试卷类型：A

2024年深圳市高三年级第一次调研考试

数 学

2024.2

本试卷共4页，19小题，满分150分。考试用时120分钟。

注意事项：

1. 答题前，考生请务必用黑色字迹钢笔或签字笔将自己的姓名、准考证号填写在答题卡上。用2B铅笔将试卷类型（A）填涂在答题卡相应位置上。将条形码横贴在答题卡右上角“条形码粘贴处”。

2. 作答选择题时，选出每小题答案后，用2B铅笔把答题卡上对应题目选项的答案信息点涂黑；如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其他答案，答案不能答在试卷上。

3. 非选择题必须用黑色字迹钢笔或签字笔作答，答案必须写在答题卡各题目指定区域内相应位置上；如需改动，先划掉原来的答案，然后再写上新的答案；不准使用铅笔和涂改液。不按以上要求作答的答案无效。

4. 考生必须保持答题卡的整洁。考试结束后，将试卷和答题卡一并交回。

一、选择题：本题共8小题，每小题5分，共40分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 若角α的终边过点$(4,3)$，则$\sin(\alpha+\frac{\pi}{2})=$

A. $\frac{4}{5}$　　B. $-\frac{4}{5}$　　C. $\frac{3}{5}$　　D. $-\frac{3}{5}$

2. 已知i为虚数单位，若$z=\frac{2\mathrm{i}}{1+\mathrm{i}}$，则$z\cdot\overline{z}=$

A. $\sqrt{2}$　　B. 2　　C. $-2\mathrm{i}$　　D. $2\mathrm{i}$

3. 已知函数$f(x)$是定义域为$\mathbf{R}$的偶函数，在区间$(0,+\infty)$上单调递增，且对任意x_1，x_2，均有$f(x_1x_2)=f(x_1)f(x_2)$成立，则下列函数中符合条件的是

A. $y=\ln|x|$　　B. $y=x^3$　　C. $y=2^{|x|}$　　D. $y=|x|$

4. 已知$\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$是夹角为$120°$的两个单位向量，若向量$\boldsymbol{a}+\lambda\boldsymbol{b}$在向量$\boldsymbol{a}$上的投影向量为$2\boldsymbol{a}$，则$\lambda=$

A. -2　　B. 2　　C. $-\frac{2\sqrt{3}}{3}$　　D. $\frac{2\sqrt{3}}{3}$

5. 由0，2，4组成可重复数字的自然数，按从小到大的顺序排成的数列记为$\{a_n\}$，即$a_1=0$，$a_2=2$，$a_3=4$，…，若$a_n=2024$，则$n=$

A. 34　　B. 33　　C. 32　　D. 30

6. 已知某圆台的上、下底面半径分别为r_1，r_2，且$r_2=2r_1$，若半径为2的球与圆台的上、下底面及侧面均相切，则该圆台的体积为

A. $\frac{28\pi}{3}$　　B. $\frac{40\pi}{3}$　　C. $\frac{56\pi}{3}$　　D. $\frac{112\pi}{3}$

7. 已知数列$\{a_n\}$满足$a_1=a_2=1$，$a_{n+2}=\begin{cases}a_n+2, n=2k-1,\\-a_n, n=2k\end{cases}$ $(k\in \mathbf{N}^*)$，若S_n为数列$\{a_n\}$的前n项和，则$S_{50}=$

A. 624　　B. 625　　C. 626　　D. 650

8. 已知双曲线$E:\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$（$a>0$，$b>0$）的左、右焦点分别为$F_1$，$F_2$，过点$F_2$的直线与双曲线$E$的右支交于$A$，$B$两点，若$|AB|=|AF_1|$，且双曲线$E$的离心率为$\sqrt{2}$，则$\cos\angle BAF_1=$

A. $-\frac{3\sqrt{7}}{8}$　　B. $-\frac{3}{4}$　　C. $\frac{1}{8}$　　D. $-\frac{1}{8}$

二、选择题：本题共3小题，每小题6分，共18分。在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求。全部选对的得6分，部分选对的得部分分，有选错的得0分。

9. “体育强则中国强，国运兴则体育兴”．为备战2024年巴黎奥运会，已知运动员甲特训的成绩分别为：9，12，8，16，16，18，20，16，12，13，则这组数据的

