2022年普通高等学校招生全国统一考试（新高考全国Ⅱ卷）

数学

注意事项：

1．答卷前，考生务必将自己的姓名、准考证号填写在答题卡上。

2．答选择题时，选出每小题答案后，用铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其他答案标号。回答非选择题时，将答案写在答题卡上。写在本试卷上无效。

3．考试结束后，将本试卷和答题卡一并交回。

一、选择题：本题共8小题，每小题5分，共40分．在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.

1. 已知集合 $A=\{-1,1,2,4\}, B=\{x||x-1|\le 1\}$，则 $A\cap B=$（　　）

A. $\{-1,2\}$　　B. $\{1,2\}$　　C. $\{1,4\}$　　D. $\{-1,4\}$

2. $(2+2\mathrm{i})(1-2\mathrm{i})=$（　　）

A. $-2+4\mathrm{i}$　　B. $-2-4\mathrm{i}$　　C. $6+2\mathrm{i}$　　D. $6-2\mathrm{i}$

3. 图1是中国古代建筑中的举架结构，AA',BB',CC',DD' 是桁，相邻桁的水平距离称为步，垂直距离称为举，图2是某古代建筑屋顶截面的示意图．其中 DD_1,CC_1,BB_1,AA_1 是举，OD_1,DC_1,CB_1,BA_1 是相等的步，相邻桁的举步之比分别为 $\frac{DD_1}{OD_1}=0.5,\frac{CC_1}{DC_1}=k_1,\frac{BB_1}{CB_1}=k_2,\frac{AA_1}{BA_1}=k_3$．已知 k_1,k_2,k_3 成公差为0.1的等差数列，且直线 OA 的斜率为0.725，则 $k_3=$（　　）

