

北京汇文中学教育集团 2022-2023 学年度第二学期
期末考试
高二年级 数学学科

本试卷共 6 页, 共 150 分. 考试时长 120 分钟. 考生务必将答案答在答题卡上, 在试卷上作答无效.

一、选择题(每题 5 分, 共 60 分)

1. 已知集合 $A = \{x \in \mathbb{N} \mid |x-1| < 2\}$, $B = \{x \mid x < 2\}$, 则 $A \cap B = ()$

- A. $\{0\}$ B. $\{-1, 0\}$ C. $\{-1, 0, 1\}$ D. $\{0, 1\}$

2. 设命题 $p: \forall x > 0, e^x \geq x+1$, 则 $\neg p$ 为()

- A. $\forall x > 0, e^x \leq x+1$ B. $\forall x < 0, e^x < x+1$
C. $\exists x > 0, e^x < x+1$ D. $\exists x < 0, e^x \geq x+1$

3. 下列函数中, 在其定义域内, 既是奇函数又存在零点的是()

- A. $f(x) = e^x + e^{-x}$ B. $f(x) = x + \frac{1}{x}$ C. $f(x) = 2^x - 2^{-x}$ D. $f(x) = x^{\frac{1}{3}}$

4. “ $-2 < m \leq 2$ ”是“ $x^2 - mx + 1 > 0$ 在 $x \in (1, +\infty)$ 上恒成立”的()

- A. 充分而不必要条件 B. 必要而不充分条件
C. 充分必要条件 D. 既不充分也不必要条件

5. 函数 $f(x) = e^x + x^2 - 4$ 在区间 $(-2, 1)$ 内零点的个数为()

- A. 0 B. 1 C. 2 D. 3

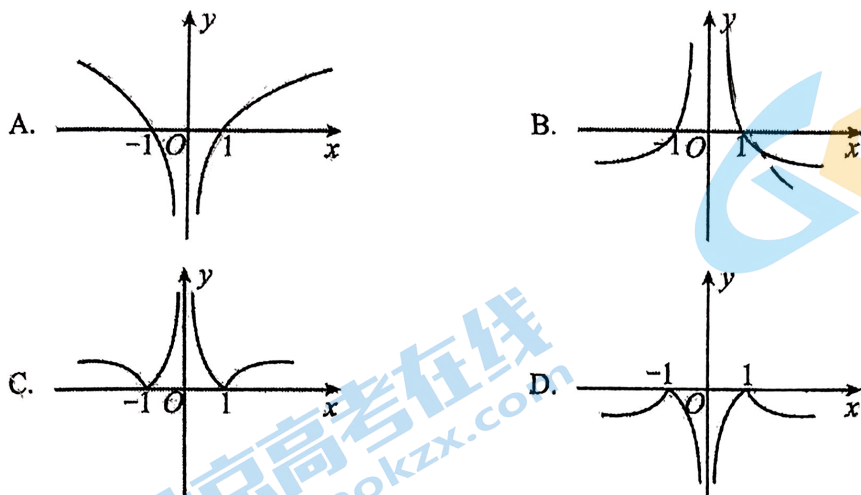
6. 若曲线 $y = f(x)$ 在某点 $(x_0, f(x_0))$ 处的切线的斜率为 2, 则该曲线不可能是()

- A. $y = \sin 2x$ B. $y = x^3 + 2x$ C. $y = \frac{1}{\ln x}$ D. $y = xe^x$

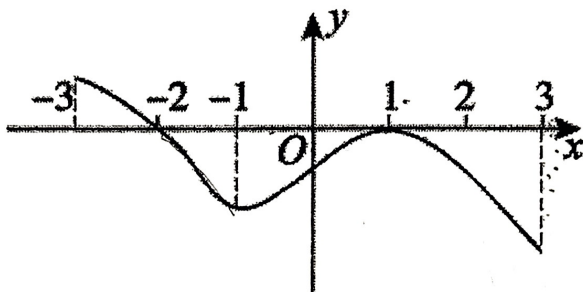
7. 设二次函数 $f(x) = ax^2 - 4x + c (x \in \mathbb{R})$ 的值域为 $[0, +\infty)$, 则 $\frac{1}{c} + \frac{9}{a}$ 的最小值为()