A. 众数为12　　B. 平均数为14　　C. 中位数为14.5　　D. 第85百分位数为16

10. 设$a>1$，$b>0$，且$\ln a=2-b$，则下列关系式可能成立的是

A. $a=b$　　B. $b-a=\mathrm{e}$　　C. $a=2024b$　　D. $ab>\mathrm{e}$

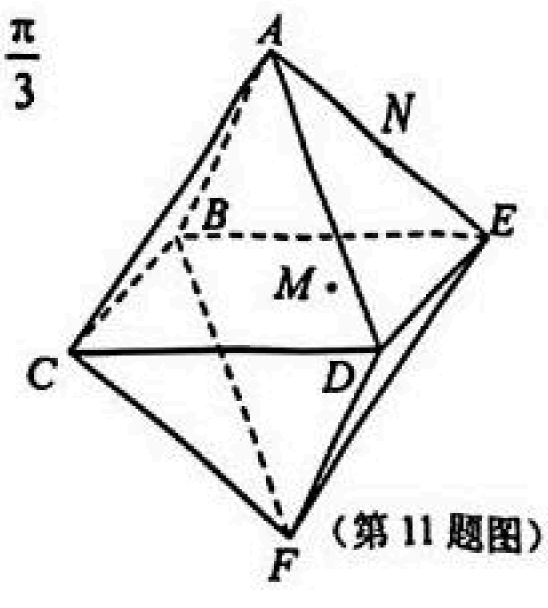
11. 如图，八面体Ω的每一个面都是边长为4的正三角形，且顶点B，C，D，E在同一个平面内．若点M在四边形$BCDE$内（包含边界）运动，N为AE的中点，则

A. 当M为DE的中点时，异面直线MN与CF所成角为$\frac{\pi}{3}$

B. 当$MN//$平面ACD时，点M的轨迹长度为$2\sqrt{2}$

C. 当$MA\perp ME$时，点M到BC的距离可能为$\sqrt{3}$

D. 存在一个体积为$\frac{10\pi}{3}$的圆柱体可整体放入Ω内



（第11题图）

三、填空题：本题共 3 小题，每小题 5 分，共 15 分。

12. 若函数 $f(x)=\sin(\omega x+\varphi)$ $(\omega>0,|\varphi|<\frac{\pi}{2})$ 的最小正周期为 π，其图象关于点 $(\frac{2\pi}{3},0)$ 中心对称，则 $\varphi=$________.

13. 设点 $A(-2,0)$，$B(-\frac{1}{2},0)$，$C(0,1)$，若动点 P 满足 $|PA|=2|PB|$，且 $\overrightarrow{AP}=\lambda\overrightarrow{AB}+\mu\overrightarrow{AC}$，则 $\lambda+2\mu$ 的最大值为________.

14. 已知函数 $f(x)=a(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)\ (a>0)$，设曲线 $y=f(x)$ 在点 $(x_i,f(x_i))$ 处切线的斜率为 $k_i(i=1,2,3)$，若 x_1，x_2，x_3 均不相等，且 $k_2=-2$，则 k_1+4k_3 的最小值为________.

四、解答题：本题共 5 小题，共 77 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

15. （13 分）

设 S_n 为数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和，已知 $a_2=4$，$S_4=20$，且 $\{\frac{S_n}{n}\}$ 为等差数列.

（1）求证：数列 $\{a_n\}$ 为等差数列；

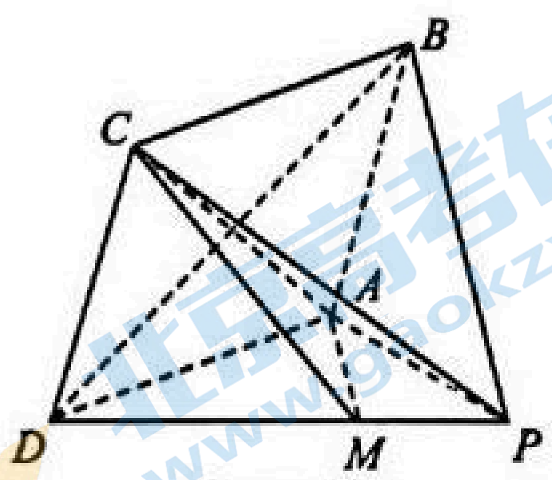
（2）若数列 $\{b_n\}$ 满足 $b_1=6$，且 $\frac{b_{n+1}}{b_n}=\frac{a_n}{a_{n+2}}$，设 T_n 为数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和，集合 $M=\{T_n\,|\,T_n\in\mathbf{N}^*\}$，求 M（用列举法表示）

16. （15 分）

如图，在四棱锥 $P-ABCD$ 中，四边形 $ABCD$ 是菱形，平面 $ABCD\perp$ 平面 PAD，点 M 在 DP 上，且 $DM=2MP$，$AD=AP$，$\angle PAD=120^\circ$.

（1）求证：$BD\perp$ 平面 ACM；

（2）若 $\angle ADC=60^\circ$，求平面 ACM 与平面 ABP 夹角的余弦值.