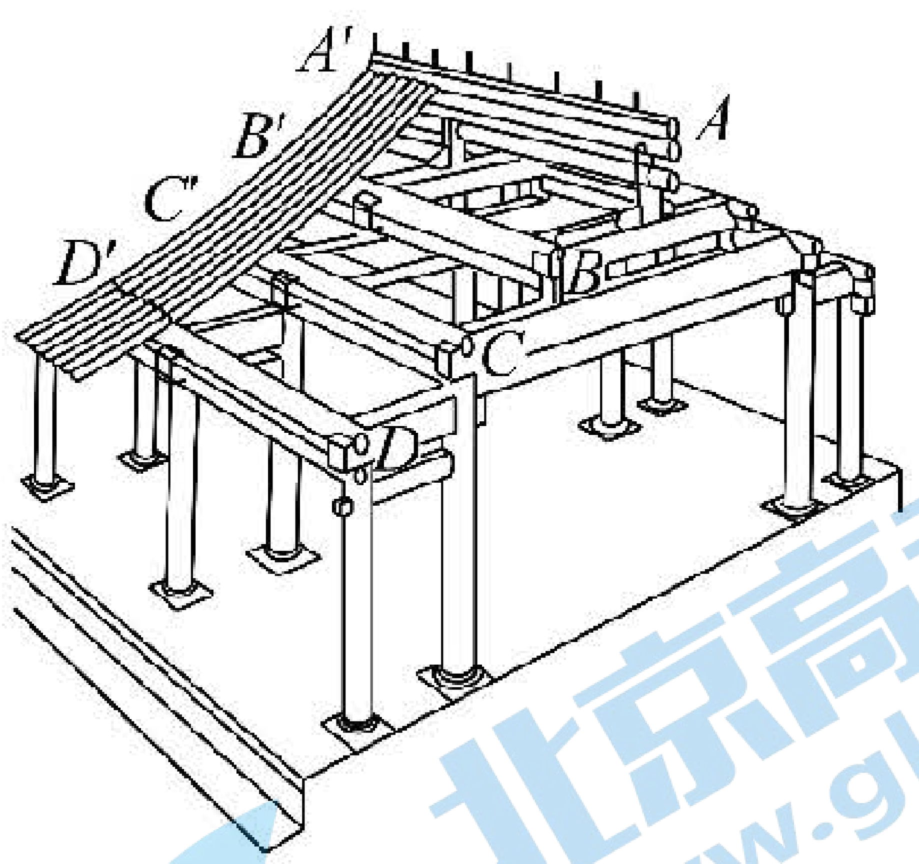


图1

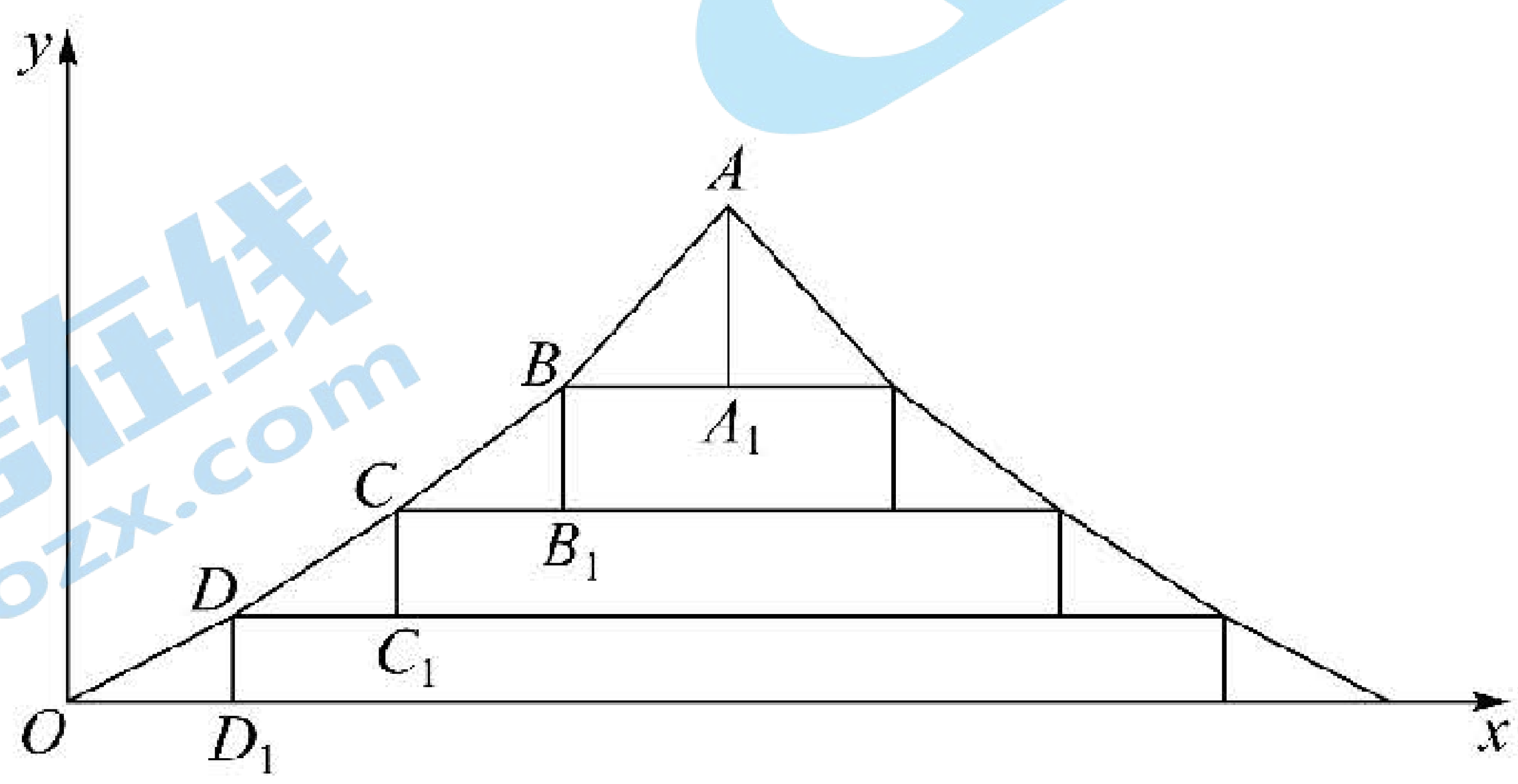


图2

A. 0.75　　B. 0.8　　C. 0.85　　D. 0.9

4. 已知向量 $\vec{a}=(3,4),\vec{b}=(1,0),\vec{c}=\vec{a}+t\vec{b}$，若 $<\vec{a},\vec{c}>=<\vec{b},\vec{c}>$，则 $t=$（　　）

A. -6　　B. -5　　C. 5　　D. 6

5. 有甲、乙、丙、丁、戊5名同学站成一排参加文艺汇演，若甲不站在两端，丙和丁相邻，则不同排列方式共有（　　）

A. 12种　　B. 24种　　C. 36种　　D. 48种

6. 若$\sin(\alpha+\beta)+\cos(\alpha+\beta)=2\sqrt{2}\cos\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)\sin\beta$，则（　　）

A. $\tan(\alpha-\beta)=1$　　B. $\tan(\alpha+\beta)=1$

C $\tan(\alpha-\beta)=-1$　　D. $\tan(\alpha+\beta)=-1$

7. 已知正三棱台的高为1，上、下底面边长分别为$3\sqrt{3}$和$4\sqrt{3}$，其顶点都在同一球面上，则该球的表面积为（　　）

A. 100π　　B. 128π　　C. 144π　　D. 192π

8. 已知函数$f(x)$的定义域为$\mathbf{R}$，且$f(x+y)+f(x-y)=f(x)f(y),f(1)=1$，则$\sum_{k=1}^{22}f(k)=$（　　）

A. -3　　B. -2　　C. 0　　D. 1

二、选择题：本题共4小题，每小题5分，共20分.在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求．全部选对的得5分，部分选对的得2分，有选错的得0分.

