2023 北京北师大二附中高三 10 月月考

数　　学

2023.10.5

一、单选题（共 10 小题；共 40 分）

1. 已知集合 $A=\{x|x\geq 0\}, B=\{x\in\mathbf{Z}|-2<x<2\}$，那么 $A\cap B=$（　）

A. $\{-1,0\}$　　B. $\{x|0\leq x<2\}$　　C. $\{0,1\}$　　D. $\{0,1,2\}$

2. 已知 $\overrightarrow{AB}=(-2,4)$，则下面说法正确的是（　）

A. A 点的坐标是 $(-2,4)$

B. B 点的坐标是 $(-2,4)$

C. 当 B 点是原点时，A 点的坐标是 $(-2,4)$

D. 当 A 点是原点时，B 点的坐标是 $(-2,4)$

3. 若 p：$\forall x\in\mathbf{R}$，$\sin x\leq 1$，则（　）

A. $\neg p$：$\forall x\in\mathbf{R}$，$\sin x>1$

B. $\neg p$：$\exists x_0\in\mathbf{R}$，$\sin x_0>1$

C. $\neg p$：$\forall x\in\mathbf{R}$，$\sin x\geqslant 1$

D. $\neg p$：$\exists x_0\in\mathbf{R}$，$\sin x_0\geq 1$

4. 已知等差数列 $\{a_n\}$ 中，$a_1=1$，公差 $d\neq 0$，如果 a_1，a_2，a_5 成等比数列，那么 d 等于（　）

A. 2 或 -2　　B. -2　　C. 2　　D. 3

5. 平面向量 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 的夹角为 60°，$\vec{a}=(2,0)$，$|\vec{b}|=1$，则 $|\vec{a}+2\vec{b}|$ 等于（　）

A. $\sqrt{3}$　　B. $2\sqrt{3}$　　C. 4　　D. 12

6. 已知函数 $f(x)=x+\frac{a}{x}$，给出下列结论：

①$\forall a\in\mathbf{R}$，$f(x)$ 是奇函数；

②$\exists \boldsymbol{a}\in \boldsymbol{R}$，$f(x)$ 不是奇函数；

③$\forall a\in\mathbf{R}$，方程 $f(x)=-x$ 有实根；

④$\exists \boldsymbol{a}\in \boldsymbol{R}$，方程 $f(x)=-x$ 有实根．

其中，所有正确结论的序号是

A. ①③　　B. ①④　　C. ①②④　　D. ②③④

7. 若 $a=2^x$，$b=\log_{\frac{1}{2}}x$，则“$a>b$”是“$x>1$”的

A. 充分不必要条件

B. 必要不充分条件

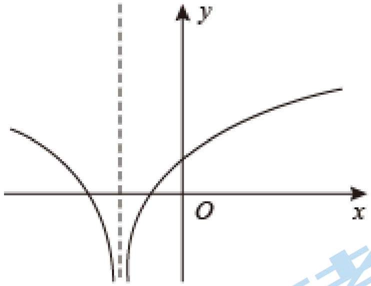
C. 充要条件

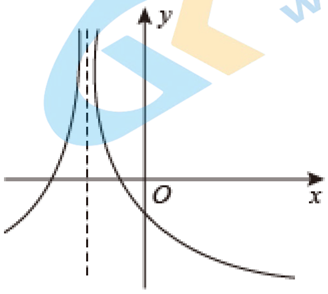
D.既不充分又不必要条件

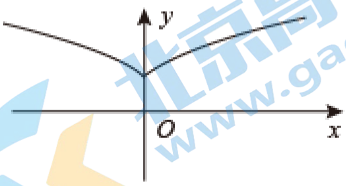
8. 已知向量 $\vec{m}=(a,-1),\vec{n}=(2b-1,3)(a>0,b>0)$，若 $\vec{m}//\vec{n}$，则 $\dfrac{2}{a}+\dfrac{1}{b}$ 的最小值为（　）.