（第 16 题图）

17. （15分）

在某数字通信中，信号的传输包含发送与接收两个环节．每次信号只发送0和1中的某个数字，由于随机因素干扰，接收到的信号数字有可能出现错误．已知发送信号0时，接收为0和1的概率分别为$\alpha(0<\alpha<1)$，$1-\alpha$；发送信号1时，接收为1和0的概率分别为$\beta(0<\beta<1)$，$1-\beta$．假设每次信号的传输相互独立．

（1）当连续三次发送信号均为0时，设其相应三次接收到的信号数字均相同的概率为$f(\alpha)$，求$f(\alpha)$的最小值；

（2）当连续四次发送信号均为1时，设其相应四次接收到的信号数字依次为x_1，x_2，x_3，x_4，记其中连续出现相同数字的次数的最大值为随机变量X（x_1，x_2，x_3，x_4中任意相邻的数字均不相同时，令$X=1$），若$\beta=\dfrac{2}{3}$，求X的分布列和数学期望．

18. （17分）

已知函数$f(x)=a(x-1)e^{x+1}-2x\ln x-x^2(a\in\mathbf{R})$．

（1）当$a=0$时，求函数$f(x)$在区间$[e^{-2},1]$上的最小值；

（2）讨论函数$f(x)$的极值点个数；

（3）当函数$f(x)$无极值点时，求证：$a\sin\dfrac{1}{2a}>\dfrac{\sqrt{2}}{\pi}$．

19. （17分）

已知动点P与定点$A(m,0)$的距离和P到定直线$x=\dfrac{n^2}{m}$的距离的比为常数$\dfrac{m}{n}$，其中$m>0$，$n>0$，且$m\neq n$，记点P的轨迹为曲线C．

（1）求C的方程，并说明轨迹的形状；

（2）设点$B(-m,0)$，若曲线C上两动点M，N均在x轴上方，$AM//BN$，且AN与BM相交于点Q．

(i) 当$m=2\sqrt{2}$，$n=4$时，求证：$\dfrac{1}{|AM|}+\dfrac{1}{|BN|}$的值及$\triangle ABQ$的周长均为定值；

(ii) 当$m>n$时，记$\triangle ABQ$的面积为S，其内切圆半径为r，试探究是否存在常数λ，使得$S=\lambda r$恒成立？若存在，求λ（用m，n表示）；若不存在，请说明理由．

2024年深圳市高三年级第一次调研考试

数学试题参考答案及评分标准

一、选择题：每小题5分，共40分。

题号	1	2	3	4	5	6	7	8
答案	A	B	D	A	B	C	C	D

二、选择题：每小题6分，共18分。

题号	9	10	11
答案	BC	AC	ACD

说明：第9、10题全部选对得6分，选对1个得3分，有选错得0分；第11题全部选对得6分，每选对1个得2分，有选错得0分.

三、填空题：每小题5分，共15分。

12．$-\dfrac{\pi}{3}$；　　13．$\dfrac{2\sqrt{2}+4}{3}$；　　14．18．

四、解答题：

15．（13分）

证明：（1）设等差数列$\{\dfrac{S_n}{n}\}$的公差为d，则$\dfrac{S_4}{4}=\dfrac{S_1}{1}+3d$，即$S_1+3d=5$，① ……………………1分

因为$S_2=a_1+a_2=S_1+4$，所以由$\dfrac{S_2}{2}=\dfrac{S_1}{1}+d$，得$S_1+2d=4$．② ……………………2分

由①、②解得$S_1=2$，$d=1$，所以$\dfrac{S_n}{n}=n+1$，即$S_n=n(n+1)$，……………………3分

当$n\geqslant 2$时，$a_n=S_n-S_{n-1}=n(n+1)-(n-1)n=2n$，

当$n=1$时，$a_1=S_1=2$，上式也成立，所以$a_n=2n(n\in\mathbf{N}^*)$，……………………5分

因为当$n\geqslant 2$时，$a_n-a_{n-1}=2$，所以数列$\{a_n\}$是等差数列．……………………6分

解：（2）由（1）可知$\dfrac{b_{n+1}}{b_n}=\dfrac{a_n}{a_{n+2}}=\dfrac{2n}{2n+4}=\dfrac{n}{n+2}$，……………………7分

当$n\geqslant 2$时，$b_n=\dfrac{b_n}{b_{n-1}}\cdot\dfrac{b_{n-1}}{b_{n-2}}\cdot\cdots\cdot\dfrac{b_2}{b_1}\cdot b_1=\dfrac{n-1}{n+1}\times\dfrac{n-2}{n}\times\cdots\times\dfrac{1}{3}\times 6=\dfrac{12}{n(n+1)}$，

因为 $b_1=6$ 满足上式，所以 $b_n=\dfrac{12}{n(n+1)}(n\in\mathbf{N}^*)$． ……………………………………………9 分

$T_n=12[(1-\dfrac{1}{2})+(\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{3})+\cdots+(\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n+1})]=12\times(1-\dfrac{1}{n+1})=12-\dfrac{12}{n+1}$， ……………………11 分

因为当 $\dfrac{12}{n+1}\in\mathbf{N}^*$ 时，$n=1$，2，3，5，11，所以 $M=\{6,8,9,10,11\}$． ……………………13 分

16．（15 分）

证明：（1）不妨设 $AD=AP=3$， $\because\angle PAD=120^\circ$， $DM=2MP$，

$\therefore DP=3\sqrt{3}$， $DM=2\sqrt{3}$， $PM=\sqrt{3}$， ……………………………………………………1 分