9. 已知函数$f(x)=\sin(2x+\varphi)(0<\varphi<\pi)$的图像关于点$\left(\frac{2\pi}{3},0\right)$中心对称，则（　　）

A. $f(x)$在区间$\left(0,\frac{5\pi}{12}\right)$单调递减

B. $f(x)$在区间$\left(-\frac{\pi}{12},\frac{11\pi}{12}\right)$有两个极值点

C. 直线$x=\frac{7\pi}{6}$是曲线$y=f(x)$的对称轴

D. 直线$y=\frac{\sqrt{3}}{2}-x$是曲线$y=f(x)$的切线

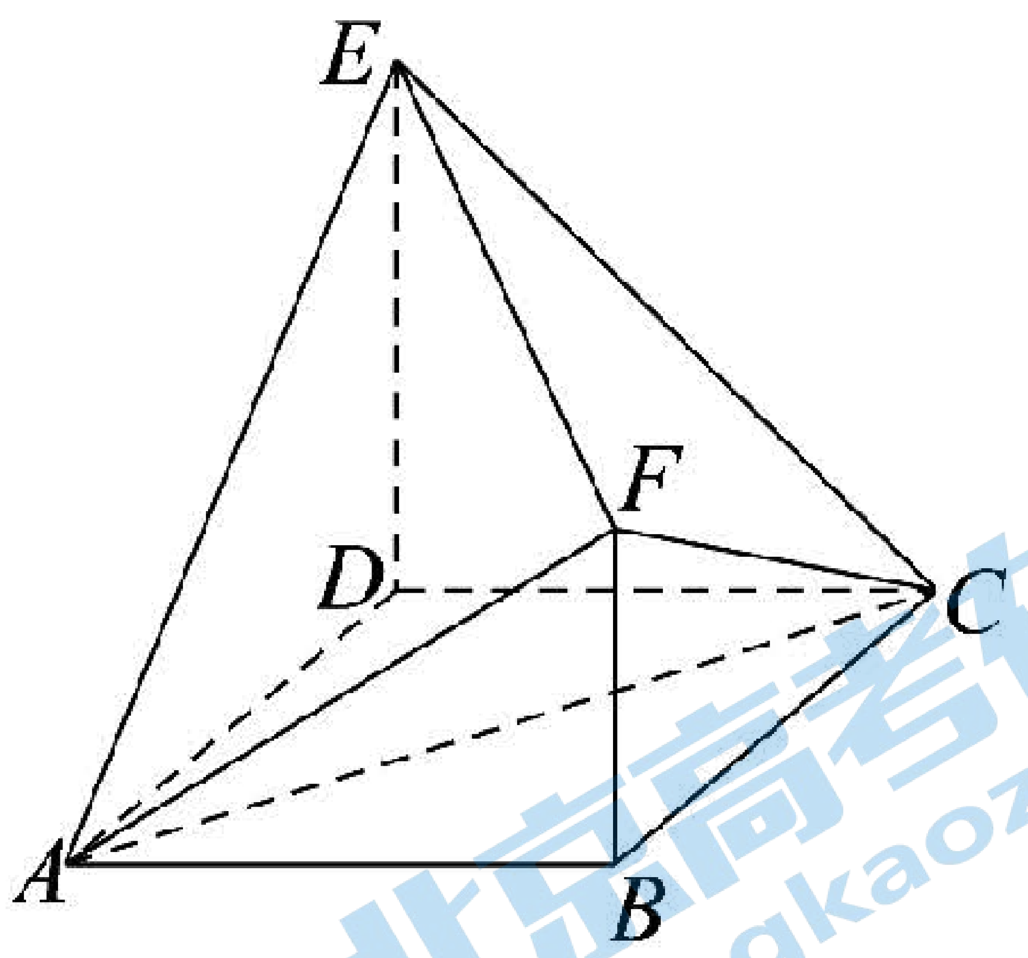
10. 已知O为坐标原点，过抛物线$C:y^2=2px(p>0)$焦点F的直线与C交于A，B两点，其中A在第一象限，点$M(p,0)$，若$|AF|=|AM|$，则（　　）