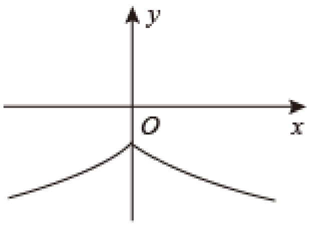
A. 12　　　　B. $8+4\sqrt{3}$　　　　C. 16　　　　D. $10+2\sqrt{3}$

9. 若函数 $f(x)=(k-1)a^x-a^{-x}$（$a>0$ 且 $a\neq1$）在 R 上既是奇函数，又是减函数，则 $g(x)=\log_a|x+k|$ 的大致图象是（　）

A. 

B. 

C. 

D. 

10. 已知 $f(x)$ 为定义在 **R** 上的偶函数，当 $x\geq0$ 时，有 $f(x+1)=-f(x)$，且当 $x\in[0,1)$ 时，$f(x)=\log_2(x+1)$. 给出下列命题：① $f(2022)+f(-2023)=0$；②函数 $f(x)$ 在定义域上是周期为 2 的周期函数；③直线 $y=x$ 与函数 $f(x)$ 的图象有 1 个交点；④函数 $f(x)$ 的值域为 $(-1,1)$. 其中正确的命题的个数是（　）

A. 1　　　　B. 2　　　　C. 3　　　　D. 4

二、填空题（共 5 小题；共 25 分）

11. 若复数 $z_1=1-\mathrm{i},z_2=2+4\mathrm{i}$，其中 i 是虚数单位，则复数 z_1z_2 的虚部是________.

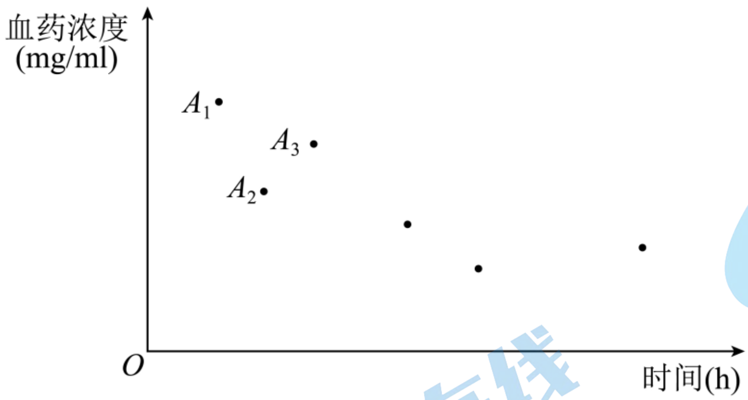
12. 设集合 $M=\{x|-2<x<5\}$，$N=\{x|2-t<x<2t+1,t\in R\}$，若 $M\cap N=N$，则实数 t 的取值范围为__________.

13. 已知 $A(3,-4),B(-9,2)$ 两点，点 P 在直线 AB 上，且 $|\overrightarrow{AP}|=\dfrac{1}{3}|\overrightarrow{AB}|$，则点 P 的坐标为_________.

14. 已知 $a\in R$，设函数 $f(x)=\begin{cases}x^2-3x+2a, & x\leqslant1\\ x-a\ln x, & x>1\end{cases}$，若关于 x 的不等式 $f(x)\geq0$ 在 R 上恒成立，则 a 的取值范围是_________.

15. 血药浓度（Serum Drug Concentration）是指药物吸收后在血浆内的总浓度（单位：mg/ml），通常用血药浓度来研究药物的作用强度．下图为服用同等剂量的三种新药后血药浓度的变化情况，其中点 A_i 的横坐标表示服用第 i 种药后血药浓度达到峰值时所用的时间，其它点的横坐标分别表示服用三种新药后血药

浓度第二次达到峰值一半时所用的时间(单位：h)，点 A_i 的纵坐标表示第 i 种药的血药浓度的峰值.（$i=1,2,3$）



①记 V_i 为服用第 i 种药后达到血药浓度峰值时，血药浓度提高的平均速度，则 V_1,V_2,V_3 中最大的是 _______；

②记 T_i 为服用第 i 种药后血药浓度从峰值降到峰值的一半所用的时间，则 T_1,T_2,T_3 中最大的是_______

三、解答题（共 6 小题；共 85 分）

16. 已知等比数列$\{a_n\}$满足 $a_3=12$, $a_8=\frac{3}{8}$ 记其前 n 项和为 S_n

(1)求数列$\{a_n\}$的通项公式 a_n；

(2)若 $S_n=93$，求 n.