由余弦定理得 $AM=\sqrt{AP^2+MP^2-2AP\cdot MP\cos 30^\circ}=\sqrt{3}$，

在 $\triangle ADM$ 中，$AD^2+AM^2=DM^2$， $\therefore MA\perp AD$， ……………………………………2 分

$\because$ 平面 $ABCD\perp$ 平面 PAD，平面 $ABCD\cap$ 平面 $PAD=AD$， $MA\subset$ 平面 PAD，

$\therefore MA\perp$ 平面 $ABCD$．

$\because BD\subset$ 平面 $ABCD$， $\therefore MA\perp BD$， ………………………………………………………………4 分

$\because$ 四边形 $ABCD$ 是菱形，$\therefore AC\perp BD$， ……………………………………………………………5 分

又 $\because AC\cap MA=A$，且 $AC\subset$ 平面 ACM， $MA\subset$ 平面 ACM， $\therefore BD\perp$ 平面 ACM． ……6 分

解：（2）在平面 $ABCD$ 内，过点 B 作 AD 的垂线，垂足为 N，

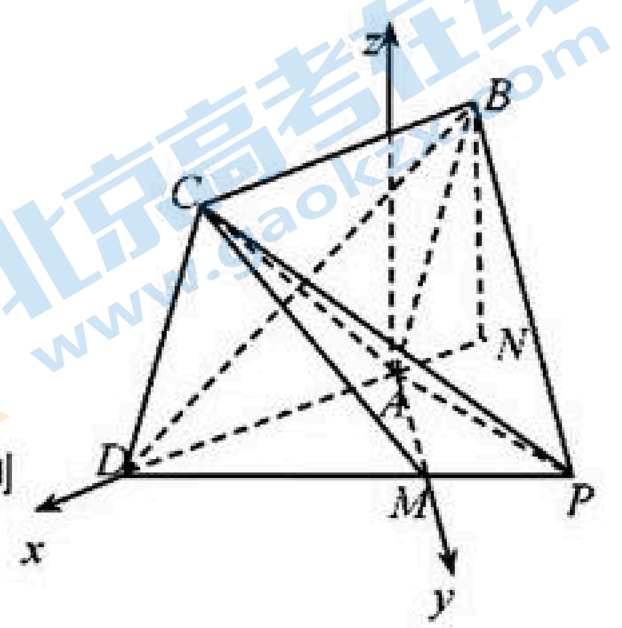
$\because$ 平面 $ABCD\perp$ 平面 PAD，平面 $ABCD\cap$ 平面 $PAD=AD$，

$\therefore BN\perp$ 平面 ADP， ………………………………………………7 分

又 $\because$ 四边形 $ABCD$ 是菱形， $\angle ADC=60^\circ$， $\therefore\angle BDA=30^\circ$，

$\therefore\triangle ACD$，$\triangle ABC$ 均为等边三角形， ……………………………8 分

以点 A 为坐标原点， AD， AM 及过点 A 平行于 NB 的直线分别为 x， y， z 轴，建立空间直角坐标系（如图），



则 $A(0,0,0)$， $B(-\dfrac{3}{2},0,\dfrac{3\sqrt{3}}{2})$， $D(3,0,0)$， $P(-\dfrac{3}{2},\dfrac{3\sqrt{3}}{2},0)$， ……………………………9 分

由（1）$BD\perp$ 平面 ACM，

$\therefore\overrightarrow{BD}=(\dfrac{9}{2},0,-\dfrac{3\sqrt{3}}{2})$ 为平面 ACM 的一个法向量， ……………………………………10 分

设平面 ABP 的法向量为 $\boldsymbol{m}=(x,y,z)$，

则$\begin{cases}\overrightarrow{AB}\cdot \boldsymbol{m}=0,\\ \overrightarrow{AP}\cdot \boldsymbol{m}=0,\end{cases}$ 即$\begin{cases}-\frac{3}{2}x+\frac{3\sqrt{3}}{2}z=0,\\ -\frac{3}{2}x+\frac{3\sqrt{3}}{2}y=0,\end{cases}$ ……………………………………………11分

令 $x=\sqrt{3}$，可得 $\boldsymbol{m}=(\sqrt{3},1,1)$， ……………………………………………12分

$\because |\cos<\overrightarrow{BD},\boldsymbol{m}>|=|\frac{3\sqrt{3}}{\sqrt{5}\times 3\sqrt{3}}|=\frac{\sqrt{5}}{5}$， ……………………………………………14分

$\therefore$平面 ACM 与平面 ABP 的夹角的余弦值为$\frac{\sqrt{5}}{5}$． ……………………………………………15分

17.（15分）

解：（1）由题可知 $f(\alpha)=\alpha^3+(1-\alpha)^3=3\alpha^2-3\alpha+1=3(\alpha-\frac{1}{2})^2+\frac{1}{4}$， ……………………2分

因为$0<\alpha<1$，所以当$\alpha=\frac{1}{2}$时，$f(\alpha)$的最小值为$\frac{1}{4}$． ……………………………4分

