 $\left|f(x_1)-f(x_2)\right|\le\left|f(x)_{\max}-f(x)_{\min}\right|=2$， 故①正确；

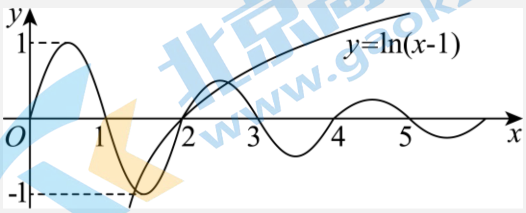


对于②，当 $k=3$ 时，则 $f(x)=6f(x+6)$，而由解析式知 $f(x)=8f(x+6)$，②错误；

对于③，函数 $f(x)$ 与函数 $y=m$ 的图象如下图所示，若关于 x 的方程 $f(x)=m(m<0)$ 有且只有两个不同的实根 x_1,x_2， 则 $-1<m<-\frac{1}{2}$， 由对称性可知 $x_1+x_2=2\times\frac{3}{2}=3$， ③正确；



对于④，函数 $f(x)$ 与函数 $y=\ln(x-1)$ 的图象如下图所示，由图可知，两函数的交点有 3 个，即函数 $y=f(x)-\ln(x-1)$ 有 3 个零点，④错误.



故答案为：①③.

三、解答题：本大题共 6 小题，共 85 分．解答应写出文字说明，演算步骤或证明过程．

16. （1）由 $\cos B=\frac{\sqrt{3}}{3}$，得 $\cos 2B=2\cos^2 B-1=-\frac{1}{3}$，

又 $2\angle B=\angle D$，所以 $\cos D=-\frac{1}{3}$，在 $\triangle ADC$ 中，由余弦定理，得

$AC^2=AD^2+DC^2-2AD\cdot DC\cos D=12$，所以 $AC=2\sqrt{3}$；

（2）选①：$BC=\sqrt{6}$，由(1)知 $AC=2\sqrt{3}$，由 $\cos B=\frac{\sqrt{3}}{3}$，得 $\sin B=\frac{\sqrt{6}}{3}$，

在 $\triangle ABC$ 中，由余弦定理，得 $\cos B=\frac{BC^2+AB^2-AC^2}{2BC\cdot AB}$，

即 $\frac{\sqrt{3}}{3}=\frac{6+AB^2-12}{2\sqrt{6}AB}$，解得 $AB=3\sqrt{2}$，

所以 $S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}AB\cdot BC\sin\angle B=\frac{1}{2}\times 3\sqrt{2}\times\sqrt{6}\times\frac{\sqrt{6}}{3}=3\sqrt{2}$．

选②：$\angle BCA=\frac{\pi}{3}$，由(1)知 $AC=2\sqrt{3}$，

由 $\cos B=\frac{\sqrt{3}}{3}$，得 $\sin B=\frac{\sqrt{6}}{3}$，

所以 $\sin\angle BAC=\sin(B+\angle BCA)=\sin B\cos\angle BCA+\sin\angle BCA\cos B=\frac{3+\sqrt{6}}{6}$

在 $\triangle ABC$ 中，由正弦定理，得 $\frac{AC}{\sin B}=\frac{AB}{\sin\angle BCA}$，则 $AB=\frac{3\sqrt{6}}{2}$，

所以 $S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}AB\cdot AC\sin\angle BAC=\frac{1}{2}\times\frac{3\sqrt{6}}{2}\times 2\sqrt{3}\times\frac{3+\sqrt{6}}{6}=9\sqrt{2}+6\sqrt{3}$；

17.【详解】（1）证明：$AB/\!/CD, AB\perp BC, AB=BC=1, CD=2$，

$\therefore AC=\sqrt{2}, \angle BAC=\angle DCA=45^\circ$．

$\because$在 $\triangle DAC$ 中，由余弦定理得 $AD^2=AC^2+DC^2-2AC\cdot DC\cos\angle ACD$，即