17.（1）化简：$\dfrac{\sin(\pi-\alpha)\cos(\pi+\alpha)\sin(\frac{\pi}{2}+\alpha)}{\sin(-\alpha)\sin(\frac{3\pi}{2}+\alpha)}$.

（2）已知 $\alpha\in(\frac{\pi}{2},\pi)$，且 $\sin(\pi-\alpha)+\cos\alpha=\frac{7}{13}$, 求 $\tan\alpha$.

18. 为了进一步激发同学们的学习热情，某班级建立了数学、英语两个学习兴趣小组，两组的人数如下表所示：

组别 性别	数学	英语
男	5	1
女	3	3

现采用分层抽样的方法(层内采用简单随机抽样)从两组中共抽取 3 名同学进行测试.

（1）求从数学组抽取的同学中至少有 1 名女同学的概率；

（2）记 ξ 为抽取的 3 名同学中男同学的人数，求随机变量 ξ 的分布列和数学期望.

19. 某地方政府为鼓励全民创业，拟对本地产值在 50 万元到 500 万元的新增小微企业进行奖励，奖励方案遵循以下原则：奖金 y(单位：万元)随年产值 x(单位：万元)的增加而增加，且奖金不低于 7 万元，同时奖金不超过年产值的 15%.

（1）若某企业产值 100 万元，核定可得 9 万元奖金，试分析函数 $y=\lg x+kx+5$(k 为常数)是否为符合政府要求的奖励函数模型，并说明原因(已知 $\lg 2\approx0.3$，$\lg 5\approx0.7$).

（2）若采用函数 $f(x)=\dfrac{15x-a}{x+8}$ 作为奖励函数模型，试确定最小的正整数 a 的值.

20. 已知函数 $f(x)=\ln x-(a+2)x+ax^2$（$a\in R$）.

（1）当 $a=0$ 时，求曲线 $y=f(x)$ 在点 $(1,f(1))$ 处的切线方程；

（2）求 $f(x)$ 的单调区间；

（3）若 $f(x)$ 恰有两个零点，求实数 a 的取值范围.

21. 如果数列 $\{a_n\}$ 对任意的 $n\in \mathrm{N}^*$，$a_{n+2}-a_{n+1}>a_{n+1}-a_n$，则称 $\{a_n\}$ 为“速增数列”.

（1）判断数列 $\{2^n\}$ 是否为“速增数列”？说明理由；

（2）若数列 $\{a_n\}$ 为“速增数列”.且任意项 $a_n\in \mathrm{Z}$，$a_1=1,a_2=3,a_k=2023$，求正整数 k 的最大值；

（3）已知项数为 $2k$（$k\ge2,k\in \mathrm{Z}$）的数列 $\{b_n\}$ 是“速增数列”，且 $\{b_n\}$ 的所有项的和等于 k，若 $c_n=2^{b_n}$，$n=1,2,3,\cdots,2k$，证明：$c_kc_{k+1}<2$.

参考答案

一、单选题（共 10 小题；共 40 分）

1. 【答案】C

【分析】利用整数集的意义化简集合 B，从而利用集合的交集运算即可求得所求.

【详解】因为 $B=\{x\in \mathbf{Z}|-2<x<2\}=\{-1,0,1\}$， $A=\{x|x\geq 0\}$，

所以 $A\cap B=\{0,1\}$.

故选：C.

2. 【答案】D

【分析】根据平面向量的坐标运算逐项判断即可.

【详解】由平面向量的坐标表示可知，当 A 点是原点时，B 点的坐标是 $(-2,4)$.

故选：D.

3. 【答案】B

【分析】根据全称命题的否定为特称命题即可得结果.

【详解】由于全称命题的否定为特称命题，

即 $\forall x\in\mathbf{R}$， $\sin x\leq 1$的否定为 $\exists x_0\in\mathbf{R}$， $\sin x_0>1$，

故选：B.

4. 【答案】C

【分析】利用等差数列的通项公式，进行基本量代换，求出公差 d 即可.

【详解】因为 a_1， a_2， a_5 成等比数列，所以 $a_2^2=a_1a_5$， 即 $(a_1+d)^2=a_1(a_1+4d)$，

因为 $a_1=1$，所以 $(1+d)^2=1(1+4d)$，解得：d=2（d=0 舍去）.