（2）由题设知，X 的可能取值为1，2，3，4． ……………………………………………5分

①当 $X=1$时，相应四次接收到的信号数字依次为0101或1010．因此，

$P(X=1)=\frac{2}{3}\times\frac{1}{3}\times\frac{2}{3}\times\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\times\frac{2}{3}\times\frac{1}{3}\times\frac{2}{3}=\frac{8}{81}$， ……………………………………………6分

②当 $X=2$ 时，相应四次接收到的信号数字依次为0010，或0100，或1101，或1011，或1001，或0110，或1100，或0011．因此，

$P(X=2)=(\frac{2}{3})^2\times\frac{1}{3}\times\frac{2}{3}\times 2+(\frac{1}{3})^2\times\frac{2}{3}\times\frac{1}{3}\times 2+(\frac{1}{3})^2\times(\frac{2}{3})^2\times 4=\frac{36}{81}=\frac{4}{9}$， ……………………8分

③当 $X=3$时，相应四次接收到的信号数字依次为1110，或0111，或0001，或1000．因此，

$P(X=3)=(\frac{1}{3})^3\times\frac{2}{3}\times 2+\frac{1}{3}\times(\frac{2}{3})^3\times 2=\frac{20}{81}$， ……………………………………………10分

④当 $X=4$ 时，相应四次接收到的信号数字依次为0000，或1111．因此，

$P(X=4)=(\frac{1}{3})^4+(\frac{2}{3})^4=\frac{17}{81}$． ……………………………………………12分

所以 X 的分布列为

X	1	2	3	4
P	$\frac{8}{81}$	$\frac{4}{9}$	$\frac{20}{81}$	$\frac{17}{81}$

……………………………………………13分

因此，X 的数学期望 $E(X)=1\times\frac{8}{81}+2\times\frac{3}{8}+3\times\frac{20}{81}+4\times\frac{17}{81}=\frac{208}{81}$．……………………………15分

18．（17分）

解：（1）当 $a=0$ 时，$f(x)=-2x\ln x-x^2$，

则 $f'(x)=-2(1\cdot\ln x+x\cdot\frac{1}{x})-2x=-2(\ln x+x+1)$，…………………………………………1分

令 $g(x)=f'(x)$，则 $g'(x)=-2(\frac{1}{x}+1)$，

因为 $x\in[e^{-2},1]$，所以 $g'(x)<0$．则 $g(x)$ 在 $[e^{-2},1]$ 上单调递减，……………………………2分

又因为 $f'(e^{-2})=2(1-e^{-2})>0$，$f'(1)=-4<0$，

所以 $\exists x_0\in(e^{-2},1)$ 使得 $f'(x_0)=0$，$f(x)$ 在 (e^{-2},x_0) 上单调递增，在 $(x_0,1)$ 上单调递减．

因此，$f(x)$ 在 $[e^{-2},1]$ 上的最小值是 $f(e^{-2})$ 与 $f(1)$ 两者中的最小者．………………………………3分

因为 $f(e^{-2})=4e^{-2}-e^{-4}=e^{-2}(4-e^{-2})>0$，$f(1)=-1$，

所以函数 $f(x)$ 在 $[e^{-2},1]$ 上的最小值为 -1．……………………………………………………………4分

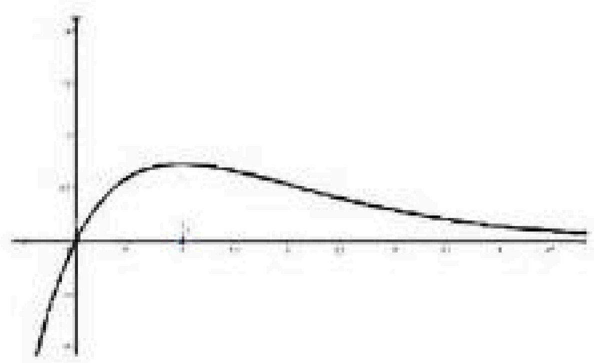
（2）$f'(x)=a[1\cdot e^{x+1}+(x-1)e^{x+1}]-2(1\cdot\ln x+x\cdot\frac{1}{x})-2x=axe^{x+1}-2(\ln x+x+1)$，

由 $f'(x)=0$，解得 $a=\frac{2(\ln x+x+1)}{xe^{x+1}}=\frac{2(\ln x+x+1)}{e^{\ln x+x+1}}$，……………………………………………6分

易知函数 $y=\ln x+x+1$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，且值域为 $\mathbf{R}$，

令 $\ln x+x+1=t$，由 $f'(x)=0$，解得 $a=\frac{2t}{e^t}$，

设 $h(t)=\frac{2t}{e^t}$，则 $h'(t)=\frac{2(1-t)}{e^t}$，



因为当 $t<1$ 时，$h'(t)>0$，当 $t>1$ 时，$h'(t)<0$，所以函数 $h(t)$ 在 $(-\infty,1)$ 上单调递增，在 $(1,+\infty)$ 上单调递减．