$AD^2=(\sqrt{2})^2+2^2-2\times\sqrt{2}\times 2\times\frac{\sqrt{2}}{2}$，所以 $AD=\sqrt{2}$，

$\therefore AC^2+AD^2=DC^2$．$\therefore AC\perp AD$．

又 $PA\perp$平面 $ABCD$，$AD\subset$平面 $ABCD$．$\therefore PA\perp AD$．

又：$AC\cap PA=A, AC, PA\subset$平面 PAC，$\therefore AD\perp$平面 PAC，

$\because PC\subset$平面 PAC，$\therefore AD\perp PC$．

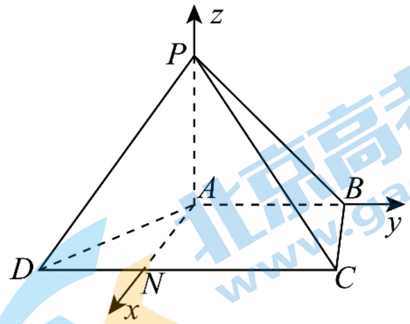
（2）解：取 CD 中点 N，连结 AN．

$\because AB/\!/CD, CD=2, AB=1, CN=1$，$\therefore AB/\!/NC, AB=NC$．

$\therefore$四边形 $ABCN$ 是平行四边形．$\therefore AN/\!/BC$．

$\because AB\perp BC$，$\therefore AB\perp AN$．$\because PA\perp$平面 $ABCD$，$\therefore PA\perp AN, PA\perp AB$．

∴以 A 为坐标原点，建立如图所示的空间直角坐标系，



则 $A(0,0,0), B(0,1,0), C(1,1,0), D(1,-1,0), P(0,0,1)$

∴ $\overrightarrow{PC}=(1,1-1), \overrightarrow{BC}=(1,0,0), \overrightarrow{DC}=(0,2,0)$.

平面 PBC 的一个法向量为 $\vec{n}=(1,0,0)$，

设平面 PDC 的一个法向量为 $\vec{m}=(x_1,y_1,z_1)$，则

∴ $\begin{cases}\vec{m}\cdot\overrightarrow{PC}=0\\ \vec{m}\cdot\overrightarrow{DC}=0\end{cases}$ ∴ $\begin{cases}x_1+y_1-z_1=0\\ 2y_1=0\end{cases}$ 令 $x_1=1$，则得 $z_1=1$，此时

$\vec{m}=(1,0,1)$.

∴ $\left|\cos\langle\vec{m},\vec{n}\rangle\right|=\dfrac{|\vec{m}\cdot\vec{n}|}{|\vec{m}||\vec{n}|}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

∴平面 PDC 与平面 PBC 所成角的余弦值为 $\dfrac{\pi}{4}$.

（3）解：∵ M 为 PB 的中点，距离为 $\dfrac{\sqrt{2}}{4}$.

18. 解：(Ⅰ)表中 20 人的体温数据中，用智能体温计与水银体温计测温结果相同的序号是 01，04 06，07，09，12，13，14，16，18，19，20，共有 12 种情况.

由此估计所求概率为 $\dfrac{12}{20}=\dfrac{3}{5}$. …………4 分

（Ⅱ）随机变量 X 的所有可能取值为 $X=0,1,2,3$

由(Ⅰ)可知，用智能体温计测量该社区 1 人“测温准确”的概率为 $\dfrac{3}{5}$.