A. 直线AB的斜率为$2\sqrt{6}$　　B. $|OB|=|OF|$

C. $|AB|>4|OF|$

D. $\angle OAM+\angle OBM<180^{\circ}$

11. 如图，四边形 $ABCD$ 为正方形，$ED\perp$ 平面 $ABCD$，$FB//ED, AB=ED=2FB$，记三棱锥 $E-ACD$，$F-ABC$，$F-ACE$ 的体积分别为 V_1,V_2,V_3，则（　　）



A. $V_3=2V_2$

B. $V_3=V_1$

C. $V_3=V_1+V_2$

D. $2V_3=3V_1$

12. 若 x，y 满足 $x^2+y^2-xy=1$，则（　　）

A. $x+y\le 1$

B. $x+y\ge -2$

C. $x^2+y^2\le 2$

D. $x^2+y^2\ge 1$

三、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分.

13 已知随机变量 X 服从正态分布 $N\left(2,\sigma^2\right)$，且 $P(2<X\le 2.5)=0.36$，则 $P(X>2.5)=$____________.

14. 曲线 $y=\ln|x|$ 过坐标原点的两条切线的方程为____________，____________.

15. 设点 $A(-2,3),B(0,a)$，若直线 AB 关于 $y=a$ 对称的直线与圆 $(x+3)^2+(y+2)^2=1$ 有公共点，则 a 的取值范围是________.

16. 已知直线 l 与椭圆 $\frac{x^2}{6}+\frac{y^2}{3}=1$ 在第一象限交于 A，B 两点，l 与 x 轴，y 轴分别交于 M，N 两点，且 $|MA|=|NB|,|MN|=2\sqrt{3}$，则 l 的方程为____________.

四、解答题：本题共 6 小题，共 70 分．解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤.

17. 已知 $\{a_n\}$ 为等差数列，$\{b_n\}$ 是公比为 2 的等比数列，且 $a_2-b_2=a_3-b_3=b_4-a_4$.

（1）证明：$a_1=b_1$；

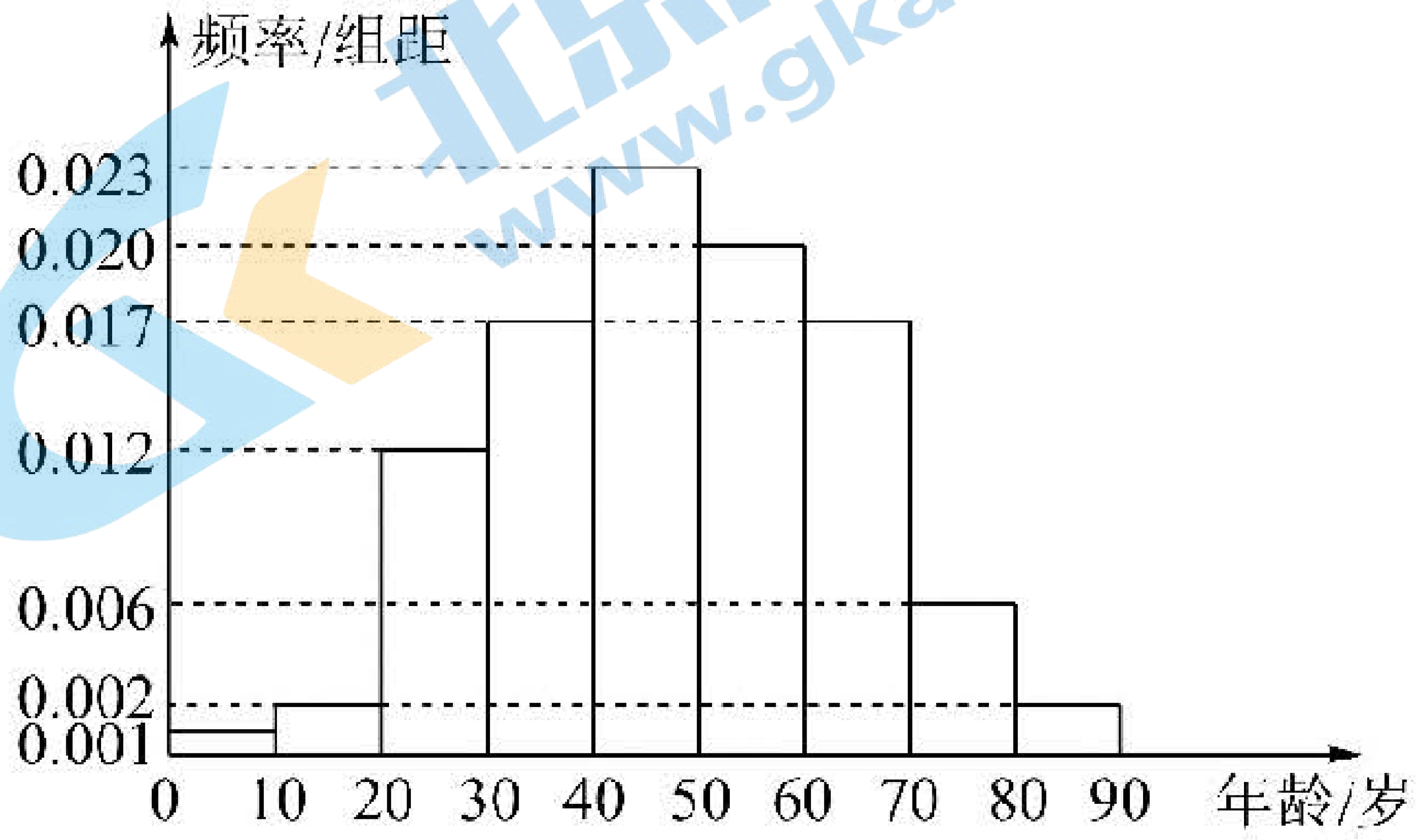
（2）求集合$\{k|b_k=a_m+a_1,1\le m\le 500\}$中元素个数.