根据 $h(1)=\frac{2}{e}$，$t\to-\infty$ 时，$h(x)\to-\infty$，$\lim\limits_{t\to+\infty}h(t)=\lim\limits_{t\to+\infty}\frac{2}{e^t}=0$，

得 $h(t)$ 的大致图像如图所示．…………………………………………………………………………7分

因此有：

（i）当 $a>\frac{2}{e}$ 时，方程 $h(t)=a$ 无解，即 $f'(x)$ 无零点，$f(x)$ 没有极值点；………………8分

（ii）当 $a=\dfrac{2}{e}$ 时，$f'(x)=2e^{\ln x+x}-2(\ln x+x+1)$，

利用 $e^x \geq x+1$，得 $f'(x)\geq 2(\ln x+x+1)-2(\ln x+x+1)=0$，此时 $f(x)$ 没有极值点；……9 分

（iii）当 $0<a<\dfrac{2}{e}$ 时，方程 $h(t)=a$ 有两个解，即 $f'(x)$ 有两个零点，$f(x)$ 有两个极值点；

（iv）当 $a\leq 0$ 时，方程 $h(t)=a$ 有一个解，即 $f'(x)$ 有一个零点，$f(x)$ 有一个极值点.

综上，当 $a\leq 0$ 时，$f(x)$ 有一个极值点；当 $0<a<\dfrac{2}{e}$ 时，$f(x)$ 有两个极值点；当 $a\geq\dfrac{2}{e}$ 时，$f(x)$ 没有极值点. ……11 分

（3）先证明当 $x\in(0,\dfrac{\pi}{4})$ 时，$\dfrac{\sin x}{x}>\dfrac{2\sqrt{2}}{\pi}$.

设 $n(x)=\dfrac{\sin x}{x}(x\in(0,\dfrac{\pi}{4}))$，则 $n'(x)=\dfrac{(\cos x)\cdot x-\sin x}{x^2}$，

记 $p(x)=x\cos x-\sin x(x\in(0,\dfrac{\pi}{4}))$，则 $p'(x)=1\cdot\cos x+x\cdot(-\sin x)-\cos x=-x\sin x<0$，$p(x)$ 在 $(0,\dfrac{\pi}{4})$ 上单调递减， ……13 分

当 $x\in(0,\dfrac{\pi}{4})$ 时，$p(x)<p(0)=0$，$n'(x)<0$，则 $n(x)$ 在 $(0,\dfrac{\pi}{4})$ 上单调递减，$n(x)>n(\dfrac{\pi}{4})=\dfrac{2\sqrt{2}}{\pi}$，

即当 $x\in(0,\dfrac{\pi}{4})$ 时，不等式 $\dfrac{\sin x}{x}>\dfrac{2\sqrt{2}}{\pi}$ 成立. ……14 分

由（2）知，当函数 $f(x)$ 无极值点时，$a\geq\dfrac{2}{e}$，则 $0<\dfrac{1}{2a}\leq\dfrac{e}{4}<\dfrac{\pi}{4}$， ……15 分

在不等式 $\dfrac{\sin x}{x}>\dfrac{2\sqrt{2}}{\pi}$ 中，取 $x=\dfrac{1}{2a}$，则有 $2a\sin\dfrac{1}{2a}>\dfrac{2\sqrt{2}}{\pi}$，

即不等式 $a\sin\dfrac{1}{2a}>\dfrac{\sqrt{2}}{\pi}$ 成立. ……17 分

19.（17 分）

解：（1）设点 $P(x,y)$，由题意可知 $\dfrac{\sqrt{(x-m)^2+y^2}}{|x-\dfrac{n^2}{m}|}=\dfrac{m}{n}$， ……2分

即 $(x-m)^2+y^2=(\frac{m}{n}x-n)^2$，

经化简，得 C 的方程为 $\frac{x^2}{n^2}+\frac{y^2}{n^2-m^2}=1$，……3分

当 $m<n$ 时，曲线 C 是焦点在 x 轴上的椭圆；

当 $m>n$ 时，曲线 C 是焦点在 x 轴上的双曲线. ……4分

（2）设点 $M(x_1,y_1)$，$N(x_2,y_2)$，$M'(x_3,y_3)$，其中 $y_1>0,y_2>0$ 且 $x_3=-x_2,y_3=-y_2$，

(i)由（1）可知 C 的方程为 $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{8}=1$，$A(2\sqrt{2},0)$，$B(-2\sqrt{2},0)$，

因为 $AM//BN$，所以 $\frac{y_1}{x_1-2\sqrt{2}}=\frac{y_2}{x_2+2\sqrt{2}}=\frac{-y_2}{-x_2-2\sqrt{2}}=\frac{y_3}{x_3-2\sqrt{2}}$，

因此，M，A，M' 三点共线，且 $|BN|=\sqrt{(x_2+2\sqrt{2})^2+y_2^2}=\sqrt{(-x_2-2\sqrt{2})^2+(-y_2)^2}=|AM'|$，