所以 $P(X=0)=C_3^0\left(\dfrac{3}{5}\right)^0\left(1-\dfrac{3}{5}\right)^3=\dfrac{8}{125}$； $P(X=1)=C_3^1\left(\dfrac{3}{5}\right)^1\left(1-\dfrac{3}{5}\right)^2=\dfrac{36}{125}$；

$P(X=2)=C_3^2\left(\dfrac{3}{5}\right)^2\left(1-\dfrac{3}{5}\right)^1=\dfrac{54}{125}$； $P(X=3)=C_3^3\left(\dfrac{3}{5}\right)^3\left(1-\dfrac{3}{5}\right)^0=\dfrac{27}{125}$；

所以 X 的分布列为

X	0	1	2	3
P	$\dfrac{8}{125}$	$\dfrac{36}{125}$	$\dfrac{54}{125}$	$\dfrac{27}{125}$

故 X 的数学期望 $E(X)=0\times\dfrac{8}{125}+1\times\dfrac{36}{125}+2\times\dfrac{54}{125}+3\times\dfrac{27}{125}=\dfrac{225}{125}=\dfrac{9}{5}$

（Ⅲ）设这 3 人中至少有 1 人处于“低热”状态为事件 N.

表中 20 人的体温数据中，用智能体温计的测温结果，高于其真实体温的序号为 02，05，11，17，共计 4 种情况，由此估计从社区任意抽查 1 人，用智能体温计的测温结果高于其真实体温的概率为 $\frac{1}{5}$. 由此估计，这 3 人中至少有 1 人处于“低热”状态的概率为

$$P(N)=1-(\frac{1}{5}\times\frac{1}{5}\times\frac{1}{5})=\frac{124}{125}.$$

结论 1：因为 $P(N)=\frac{124}{125}$ 接近于1，由此可以认定这 3 人中至少有 1 人处于“低热”状态.

结论 2：因为 $P(N)=\frac{124}{125}<1$，所以有可能这 3 人都不处于“低热”状态.

19. 解：（Ⅰ）因为椭圆 C：$\frac{x^2}{6}+\frac{y^2}{2}=1$，

所以焦点 $F(2,0)$，离心率 $e=\frac{\sqrt{6}}{3}$.

（Ⅱ）直线 l：$y=kx+m$ （$k\neq 0$）过点 F，所以 $m=-2k$，所以 l：$y=k(x-2)$.

由 $\begin{cases} x^2+3y^2=6, \\ y=k(x-2), \end{cases}$ 得 $(3k^2+1)x^2-12k^2x+12k^2-6=0$.（依题意 $\Delta>0$）.

设 $P(x_1,y_1)$，$Q(x_2,y_2)$，则 $x_1+x_2=\frac{12k^2}{3k^2+1}$，$x_1\cdot x_2=\frac{12k^2-6}{3k^2+1}$.

因为点 P 关于 x 轴的对称点为 P'，则 $P'(x_1,-y_1)$.

所以，直线 $P'Q$ 的方程可以设为 $y+y_1=\frac{y_2+y_1}{x_2-x_1}(x-x_1)$，令 $y=0$，

$$\begin{aligned} x&=\frac{x_2y_1-x_1y_1}{y_1+y_2}+x_1=\frac{x_2y_1+x_1y_2}{y_1+y_2} \\ &=\frac{kx_2(x_1-2)+kx_1(x_2-2)}{k(x_1+x_2-4)}=\frac{2x_1x_2-2(x_1+x_2)}{(x_1+x_2-4)} \\ &=\frac{2\frac{12k^2-6}{3k^2+1}-2\frac{12k^2}{3k^2+1}}{\left(\frac{12k^2}{3k^2+1}-4\right)}=3. \end{aligned}$$

所以直线 $P'Q$ 过 x 轴上定点 $(3,0)$.

20. 解：1）当 $a=0$ 时，$f(x)=\frac{\ln x}{x}$，定义域为 $(0,+\infty)$，$f'(x)=\frac{1-2\ln x}{x^3}$，令 $f'(x)=0$，得 $x=\sqrt{e}$.

x	$(0,\sqrt{e})$	$\sqrt{e}$	$(\sqrt{e},+\infty)$
$f(x)$	+	0	-

$f'(x)$	↗	极大值 $\frac{1}{2e}$	↘

$\therefore$ 当 $x=\sqrt{e}$ 时，$f(x)$ 的极大值为 $\frac{1}{2e}$，无极小值.