18. 记$\triangle ABC$的内角A,B,C的对边分别为a,b,c，分别以a,b,c为边长的三个正三角形的面积依次为S_1,S_2,S_3，已知$S_1-S_2+S_3=\dfrac{\sqrt{3}}{2},\sin B=\dfrac{1}{3}$.

（1）求$\triangle ABC$ 面积；

（2）若$\sin A\sin C=\dfrac{\sqrt{2}}{3}$，求$b$.

19. 在某地区进行流行病学调查，随机调查了100位某种疾病患者的年龄，得到如下的样本数据的频率分布直方图：

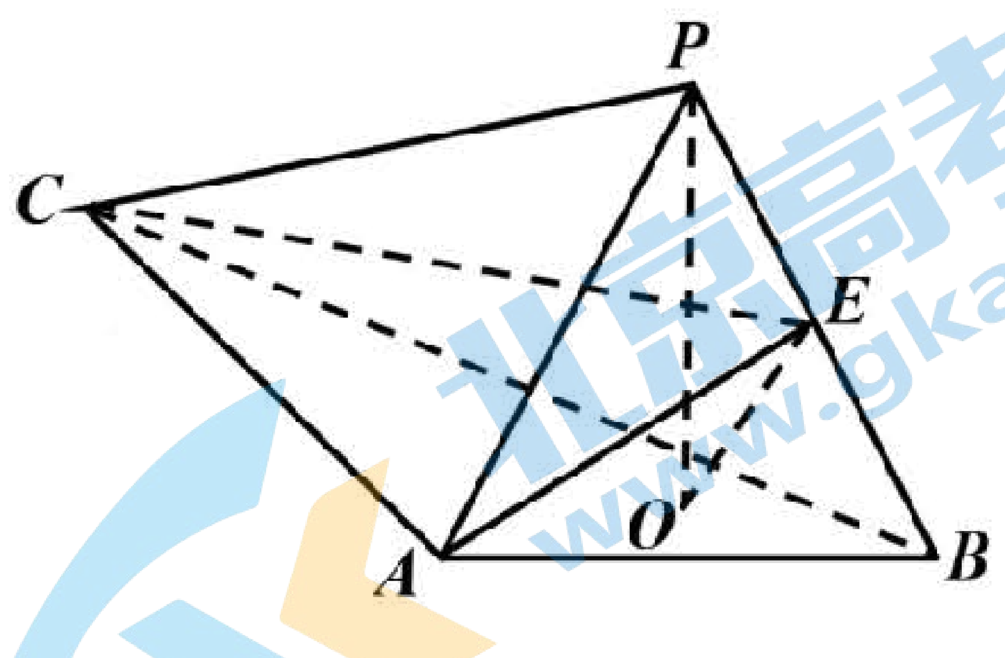


（1）估计该地区这种疾病患者的平均年龄（同一组中的数据用该组区间的中点值为代表）；

（2）估计该地区一位这种疾病患者的年龄位于区间$[20,70)$的概率；

（3）已知该地区这种疾病的患病率为0.1%，该地区年龄位于区间$[40,50)$的人口占该地区总人口的16%. 从该地区中任选一人，若此人的年龄位于区间$[40,50)$，求此人患这种疾病的概率.（以样本数据中患者的年龄位于各区间的频率作为患者的年龄位于该区间的概率，精确到0.0001）.