故选：C

5. 【答案】B

【分析】转化为平面向的数量积可求出结果.

【详解】因为 $\vec{a}=(2,0)$，所以 $|\vec{a}|=2$，

$$\left|\vec{a}+2\vec{b}\right|=\sqrt{\left(\vec{a}+2\vec{b}\right)^2}=\sqrt{|\vec{a}|^2+4\vec{a}\cdot\vec{b}+4|\vec{b}|^2}=\sqrt{4+4\times 2\times 1\times\cos 60^{\circ}+4}=2\sqrt{3}.$$

故选：B

6. 【答案】B

【分析】

根据奇偶性判断①②，由 $a\leq 0$ 时方程 $f(x)=-x$ 有实根判断③④.

【详解】 $f(x)$ 的定义域关于原点对称，且 $f(-x)=-x-\dfrac{a}{x}=-f(x)$，则 $\forall a\in\mathbf{R}$， $f(x)$ 是奇函数，故

①正确，②错误；

$x+\frac{a}{x}=-x$，则 $-a=2x^2$，要使得该方程有解，即 $a\le 0$

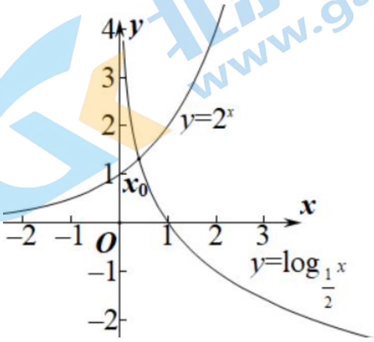
所以 $\exists \boldsymbol{a}\in \boldsymbol{R}$，方程 $f\left(x\right)=-x$ 有实根，故③错误，④正确

故选：B

7.【答案】B

【分析】先画出函数 $y=2^x, y=\log_{\frac{1}{2}}x$ 的图象，根据图象以及充分条件，必要条件的定义即可判断 $a>b$ 与 $x>1$ 的关系即可

【详解】画出函数 $y=2^x, y=\log_{\frac{1}{2}}x$ 的图象，易得 $x=x_0$ 时，$a=b$，∴若 $a>b$，则得到 $x>x_0$，且 $x_0<1$，故 $a>b$ 不一定得到 $x>1$；∴ $a>b$ 不是 $x>1$ 的充分条件；若 $x>1$，则由图象得到 $a>b$，∴ $a>b$ 是 $x>1$ 的必要条件；∴ $a>b$ 是 $x>1$ 的必要不充分条件.



故选：B

8.【答案】B

【分析】

根据向量的平行关系，得到 a,b 间的等量关系，再根据“1”的妙用结合基本不等式即可求解出 $\frac{2}{a}+\frac{1}{b}$ 的最小值.

【详解】因为 $\vec{m}//\vec{n}$，所以 $3a+2b-1=0$，所以 $3a+2b=1$，

又因为 $\frac{2}{a}+\frac{1}{b}=\left(3a+2b\right)\left(\frac{2}{a}+\frac{1}{b}\right)=8+\frac{3a}{b}+\frac{4b}{a}\ge 8+2\sqrt{\frac{3a}{b}\cdot\frac{4b}{a}}=8+4\sqrt{3}$，

取等号时 $\begin{cases}\frac{3a}{b}=\frac{4b}{a}\\3a+2b=1\end{cases}$ 即 $\begin{cases}a=\frac{3-\sqrt{3}}{6}\\b=\frac{\sqrt{3}-1}{4}\end{cases}$，

所以 $\left(\frac{2}{a}+\frac{1}{b}\right)_{\min}=8+4\sqrt{3}$.

故选：B.

【点睛】本题考查利用基本不等式求解最小值，难度一般.本题是基本不等式中的常见类型问题：已知 $ma+nb=1(m,n,a,b>0)$，则 $\frac{p}{a}+\frac{q}{b}=(ma+nb)\left(\frac{p}{a}+\frac{q}{b}\right)=mp+nq+\frac{mqa}{b}+\frac{npb}{a}\geq$

$mp+nq+2\sqrt{\frac{mqa}{b}\cdot\frac{npb}{a}}=mp+nq+2\sqrt{mnpq}\,(p,q>0)$，取等号时 $mqa^2=npb^2$.