- A. 3 B. $\frac{9}{2}$ C. 5 D. 7

8. 若函数 $y=a^{|x|}$ ($a > 0$, 且 $a \neq 1$) 的值域为 $(0, 1]$, 则函数 $y=\log_a |x|$ 的图象大致是()



9. 已知函数 $f(x)$ 的导函数 $f'(x)$ 的图象如图所示, 则下列结论中正确的是()



- A. 曲线 $y=f(x)$ 在点 $(1, f(1))$ 处的切线斜率小于零
- B. 函数 $f(x)$ 在区间 $(-1, 1)$ 上单调递增
- C. 函数 $f(x)$ 在 $x=1$ 处取得极大值
- D. 函数 $f(x)$ 在区间 $(-3, 3)$ 内至多有两个零点

10. 定义在 \mathbf{R} 上的偶函数 $y=f(x)$ 满足 $f(x+1)=-f(x)$, 且在 $[0, 1]$ 上单调递增, $a=f(\frac{2023}{2})$,

$b=f(\ln \sqrt{2})$, $c=f(2024)$, 则 a, b, c 的大小关系是()

- A. $a > b > c$
- B. $a > c > b$
- C. $b > c > a$
- D. $c > b > a$

11. 下列不等关系中正确的是()

- A. $\ln 2 + \ln 3 > 2 \ln \frac{5}{2}$
- B. $\frac{1}{3} < \ln 3 - \ln 2 < \frac{1}{2}$
- C. $\ln 2 \cdot \ln 3 > 1$
- D. $\frac{\ln 3}{\ln 2} < \frac{3}{2}$

12. 曲线 $f(x) = \frac{x}{e^x}$, $g(x) = \frac{\ln x}{x}$, 及直线 $y = a (a \in \mathbf{R})$, 下列说法中正确的个数为 ()

- ① 存在直线与曲线 $f(x)$ 与 $g(x)$ 均相切;
- ② 曲线 $f(x)$ 与 $g(x)$ 有且只有一个公共点;
- ③ 存在直线 $y = a$ 与曲线 $f(x)$ 、 $g(x)$ 均有公共点;
- ④ 若直线 $y = a$ 与曲线 $f(x)$ 交于点 $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, 与曲线 $g(x)$ 交于点 $C(x_3, y_3)$, 则 $x_1 x_3 = x_2^2$.

A. 1 B. 2 C. 3 D. 4

二、填空题(每题 5 分, 共 30 分)

13. 函数 $f(x) = \begin{cases} 2^x - 1, & x \leq 1 \\ x^2 - 2x, & x > 1 \end{cases}$ 的值域为_____.

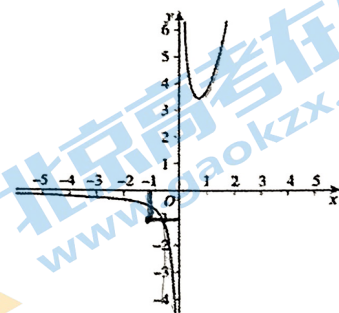
14. 已知函数 $f(x) = \log_a x + b (a > 0, \text{且 } a \neq 1)$ 的定义域和值域均为 $[1, 2]$, 则 $a + b =$ _____.

15. 若存在 $x \in \mathbf{R}$, 使不等式 $ax^2 + 2x + a < 0$ 成立, 则实数 a 的取值范围为_____.

16. 已知函数 $f(x) = \frac{|2x| + x^3 + 2}{|x| + 1}$ 的最大值为 M , 最小值为 m , 则 $M + m$ 等于_____.

17. 已知下列五个函数: $y = x$, $y = \frac{1}{x}$, $y = x^2$, $y = \ln x$, $y = e^x$,

从中选出两个函数分别记为 $f(x)$ 和 $g(x)$, 若 $F(x) = f(x) + g(x)$ 的图象如图所示, 则 $F(x) =$ _____.



18. 激活函数是神经网络模型的重要组成部分, 是一种添加到人工神经网络中的函数. \tanh 函数是常用的激活函数之一, 其解析式为

$f(x) = \frac{2}{1 + e^{-2x}}$. 关于 \tanh 函数的以下结论:

- ① \tanh 函数是增函数;
- ② \tanh 函数是奇函数;
- ③ 对于任意实数 a , 函数 $y = f(x) - ax + 1$ 至少有一个零点;
- ④ 曲线 $y = f(x)$ 不存在与直线 $x + \sqrt{2}y = 0$ 垂直的切线.