20. 如图，PO是三棱锥$P-ABC$的高，$PA=PB$，$AB\perp AC$，E是PB的中点.



（1）证明：$OE//$平面PAC；

（2）若$\angle ABO=\angle CBO=30°$，$PO=3$，$PA=5$，求二面角$C-AE-B$ 正弦值.

21. 已知双曲线$C:\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$的右焦点为$F(2,0)$，渐近线方程为$y=\pm\sqrt{3}x$.

（1）求C的方程；

(2)过F的直线与C的两条渐近线分别交于A,B两点，点$P\left(x_1,y_1\right),Q\left(x_2,y_2\right)$在$C$上，且$x_1>x_2>0,y_1>0$.过$P$且斜率为$-\sqrt{3}$的直线与过$Q$且斜率为$\sqrt{3}$的直线交于点$M$.从下面①②③中选取两个作为条件，证明另外一个成立：

①M在AB上；②$PQ//AB$；③$|MA|=|MB|$.

注：若选择不同的组合分别解答，则按第一个解答计分.

22 已知函数$f(x)=xe^{ax}-e^x$.

（1）当$a=1$时，讨论$f(x)$的单调性；

（2）当$x>0$时，$f(x)<-1$，求a的取值范围；

（3）设$n\in\mathbf{N}^*$，证明：$\frac{1}{\sqrt{1^2+1}}+\frac{1}{\sqrt{2^2+2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n^2+n}}>\ln(n+1)$.

2022年普通高等学校招生全国统一考试（新高考全国Ⅱ卷）

数学参考答案

一、选择题：本题共8小题，每小题5分，共40分．在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.

1. B　2. D　3. D　4. C　5. B　6. C　7. A　8. A

二、选择题：本题共4小题，每小题5分，共20分.在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求．全部选对的得5分，部分选对的得2分，有选错的得0分.

9. AD　10. ACD　11. CD　12. BC

三、填空题：本题共4小题，每小题5分，共20分.

13. 0.14 ## $\frac{7}{50}$.

14. ①. $y=\frac{1}{e}x$　　②. $y=-\frac{1}{e}x$

15. $\left[\frac{1}{3},\frac{3}{2}\right]$

16. $x+\sqrt{2}y-2\sqrt{2}=0$

四、解答题：本题共6小题，共70分．解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤.

17.（1）设数列$\{a_n\}$的公差为d，所以，$\begin{cases}a_1+d-2b_1=a_1+2d-4b_1\\a_1+d-2b_1=8b_1-(a_1+3d)\end{cases}$，即可解得，$b_1=a_1=\frac{d}{2}$，所以原命题得证.

（2）9.

18.（1）$\frac{\sqrt{2}}{8}$

（2）$\frac{1}{2}$

19.（1）44.65岁；

（2）0.89；

（3）0.0014.

20.（1）证明：连接 BO 并延长交 AC 于点 D，连接 OA、PD，

因为 PO 是三棱锥 $P-ABC$ 的高，所以 $PO\perp$ 平面 ABC，$AO,BO\subset$ 平面 ABC，

所以 $PO\perp AO$、$PO\perp BO$，

又 $PA=PB$，所以 $\triangle POA\cong\triangle POB$，即 $OA=OB$，所以 $\angle OAB=\angle OBA$，

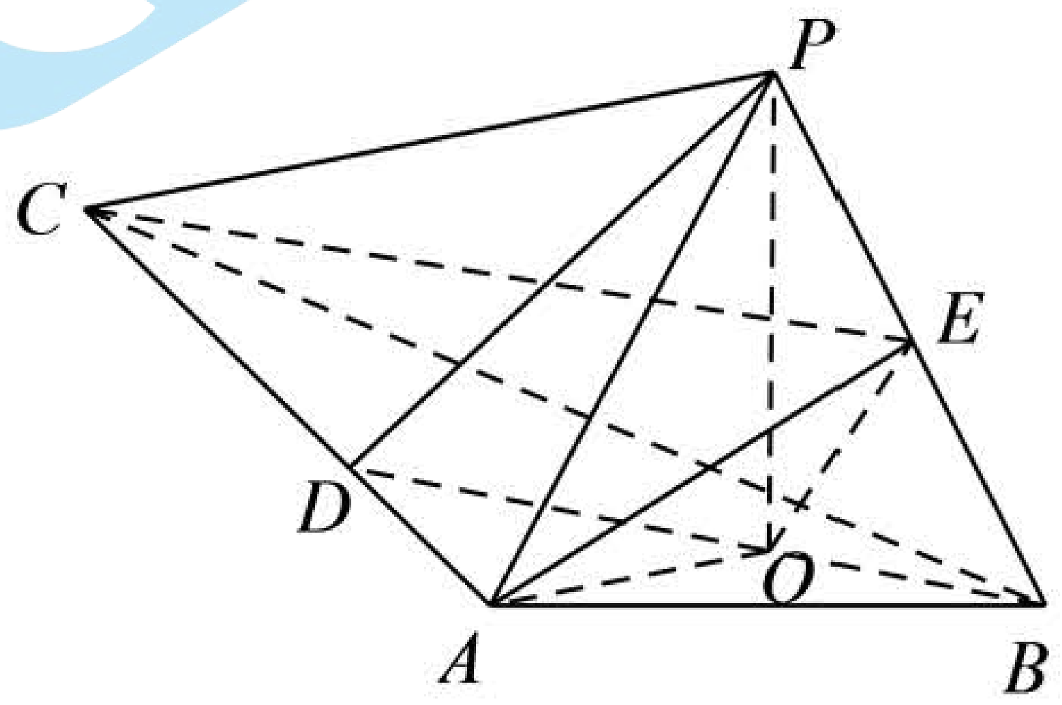
又 $AB\perp AC$，即 $\angle BAC=90^\circ$，所以 $\angle OAB+\angle OAD=90^\circ$，$\angle OBA+\angle ODA=90^\circ$，