（2）$f'(x)=\dfrac{1+\frac{a}{x}-2\ln x}{(x+a)^3}$，由题意 $f'(x)\ge 0$ 对 $x\in(0,-a)$ 恒成立.

$\because$ $x\in(0,-a)$，$\therefore (x+a)^3<0$，

$\therefore$ $1+\frac{a}{x}-2\ln x\le 0$ 对 $x\in(0,-a)$ 恒成立，

$\therefore$ $a\le 2x\ln x-x$ 对 $x\in(0,-a)$ 恒成立.

令 $g(x)=2x\ln x-x$，$x\in(0,-a)$，则 $g'(x)=2\ln x+1$，

①若 $0<-a\le e^{-\frac{1}{2}}$，即 $0>a\ge -e^{-\frac{1}{2}}$，则 $g'(x)=2\ln x+1<0$ 对 $x\in(0,-a)$ 恒成立，

$\therefore$ $g(x)=2x\ln x-x$ 在 $(0,-a)$ 上单调递减，

则 $a\le 2(-a)\ln(-a)-(-a)$，$\therefore 0\le \ln(-a)$，$\therefore a\le -1$ 与 $a\ge -e^{-\frac{1}{2}}$ 矛盾，舍去；

②若 $-a>e^{-\frac{1}{2}}$，即 $a<-e^{-\frac{1}{2}}$，令 $g'(x)=2\ln x+1=0$，得 $x=e^{-\frac{1}{2}}$，

当 $0<x<e^{-\frac{1}{2}}$ 时，$g'(x)=2\ln x+1>0$，$\therefore g(x)=2x\ln x-x$ 单调递减，

当 $e^{-\frac{1}{2}}<x<-a$ 时，$g'(x)=2\ln x+1>0$，$\therefore g(x)=2x\ln x-x$ 单调递增，

$\therefore$ 当 $x=e^{-\frac{1}{2}}$ 时，$[g(x)]_{\min}=g\left(e^{-\frac{1}{2}}\right)=2e^{-\frac{1}{2}}\cdot\ln\left(e^{-\frac{1}{2}}\right)-e^{-\frac{1}{2}}=-2e^{-\frac{1}{2}}$，

$\therefore a\le -2e^{-\frac{1}{2}}$. 综上 $a\le -2e^{-\frac{1}{2}}$.

（3）当 $a=-1$ 时，$f(x)=\dfrac{\ln x}{(x-1)^2}$，$f'(x)=\dfrac{x-1-2x\ln x}{x(x-1)^3}$，

令 $h(x)=x-1-2x\ln x$，$x\in(0,1)$，

则 $h'(x)=1-2(\ln x+1)=-2\ln x-1$，令 $h'(x)=0$，得 $x=e^{-\frac{1}{2}}$，

①当 $e^{-\frac{1}{2}}\le x<1$ 时，$h'(x)\le 0$，$\therefore h(x)=x-1-2x\ln x$ 单调递减，$h(x)\in\left[0,2e^{-\frac{1}{2}}-1\right]$，

$\therefore f'(x)=\dfrac{x-1-2x\ln x}{x(x-1)^3}<0$ 恒成立，$\therefore f(x)=\dfrac{\ln x}{(x-1)^2}$ 单调递减，且 $f(x)\le f\left(e^{-\frac{1}{2}}\right)$.