9.【答案】B

【分析】先求得 $g(x)$ 的解析式中参数 k 的值和 a 的取值范围，再去判断其图像形状.

【详解】因为函数 $f(x)=(k-1)a^x-a^{-x}\,(a>0,a\neq1)$ 在 R 上是奇函数，

所以 $f(0)=0$，所以 $k=2$，经检验，$k=2$ 满足题意，

又因为 $f(x)$ 为减函数，所以 $0<a<1$，则 $g(x)=\log_a|x+2|$ （$0<a<1$）

由 $g(-4-x)=\log_a|-4-x+2|=\log_a|x+2|=g(x)$

可知 $g(x)$ 的图象关于直线 $x=-2$ 轴对称，排除选项 CD；

又 $g(0)=\log_a|0+2|=\log_a 2<0$，可知选项 A 错误.所以 $g(x)$ 的大致图象为 B.

故选：B

10.【答案】C

【分析】根据 $f(x+1)=-f(x)$ 得到 $x\geq0$ 时，$f(x)$ 的周期为 2，然后结合 $f(x)$ 为 R 上的偶函数求 $f(2022)+f(-2023)$ 即可判断①；利用特殊值的思路得到 $f\left(\frac{1}{2}\right)\neq f\left(-\frac{3}{2}\right)$，即可判断②；根据题意得到 $f(x)$ 的图象，然后利用图象判断③④.

【详解】因为 $f(x)$ 为 R 上的偶函数，所以 $f(-x)=f(x)$，

因为 $x\geq0$ 时，$f(x+1)=-f(x)$，$f(x+2)=-f(x+1)$，所以 $f(x+2)=f(x)$，

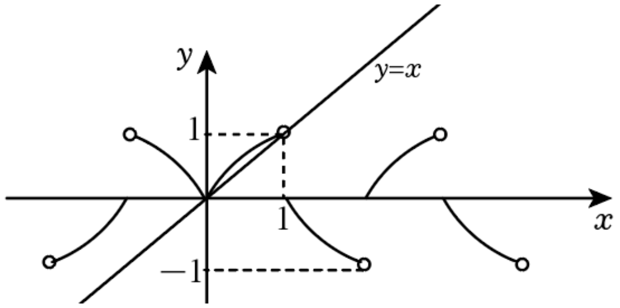
所以 $x\geq0$ 时，$f(x)$ 的周期为 2，

$f(2022)+f(-2023)=f(2\times1011+0)+f(2\times1011+1)=f(0)+f(1)=f(0)-f(0)=0$，故①正确；

因为 $f\left(\frac{1}{2}\right)=\log_2\frac{3}{2}$，$f\left(-\frac{3}{2}\right)=f\left(\frac{3}{2}\right)=-f\left(\frac{1}{2}\right)=-\log_2\frac{1}{2}$，所以 $f\left(\frac{1}{2}\right)\neq f\left(-\frac{3}{2}\right)$，

所以函数 $f(x)$ 不是在定义域上周期为 2 的函数，故②错；

由题意得，直线 $y=x$ 和 $f(x)$ 的图象如下：



由图可知，交点个数为一个，$f\left(x\right)$的值域为$\left(-1,1\right)$，故③④正确；

故选：C.

二、填空题（共 5 小题；共 25 分）

11.【答案】2

【分析】由复数的乘法运算化简复数，再由复数的定义即可得出答案.

【详解】因为复数$z_1=1-\mathrm{i}, z_2=2+4\mathrm{i}$，

所以$z_1z_2=\left(1-\mathrm{i}\right)\left(2+4\mathrm{i}\right)=2+4\mathrm{i}-2\mathrm{i}-4\mathrm{i}^2=6+2\mathrm{i}$，

故复数z_1z_2的虚部是2.

故答案为：2

12.【答案】$\{t\,|\,t\le 2\}$

【分析】由$M\cap N=N$得$N\subseteq M$，对集合N分两种情分别求出实数t的取值范围，最后对t取并集.