其中所有正确结论的序号是_____.

三、解答题(每题 12 分, 共 60 分)

19. $y = f(x)$ 是定义在 $(0, +\infty)$ 上的减函数, 满足 $f(xy) = f(x) + f(y)$, $f\left(\frac{1}{3}\right) = 1$,

(I) 求 $f(1)$ 、 $f(3)$ 的值;

(II) 若 $f\left(\frac{1}{x}\right) + f(2-x) > 2$, 求 x 的取值范围.

20. 已知函数 $f(x) = \frac{1-x}{1+ax^2}$, 其中 $a \in \mathbb{R}$.

(I) 当 $a = -\frac{1}{4}$ 时, 求曲线 $y = f(x)$ 在点 $(1, f(1))$ 处的切线方程;

(II) 当 $a > 0$ 时, 证明: 存在实数 $m > 0$, 使得对任意的 x , 都有 $-m \leq f(x) \leq m$ 成立.

21. 已知二次函数 $f(x) = x^2 - 2mx + 2m^2 - 4$, $m \in \mathbb{R}$,

(I) 若关于 x 的不等式 $f(2^x) \leq 0$ 解集恰含有一个元素, 求实数 m 的值.

(II) 若方程 $f(x) = 0$ 在区间 $(2, +\infty)$ 上有解, 记解的个数为 k , 求 k 的取值及相应实数 m 的取值范围.

22. 已知函数 $f(x) = x \ln x - \frac{1}{2}ax^2$, 其中 $a \in \mathbf{R}$.

(I) 若 $a=1$, 求 $f(x)$ 的单调区间;

(II) 若 $f(x)$ 恰有 2 个不同的极值, 求 a 的取值范围;

(III) 若 $f(x)$ 恰有 2 个不同的零点, 直接写出 a 的取值范围(不要求证明).

23. 设 $n(n \geq 2)$ 为正整数, 若 $\alpha = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ 满足:

① $x_i \in \{0, 1, \dots, n-1\}, i=1, 2, \dots, n$; ② 对于 $1 \leq i < j \leq n$, 均有 $x_i \neq x_j$.

则称 $\alpha = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ 具有性质 $E(n)$.

对于 $\alpha = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ 和 $\beta = (y_1, y_2, \dots, y_n)$,

定义集合 $T(\alpha, \beta) = \{t | t = |x_i - y_i|, i=1, 2, \dots, n\}$.

(I) 设 $\alpha = (1, 0, 2)$, 若 $\beta = (1, a, b)$ 具有性质 $E(3)$, 写出一个 β 及相应的 $T(\alpha, \beta)$;

(II) 设 α 和 β 具有性质 $E(6)$, 那么 $T(\alpha, \beta)$ 是否可能为 $\{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$, 若可能, 写出一组 α 和 β , 若不可能, 说明理由;

(III) 设 α 和 β 具有性质 $E(n)$, 对于给定的 α , 求证: 满足 $T(\alpha, \beta) = \{0, 1, \dots, n-1\}$ 的 β 有偶数个.

关于我们

北京高考在线创办于 2014 年，隶属于北京太星网络科技有限公司，是北京地区极具影响力的中学升学服务平台。主营业务涵盖：北京新高考、高中生涯规划、志愿填报、强基计划、综合评价招生和学科竞赛等。

北京高考在线旗下拥有网站门户、微信公众平台等全媒体矩阵生态平台。平台活跃用户 40W+，网站年度流量数千万量级。用户群体立足于北京，辐射全国 31 省市。

北京高考在线平台一直秉承 “精益求精、专业严谨” 的建设理念，不断探索 “K12 教育+互联网+大数据” 的运营模式，尝试基于大数据理论为广大中学和家长提供新鲜的高考资讯、专业的高考政策解读、科学的升学规划等，为广大高校、中学和教科研单位提供 “衔接和桥梁纽带” 作用。

平台自创办以来，为众多重点大学发现和推荐优秀生源，和北京近百所中学达成合作关系，累计举办线上线下升学公益讲座数百场，帮助数十万考生顺利通过考入理想大学，在家长、考生、中学和社会各界具有广泛的口碑影响力

未来，北京高考在线平台将立足于北京新高考改革，基于对北京高考政策研究及北京高校资源优势，更好的服务全国高中家长和学生。



微信搜一搜



京考一点通