②当 $0<x\le e^{-\frac{1}{2}}$ 时，$h'(x)\ge 0$，$\therefore h(x)=x-1-2x\ln x$ 单调递增，

$\therefore h\left(e^{-\frac{1}{2}}\right)=e^{-\frac{1}{2}}-1-2e^{-\frac{1}{2}}\cdot\ln\left(e^{-\frac{1}{2}}\right)=2e^{-\frac{1}{2}}-1>0$

又$h\left(e^{-2}\right)=e^{-2}-1-2e^{-2}\cdot\ln\left(e^{-2}\right)=\frac{5}{e^2}-1<0$，

$\therefore$存在唯一$x_0\in\left(0,e^{-\frac{1}{2}}\right)$，使得$h\left(x_0\right)=0$，$\therefore f'\left(x_0\right)=0$，

当$0<x<x_0$时，$f'\left(x_0\right)>0$，$\therefore f\left(x\right)=\frac{\ln x}{(x-1)^2}$单调递增，

当$x_0<x\le e^{-\frac{1}{2}}$时，$f'\left(x_0\right)<0$，$\therefore f\left(x\right)=\frac{\ln x}{(x-1)^2}$单调递减，且$f\left(x\right)\ge f\left(e^{-\frac{1}{2}}\right)$，

由①和②可知，$f\left(x\right)=\frac{\ln x}{(x-1)^2}$在$(0,x_0)$单调递增，在$\left(x_0,1\right)$上单调递减，

$\therefore$当$x=x_0$时，$f\left(x\right)=\frac{\ln x}{(x-1)^2}$取极大值.

$\because h\left(x_0\right)=x_0-1-2x_0\ln x_0=0$，$\therefore \ln x_0=\frac{x_0-1}{2x_0}$，

$\therefore f\left(x_0\right)=\frac{\ln x_0}{\left(x_0-1\right)^2}=\frac{1}{2x_0\left(x_0-1\right)}=\frac{1}{2\left(x_0-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{2}}$，

又$x_0\in\left(0,2e^{-\frac{1}{2}}\right)$，$\therefore 2\left(x_0-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{2}\in\left(-\frac{1}{2},0\right)$，$\therefore f\left(x_0\right)=\frac{1}{2\left(x_0-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{2}}<-2$.

21.【详解】（1）$a_1=\left|5-2\right|=3$，$b_1=\left|2-1\right|=1$，$c_1=\left|1-5\right|=4$，即$X_1=(3,1,4)$；

$a_2=\left|3-1\right|=2$，$b_2=\left|1-4\right|=3$，$c_2=\left|4-3\right|=1$，即$X_2=(2,3,1)$；

$a_3=\left|2-3\right|=1$，$b_3=\left|3-1\right|=2$，$c_3=\left|1-2\right|=1$，即$X_3=(1,2,1)$；

$a_4=\left|1-2\right|=1$，$b_4=\left|2-1\right|=1$，$c_4=\left|1-1\right|=0$，即$X_4=(1,1,0)$；

$a_5=\left|1-1\right|=0$，$b_5=\left|1-0\right|=1$，$c_5=\left|0-1\right|=1$，即$X_5=(0,1,1)$；

$a_6=\left|0-1\right|=1$，$b_6=\left|1-1\right|=0$，$c_6=\left|1-0\right|=1$，即$X_6=(1,0,1)$；

$a_7=\left|1-0\right|=1$，$b_7=\left|0-1\right|=1$，$c_7=\left|1-1\right|=0$，即$X_7=(1,1,0)$；

……

由上，从$X_4=(1,1,0)$开始，每3个向量出现重复一个向量，而$X_{100}=X_{3+32\times3+1}=X_4=(1,1,0)$.