【详解】由$M\cap N=N$得$N\subseteq M$，

因为集合$M=\{x\,|-2<x<5\}$，$N=\{x\,|\,2-t<x<2t+1, t\in R\}$，

当$N=\varnothing$时，有$2-t\ge 2t+1$，解得$t\le\dfrac{1}{3}$，

当$N\ne\varnothing$时，有$\begin{cases}2t+1>2-t,\\2t+1\le 5,\\2-t\ge -2,\end{cases}$ 解得：$\dfrac{1}{3}<t\le 2$，

综上所述，实数t的取值范围$(-\infty, 2]$.

【点睛】本题考查集合的交集、并集运算，集合间的基本关系，考查分类讨论思想，特别是对集合是否为空集的两种情况讨论.

13.【答案】$\left(-1,-2\right)$或$\left(7,-6\right)$

【分析】分点P在线段AB上和点P在线段BA的延长线上，利用向量运算和向量相等即可得出.

【详解】设点P的坐标为$\left(x,y\right)$.

①若点P在线段AB上，则$\overrightarrow{AP}=\dfrac{1}{2}\overrightarrow{PB}$，$\therefore\left(x-3,y+4\right)=\dfrac{1}{2}\left(-9-x2-y\right)$.解得$x=-1, y=-2$，

$\therefore P\left(-1,-2\right)$.

②若点 P 在线段 BA 的延长线上，则 $\overrightarrow{AP}=-\frac{1}{4}\overrightarrow{PB}$，$\therefore(x-3,y+4)=-\frac{1}{4}(-9-x,2-y)$.解得

$x=7,y=-6$，$\therefore P(7,-6)$.

故答案为：$(-1,-2)$或$(7,-6)$.

【点睛】熟练掌握向量运算和向量相等是解题的关键.

14.【答案】$[1,e]$

【分析】

根据分段函数，当 $x\le1$时，将 $f(x)=x^2-3x+2a\ge0$ 恒成立，转化为 $a\geqslant\frac{3x-x^2}{2}$ 恒成立，令

$g(x)=\frac{3x-x^2}{2}$，利用二次函数的性质求得其最大值，当 $x>1$时，将 $f(x)=x-a\ln x\ge0$，转化为

$a\leqslant\frac{x}{1nx}$ 恒成立，令 $h(x)=\frac{x}{\ln x}$，用导数法求得其最小值，然后两种情况取交集.

【详解】当 $x\le1$时，$f(x)=x^2-3x+2a\ge0$ 等价于 $a\geqslant\frac{3x-x^2}{2}$ 恒成立，

令 $g(x)=\frac{3x-x^2}{2}=-\frac{1}{2}(x^2-3x)=-\frac{1}{2}\left(x-\frac{3}{2}\right)^2+\frac{9}{8}$，其中 $x\le1$，

则 $g(x)_{\max}=1$，

所以 $a\ge1$，

当 $x>1$时，$f(x)=x-a\ln x\ge0$等价于 $a\leqslant\frac{x}{1nx}$ 恒成立，

令 $h(x)=\frac{x}{\ln x}$，则 $h'(x)=\frac{\ln x-x\cdot\frac{1}{x}}{(\ln x)^2}=\frac{\ln x-1}{(\ln x)^2}$，

当 $x>e$时，$h'(x)>0,h(x)$递增，

当$1<x<\mathrm{e}$时，$h'(x)<0,h(x)$递减，

$\therefore x=e$时，$h(x)$取得最小值 $h(e)=e$，

$\therefore a\le h(x)_{\min}=e$，

综上：a 的取值范围是$[1,e]$.

故答案为：$[1,e]$.

【点睛】本题主要考查二次函数的最值，函数的最值与导数以及导数与不等式恒成立问题，还考查了运算求解的能力，属于中档题.

15.【答案】 ①. V_1 ②. T_3

【分析】①根据平均的含义进行判断，②根据两次横坐标距离大小确定选择.