所以 $\angle ODA=\angle OAD$

所以 $AO=DO$，即 $AO=DO=OB$，所以 O 为 BD 的中点，又 E 为 PB 的中点，所以 $OE//PD$，

又 $OE\not\subset$ 平面 PAC，$PD\subset$ 平面 PAC，

所以 $OE//$ 平面 PAC



（2）$\dfrac{11}{13}$

21.（1）$x^2-\dfrac{y^2}{3}=1$

（2）由已知得直线 PQ 的斜率存在且不为零，直线 AB 的斜率不为零，

若选由①②推③或选由②③推①：由②成立可知直线 AB 的斜率存在且不为零；

若选①③推②，则 M 为线段 AB 的中点，假若直线 AB 的斜率不存在，则由双曲线的对称性可知 M 在 x 轴上，

即为焦点 F，此时由对称性可知 P、Q 关于 x 轴对称，与从而 $x_1=x_2$，已知不符；

总之，直线 AB 的斜率存在且不为零.

设直线 AB 的斜率为 k，直线 AB 方程为 $y=k(x-2)$，

则条件① M 在 AB 上，等价于 $y_0=k\left(x_0-2\right)\Leftrightarrow ky_0=k^2\left(x_0-2\right)$；

两渐近线的方程合并为 $3x^2-y^2=0$，

联立消去 y 并化简整理得：$\left(k^2-3\right)x^2-4k^2x+4k^2=0$

设 $A\left(x_3,y_3\right),B\left(x_3,y_4\right)$，线段中点为 $N\left(x_N,y_N\right)$，则 $x_N=\frac{x_3+x_4}{2}=\frac{2k^2}{k^2-3},y_N=k\left(x_N-2\right)=\frac{6k}{k^2-3}$，

设 $M\left(x_0,y_0\right)$，

则条件③ $|AM|=|BM|$ 等价于 $\left(x_0-x_3\right)^2+\left(y_0-y_3\right)^2=\left(x_0-x_4\right)^2+\left(y_0-y_4\right)^2$，

移项并利用平方差公式整理得：

$\left(x_3-x_4\right)\left[2x_0-\left(x_3+x_4\right)\right]+\left(y_3-y_4\right)\left[2y_0-\left(y_3+y_4\right)\right]=0$，

$\left[2x_0-\left(x_3+x_4\right)\right]+\frac{y_3-y_4}{x_3-x_4}\left[2y_0-\left(y_3+y_4\right)\right]=0$，即 $x_0-x_N+k\left(y_0-y_N\right)=0$，

即 $x_0+ky_0=\frac{8k^2}{k^2-3}$；

由题意知直线 PM 的斜率为 $-\sqrt{3}$，直线 QM 的斜率为 $\sqrt{3}$，

$\therefore$ 由 $y_1-y_0=-\sqrt{3}\left(x_1-x_0\right),y_2-y_0=\sqrt{3}\left(x_2-x_0\right)$，

$\therefore y_1-y_2=-\sqrt{3}\left(x_1+x_2-2x_0\right)$，

所以直线 PQ 的斜率 $m=\frac{y_1-y_2}{x_1-x_2}=-\frac{\sqrt{3}\left(x_1+x_2-2x_0\right)}{x_1-x_2}$，