（2）假设X_i中a_i，b_i，c_i有不止1个为0，

若$a_i=b_i=0,c_i\ne0$且$i\ge1$，则$a_i=|a_{i-1}-b_{i-1}|=0,b_i=|b_{i-1}-c_{i-1}|=0$，故$a_{i-1}=b_{i-1}=c_{i-1}$，

此时$c_i=|c_{i-1}-a_{i-1}|\ne0$矛盾；

若$a_i=b_i=c_i=0$且$i\ge1$，$a_i=|a_{i-1}-b_{i-1}|=0,b_i=|b_{i-1}-c_{i-1}|=0,c_i=|c_{i-1}-a_{i-1}|=0$，

所以$a_{i-1}=b_{i-1}=c_{i-1}=k$为定值，而$a_0$，$b_0$，$c_0$三数互不相等，

当$i\ge2$，则$a_{i-1}=\left|a_{i-2}-b_{i-2}\right|=b_{i-1}=\left|b_{i-2}-c_{i-2}\right|=c_{i-1}=\left|c_{i-2}-a_{i-2}\right|=k$，

不妨令 $a_{i-2}\le b_{i-2}\le c_{i-2}$，则 $b_{i-2}-a_{i-2}=c_{i-2}-b_{i-2}=c_{i-2}-a_{i-2}=k$，显然

$(b_{i-2}-a_{i-2})+(c_{i-2}-b_{i-2})=c_{i-2}-a_{i-2}\Rightarrow 2k=k$，即 $k=0$，

所以 $a_{i-1}=b_{i-1}=c_{i-1}=0$，

以此类推得：$a_{i-2}=b_{i-2}=c_{i-2}=0$，……，$a_0=b_0=c_0=0$，与 a_0，b_0，c_0 三数互不相等矛盾；

综上，对于任意的 $i\in\mathrm{N}$，向量 X_i 中的三个数 a_i，b_i，c_i 至多有一个为 0；

（3）令 $\max\{a_i,b_i,c_i\}=m_i$，又 $a_{i+1}=|a_i-b_i|$，$b_{i+1}=|b_i-c_i|$，$c_{i+1}=|c_i-a_i|$ 且 $a_i,b_i,c_i\in\mathrm{N}^*$，

所以 $m_{i+1}\le m_i$，且 $i\in\mathrm{N}$，

由题意，$m_i\in\mathrm{N}$，且 $i\in\mathrm{N}$，故 $\{m_i\}$ 在 $i\in\mathrm{N}^*$ 上不可能单调递减，即必存在 $n\in\mathrm{N}^*$ 使 $m_{n+1}=m_n$，

根据 X_{n+1} 的定义，$X_n=\{a_n,b_n,c_n\}$ 中 a_n,b_n,c_n 必有一个 0，

由（2）知：a_n,b_n,c_n 中有且仅有一个为 0，令 $a_n=0$，

若 $b_n\ne c_n$，不妨设 $0<b_n<c_n$，则 $a_{n+1}=|a_n-b_n|=b_n,b_{n+1}=|b_n-c_n|=c_n-b_n,c_{n+1}=|c_n-a_n|=c_n$，则

$m_{n+1}=m_n=c_n$，

所以 $a_{n+2}=|a_{n+1}-b_{n+1}|<\max\{b_n,c_n-b_n\}<m_{n+1}$，同理 $b_{n+2},c_{n+2}<m_{n+1}$，

所以 $m_{n+2}<m_{n+1}$，又 $m_i\in\mathrm{N}$，故此情况不可能一直出现（至多有 m_{n+1} 次），

所以一定能找到 $l\in\mathrm{N}^*$，使得 $b_l=c_l$；

若 $b_n=c_n$，则 $X_n=\{0,b_n,b_n\}$，$X_{n+1}=\{b_n,0,b_n\}$，$X_{n+2}=\{b_n,b_n,0\}$，$X_{n+3}=\{0,b_n,b_n\}$，…

所以存在正整数 t，使得 $X_t=X_{t+3}$；

综上，存在正整数 t，使得 $X_t=X_{t+3}$.

北京高一高二高三期中试题下载

京考一点通团队整理了【**2023 年 10-11 月北京各区各年级期中试题&答案汇总**】专题，及时更新最新试题及答案。

通过【**京考一点通**】公众号，对话框回复【**期中**】或者点击公众号底部栏目<**试题专区**>，进入各年级汇总专题，查看并下载电子版试题及答案！