【详解】①设 $A_i(x_i，y_i)$，则 $V_i=\frac{y_i}{x_i}$，

由于 $0<x_1<x_2<x_3$，$0<y_2<y_3<y_1$，

所以 $\frac{y_1}{x_1}>\frac{y_2}{x_2}$，$\frac{y_1}{x_1}>\frac{y_3}{x_3}$，即 V_1 最大；

②根据峰值的一半对应关系得三个点从左到右依次对应 A_1,A_2,A_3 在第二次达到峰值一半时对应点，由图可知 A_3 经历的时间最长，所以 T_1,T_2,T_3 中最大的是 T_3.

【点睛】本题考查数学实际应用以及图像识别，考查基本分析判断能力，属基础题.

三、解答题（共 6 小题；共 85 分）

16.【答案】(1) $a_n=48\times\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$；(2)5.

【分析】（1）设出等比数列的公比 q，由条件得到关于 a_1，q 的方程组，求得 a_1，q 便可得到数列的通项公式；

（2）根据前 n 项和得到关于 n 的方程，解方程可得解.

【详解】(1)设等比数列 $\{a_n\}$ 的公比为 q，

由条件得 $\begin{cases}a_1q^2=12\\ a_1q^7=\frac{3}{8}\end{cases}$，解得 $\begin{cases}a_1=48\\ q=\frac{1}{2}\end{cases}$，∴ $a_n=a_1q^{n-1}=48\times\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$.

即数列 $\{a_n\}$ 的通项公式为 $a_n=48\times\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$.

(2)由题意得 $S_n=\dfrac{48\times\left(1-\frac{1}{2^n}\right)}{1-\frac{1}{2}}=93$，解得：$n=5$.

【点睛】本题主要考查了等比数列的通项公式及等比数列的前 n 项和公式的应用，其中熟记等比数列的通项公式和前 n 项和公式，准确计算是解答的关键，着重考查了推理与运算能力，属于基础题.

17.【答案】(1) $-\cos\alpha$；(2) $-\frac{12}{5}$.

【分析】(1) 由条件利用诱导公式进行化简所给的式子，可得结果.

(2) 由题意利用同角三角函数的基本关系求得 $\sin\alpha-\cos\alpha$ 的值，可得 $\sin\alpha$ 和 $\cos\alpha$ 的值，进而求得 $\tan\alpha$ 的值.

【详解】（1）$\dfrac{sin(\pi-\alpha)cos(\pi+\alpha)sin\left(\dfrac{\pi}{2}+\alpha\right)}{sin(-\alpha)sin\left(\dfrac{3\pi}{2}+\alpha\right)}=\dfrac{sin\alpha\cdot(-cos\alpha)\cdot cos\alpha}{-sin\alpha\cdot(-cos\alpha)}=-cos\alpha$.

（2）由题意得 $\alpha\in\left(\dfrac{\pi}{2},\ \pi\right)$，sinα>0，cosα<0，$\because sin(\pi-\alpha)+cos\alpha=sin\alpha+cos\alpha=\dfrac{7}{13}$，

因为 $(sin\alpha-cos\alpha)^2=2-(sin\alpha+cos\alpha)^2=2-\dfrac{49}{169}=\dfrac{289}{169}$，又 sinα>0，cosα<0，

故 $sin\alpha-cos\alpha=\dfrac{17}{13}$，故 $sin\alpha=\dfrac{12}{13}$，$cos\alpha=-\dfrac{5}{13}$，$\therefore\tan\alpha=-\dfrac{12}{5}$

【点睛】本题主要考查应用同角三角函数的基本关系、诱导公式化简三角函数式，要特别注意符号的选取，这是解题的易错点，属于中档题.

18.【答案】（1）$\dfrac{9}{14}$.（2）分布列答案见解析，数学期望 $\dfrac{3}{2}$

【分析】（1）两小组的总人数之比为 8∶4，确定分层抽样的比值,即数学组抽取 2 人,英语组抽取 1 人.数学组至少有 1 名女同学的情况有：1 名男同学、1 名女同学和 2 名女同学两种情况.利用古典概型的概率计算公式即可得出结果.

（2）由题意可知，ξ 的所有可能取值为 0，1，2，3,根据题意可知需满足数学组抽取 2 人,英语组抽取 1 人,根据男生的人数进行分类讨论即可求得对应的概率,进而得出结果.

【详解】（1）两小组的总人数之比为 8∶4=2∶1，共抽取 3 人，

所以数学组抽取 2 人，英语组抽取 1 人.