直线 $PM:y=-\sqrt{3}\left(x-x_0\right)+y_0$，即 $y=y_0+\sqrt{3}x_0-\sqrt{3}x$，

代入双曲线的方程 $3x^2-y^2-3=0$，即 $\left(\sqrt{3}x+y\right)\left(\sqrt{3}x-y\right)=3$ 中，

得：$\left(y_0+\sqrt{3}x_0\right)\left[2\sqrt{3}x-\left(y_0+\sqrt{3}x_0\right)\right]=3$，

解得 P 的横坐标：$x_1=\frac{1}{2\sqrt{3}}\left(\frac{3}{y_0+\sqrt{3}x_0}+y_0+\sqrt{3}x_0\right)$，

同理：$x_2=-\frac{1}{2\sqrt{3}}\left(\frac{3}{y_0-\sqrt{3}x_0}+y_0-\sqrt{3}x_0\right)$，

$\therefore x_1-x_2=\frac{1}{\sqrt{3}}\left(\frac{3y_0}{y_0^2-3x_0^2}+y_0\right), x_1+x_2-2x_0=-\frac{3x_0}{y_0^2-3x_0^2}-x_0$,

$\therefore m=\frac{3x_0}{y_0}$,

$\therefore$条件② $PQ//AB$ 等价于 $m=k\Leftrightarrow ky_0=3x_0$,

综上所述：

条件① M 在 AB 上，等价于 $ky_0=k^2(x_0-2)$；

条件② $PQ//AB$ 等价于 $ky_0=3x_0$；

条件③ $|AM|=|BM|$ 等价于 $x_0+ky_0=\frac{8k^2}{k^2-3}$；

选①②推③：

由①②解得：$x_0=\frac{2k^2}{k^2-3}, \therefore x_0+ky_0=4x_0=\frac{8k^2}{k^2-3}$，$\therefore$③成立；

选①③推②：

由①③解得：$x_0=\frac{2k^2}{k^2-3}$，$ky_0=\frac{6k^2}{k^2-3}$，

$\therefore ky_0=3x_0$，$\therefore$②成立；

选②③推①：

由②③解得：$x_0=\frac{2k^2}{k^2-3}$，$ky_0=\frac{6k^2}{k^2-3}$，$\therefore x_0-2=\frac{6}{k^2-3}$，

$\therefore ky_0=k^2(x_0-2)$，$\therefore$①成立.

22.（1）$f(x)$的减区间为$(-\infty,0)$，增区间为$(0,+\infty)$.

（2）$a\le\frac{1}{2}$

（3）取 $a=\frac{1}{2}$，则 $\forall x>0$，总有 $xe^{\frac{1}{2}x}-e^x+1<0$ 成立，

令 $t=e^{\frac{1}{2}x}$，则 $t>1, t^2=e^x, x=2\ln t$，

故 $2t\ln t<t^2-1$ 即 $2\ln t<t-\frac{1}{t}$ 对任意的 $t>1$ 恒成立.

所以对任意的$n\in N^*$，有$2\ln\sqrt{\frac{n+1}{n}}<\sqrt{\frac{n+1}{n}}-\sqrt{\frac{n}{n+1}}$，

整理得到：$\ln(n+1)-\ln n<\frac{1}{\sqrt{n^2+n}}$，

故$\frac{1}{\sqrt{1^2+1}}+\frac{1}{\sqrt{2^2+2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n^2+n}}>\ln 2-\ln 1+\ln 3-\ln 2+\cdots+\ln(n+1)-\ln n$

$=\ln(n+1)$，

故不等式成立.

关于我们

北京高考在线创办于 2014 年，隶属于北京太星网络科技有限公司，是北京地区极具影响力的中学升学服务平台。主营业务涵盖：北京新高考、高中生涯规划、志愿填报、强基计划、综合评价招生和学科竞赛等。

北京高考在线旗下拥有网站门户、微信公众平台等全媒体矩阵生态平台。平台活跃用户 40W+，网站年度流量数千万量级。用户群体立足于北京，辐射全国 31 省市。

北京高考在线平台一直秉承 " 精益求精、专业严谨 " 的建设理念，不断探索“K12 教育+互联网+大数据”的运营模式，尝试基于大数据理论为广大中学和家长提供新鲜的高考资讯、专业的高考政策解读、科学的升学规划等，为广大高校、中学和教科研单位提供“衔接和桥梁纽带”作用。

平台自创办以来，为众多重点大学发现和推荐优秀生源，和北京近百所中学达成合作关系，累计举办线上线下升学公益讲座数百场，帮助数十万考生顺利通过考入理想大学，在家长、考生、中学和社会各界具有广泛的口碑影响力

未来，北京高考在线平台将立足于北京新高考改革，基于对北京高考政策研究及北京高校资源优势，更好的服务全国高中家长和学生。