……5分

（法一）设直线 MM' 的方程为 $x=ty+2\sqrt{2}$，联立 C 的方程，得 $(t^2+2)y^2+4\sqrt{2}ty-8=0$，

则 $y_1+y_3=-\frac{4\sqrt{2}t}{t^2+2}$，$y_1y_3=-\frac{8}{t^2+2}$，……6分

由（1）可知 $|AM|=\frac{2\sqrt{2}}{4}|x_1-\frac{16}{2\sqrt{2}}|=4-\frac{\sqrt{2}}{2}x_1$，$|BN|=|AM'|=4-\frac{\sqrt{2}}{2}x_3$，

所以 $\frac{1}{|AM|}+\frac{1}{|BN|}=\frac{|AM|+|BN|}{|AM|\cdot|BN|}=\frac{(4-\frac{\sqrt{2}}{2}x_1)+(4-\frac{\sqrt{2}}{2}x_3)}{(4-\frac{\sqrt{2}}{2}x_1)(4-\frac{\sqrt{2}}{2}x_3)}=\frac{(2-\frac{\sqrt{2}}{2}ty_1)+(2-\frac{\sqrt{2}}{2}ty_3)}{(2-\frac{\sqrt{2}}{2}ty_1)(2-\frac{\sqrt{2}}{2}ty_3)}$

$$=\frac{4-\frac{\sqrt{2}}{2}t(y_1+y_3)}{4-\sqrt{2}t(y_1+y_3)+\frac{1}{2}t^2y_1y_3}=\frac{4-\frac{\sqrt{2}}{2}t\cdot(-\frac{4\sqrt{2}t}{t^2+2})}{4-\sqrt{2}t\cdot(-\frac{4\sqrt{2}t}{t^2+2})+\frac{1}{2}t^2\cdot(-\frac{8}{t^2+2})}=1$$ （定值）. ……8分

（法二）设 $\angle MAx=\theta$，则有 $\frac{|AM|}{2\sqrt{2}-|AM|\cos\theta}=\frac{2\sqrt{2}}{4}$，解得 $|AM|=\frac{4}{2+\sqrt{2}\cos\theta}$，

同理由 $\frac{|AM'|}{2\sqrt{2}+|AM'|\cos\theta}=\frac{2\sqrt{2}}{4}$，解得 $|AM'|=\frac{4}{2-\sqrt{2}\cos\theta}$，

所以 $\frac{1}{|AM|}+\frac{1}{|BN|}=\frac{1}{|AM|}+\frac{1}{|AM'|}=\frac{2+\sqrt{2}\cos\theta}{4}+\frac{2-\sqrt{2}\cos\theta}{4}=1$（定值）. ……8分

由椭圆定义 $|BQ|+|QM|+|MA|=8$，得 $|QM|=8-|BQ|-|AM|$，

$\because AM//BN$，$\therefore \frac{|AM|}{|BN|}=\frac{|QM|}{|BQ|}=\frac{8-|BQ|-|AM|}{|BQ|}$，

解得 $|BQ|=\dfrac{(8-|AM|)\cdot|BN|}{|AM|+|BN|}$，

同理可得 $|AQ|=\dfrac{(8-|BN|)\cdot|AM|}{|AM|+|BN|}$， ……………………………………………………10分

所以 $|AQ|+|BQ|=\dfrac{(8-|BN|)\cdot|AM|}{|AM|+|BN|}+\dfrac{(8-|AM|)\cdot|BN|}{|AM|+|BN|}=\dfrac{8(|AM|+|BN|)-2|AM|\cdot|BN|}{|AM|+|BN|}$

$$=8-\frac{2}{\frac{1}{|AM|}+\frac{1}{|BN|}}=8-2=6$$

因为 $|AB|=4\sqrt{2}$，所以 $\triangle ABQ$ 的周长为 $6+4\sqrt{2}$（定值）. ……………………………………12分

(ii) 当 $m>n$ 时，曲线 C 的方程为 $\dfrac{x^2}{n^2}-\dfrac{y^2}{m^2-n^2}=1$，轨迹为双曲线，

根据（i）的证明，同理可得 M，A，M' 三点共线，且 $|BN|=|AM'|$，

（法一）设直线 MM' 的方程为 $x=sy+m$，联立 C 的方程，

得 $[(m^2-n^2)s^2-n^2]y^2+2sm(m^2-n^2)y+(m^2-n^2)^2=0$，

$\therefore y_1+y_3=-\dfrac{2sm(m^2-n^2)}{(m^2-n^2)s^2-n^2}$，$y_1y_3=\dfrac{(m^2-n^2)^2}{(m^2-n^2)s^2-n^2}$，(*) ……………………………13分

因为 $|AM|=\dfrac{m}{n}(x_1-\dfrac{n^2}{m})=\dfrac{m}{n}x_1-n$，$|BN|=|AM'|=\dfrac{m}{n}x_3-n$，

所以 $\dfrac{1}{|AM|}+\dfrac{1}{|BN|}=\dfrac{1}{|AM|}+\dfrac{1}{|AM'|}=\dfrac{|AM|+|AM'|}{|AM|\cdot|AM'|}$

$$=\frac{(\frac{m}{n}x_1-n)+(\frac{m}{n}x_3-n)}{(\frac{m}{n}x_1-n)(\frac{m}{n}x_3-n)}=\frac{(\frac{sm}{n}y_1+\frac{m^2-n^2}{n})+(\frac{sm}{n}y_3+\frac{m^2-n^2}{n})}{(\frac{sm}{n}y_1+\frac{m^2-n^2}{n})(\frac{sm}{n}y_3+\frac{m^2-n^2}{n})}$$

$$=\frac{\frac{sm}{n}(y_1+y_3)+\frac{2(m^2-n^2)}{n}}{\frac{m^2s^2}{n^2}y_1y_3+\frac{(m^2-n^2)ms}{n^2}(y_1+y_3)+\frac{(m^2-n^2)^2}{n^2}},$$

将（*）代入上式，化简得 $\dfrac{1}{|AM|}+\dfrac{1}{|BN|}=\dfrac{2n}{m^2-n^2}$， ………………………………………15分

（法二）设 $\angle MAx=\theta$，依条件有 $\dfrac{|AM|}{(m-\frac{n^2}{m})+|AM|\cos\theta}=\dfrac{m}{n}$，解得 $|AM|=\dfrac{m^2-n^2}{n-m\cos\theta}$，

同理由 $\dfrac{|AM'|}{(m-\frac{n^2}{m})-|AM'|\cos\theta}=\dfrac{m}{n}$，解得 $|AM'|=\dfrac{m^2-n^2}{n+m\cos\theta}$，

所以$\dfrac{1}{|AM|}+\dfrac{1}{|BN|}=\dfrac{1}{|AM|}+\dfrac{1}{|AM'|}=\dfrac{n-m\cos\theta}{m^2-n^2}+\dfrac{n+m\cos\theta}{m^2-n^2}=\dfrac{2n}{m^2-n^2}$ ……………………15分

由双曲线的定义$|BQ|+|QM|-|MA|=2n$，得$|QM|=2n+|AM|-|BQ|$，

根据$\dfrac{|AM|}{|BN|}=\dfrac{|QM|}{|BQ|}$，解得$|BQ|=\dfrac{(2n+|AM|)\cdot|BN|}{|AM|+|BN|}$，

同理根据$\dfrac{|AM|}{|BN|}=\dfrac{|AQ|}{|QN|}$，解得$|AQ|=\dfrac{(2n+|BN|)\cdot|AM|}{|AM|+|BN|}$，

所以$|AQ|+|BQ|=\dfrac{(2n+|BN|)\cdot|AM|}{|AM|+|BN|}+\dfrac{(2n+|AM|)\cdot|BN|}{|AM|+|BN|}=2n+\dfrac{2|AM|\cdot|BN|}{|AM|+|BN|}$

$=2n+\dfrac{2}{\dfrac{1}{|AM|}+\dfrac{1}{|BN|}}=2n+\dfrac{m^2-n^2}{n}=\dfrac{m^2+n^2}{n}$，……………………………16分

由内切圆性质可知，$S=\dfrac{1}{2}(|AB|+|AQ|+|BQ|)\cdot r$，

当$S=\lambda r$时，$\lambda=\dfrac{1}{2}(|AB|+|AQ|+|BQ|)=m+\dfrac{m^2+n^2}{2n}=\dfrac{(m+n)^2}{2n}$（常数）.

因此，存在常数λ使得$S=\lambda r$恒成立，且$\lambda=\dfrac{(m+n)^2}{2n}$．……………………………………17分

关于我们

北京高考在线创办于 2014 年，隶属于北京太星网络科技有限公司，是北京地区极具影响力的中学升学服务平台。主营业务涵盖：北京新高考、高中生涯规划、志愿填报、强基计划、综合评价招生和学科竞赛等。

北京高考在线旗下拥有网站门户、微信公众平台等全媒体矩阵生态平台。平台活跃用户 50W+，网站年度流量数千万量级。用户群体立足于北京，辐射全国 31 省市。

北京高考在线平台一直秉承“精益求精、专业严谨”的建设理念，不断探索“K12 教育+互联网+大数据”的运营模式，尝试基于大数据理论为广大中学和家长提供新鲜的高考资讯、专业的高考政策解读、科学的升学规划等，为广大高校、中学和教科研单位提供“衔接和桥梁纽带”作用。

平台自创办以来，为众多重点大学发现和推荐优秀生源，和北京近百所中学达成合作关系，累计举办线上线下升学公益讲座数千场，帮助数十万考生顺利通过考入理想大学，在家长、考生、中学和社会各界具有广泛的口碑影响力

未来，北京高考在线平台将立足于北京新高考改革，基于对北京高考政策研究及北京高校资源优势，更好的服务全国高中家长和学生。

推荐大家关注北京高考在线网站官方微信公众号：京考一点通，我们会持续为大家整理分享最新的高中升学资讯、政策解读、热门试题答案、招生通知等内容！