从数学组抽取的同学中至少有 1 名女同学的情况有：1 名男同学、1 名女同学和 2 名女同学两种情况.

所以所求概率 $P=\dfrac{C_3^1C_5^1+C_3^2}{C_8^2}=\dfrac{9}{14}$.

（2）由题意可知，ξ 的所有可能取值为 0，1，2，3

$$P(\xi=0)=\frac{C_3^2}{C_8^2}\cdot\frac{C_3^1}{C_4^1}=\frac{9}{112}$$

$$P(\xi=1)=\frac{C_3^1C_5^1}{C_8^2}\cdot\frac{C_3^1}{C_4^1}+\frac{C_3^2}{C_8^2}\cdot\frac{C_1^1}{C_4^1}=\frac{48}{112}=\frac{3}{7}$$

$$P(\xi=2)=\frac{C_3^1C_5^1}{C_8^2}\cdot\frac{C_1^1}{C_4^1}+\frac{C_5^2}{C_8^2}\cdot\frac{C_3^1}{C_4^1}=\frac{45}{112}$$

$$P(\xi=3)=\frac{C_5^2}{C_8^2}\cdot\frac{C_1^1}{C_4^1}=\frac{10}{112}=\frac{5}{56}$$

分布列为：

	0	1	2	3

P	$\frac{9}{112}$	$\frac{3}{7}$	$\frac{45}{112}$	$\frac{5}{56}$

$E(\xi)=0\times\frac{9}{112}+1\times\frac{3}{7}+2\times\frac{45}{112}+3\times\frac{5}{56}=\frac{3}{2}$

【点睛】本题考查古典概型概率的计算,考查离散型随机变量的分布列和期望,属于中档题.

19.【答案】(1）不符合要求，原因见解析

（2）315

【分析】(1）根据公司要选择的函数模型所要满足的条件，逐一分析，即可得出结论；

（2）根据奖金y（单位：万元）随年产值x（单位：万元）的增加而增加，且奖金不低于 7 万元，同时奖金不超过年产值的15%，确定a的范围，即可确定最小的正整数a的值.

【小问 1 详解】

解：对于函数模型 $y=\lg x+kx+5$（k 为常数），

$x=100$时，$y=9$，代入解得$k=\frac{1}{50}$，

所以 $y=\lg x+\frac{x}{50}+5$.

当 $x\in[50，500]$时，$y=\lg x+\frac{x}{50}+5$ 是增函数，但 $x=50$ 时，$f(50)=\lg 50+6>7.5$，即奖金不超过年产值的15% 不成立，故该函数模型不符合要求；

【小问 2 详解】

解：对于函数模型 $f(x)=\frac{15x-a}{x+8}=15-\frac{120+a}{x+8}$，

a为正整数，函数在$[50，500]$递增；$f(x)_{min}=f(50)\geqslant 7$，解得$a\leqslant 344$，

要使 $f(x)\leqslant 0.15x$ 对 $x\in[50，500]$恒成立，即 $a\geqslant -0.15x^2+13.8x$ 对 $x\in[50，500]$恒成立，

所以 $a\geqslant 315$，

综上所述，$315\leqslant a\leqslant 344$，

所以满足条件的最小的正整数a的值为 315.

20.【答案】(1）$x+y+1=0$；（2）答案不唯一，具体见解析；（3）$(-\infty,-4\ln 2-4)$.

【分析】

（1）求 $f(x)$ 在 $x=1$ 处的导数和函数值，代入直线方程即可求出切线方程；

（2）求 $f(x)$ 的导函数 $f'(x)$，分 $a\leq 0$，$0<a<2$，$a=2$，$a>2$ 分类讨论求 $f'(x)>0$ 和 $f'(x)<0$ 的解集，从而求出函数 $f(x)$ 的单调区间；

（3）由第（2）问的结果，分别讨论函数 $f(x)$ 的情况，求出a的取值范围.

【详解】解：(1）当 $a=0$ 时，$f(x)=\ln x-2x$，$f'(x)=\frac{1}{x}-2$，所以 $f(1)=-2$，$f'(1)=-1$.

所以曲线在点 $(1, f(1))$ 处的切线方程为 $y+2=-(x-1)$，即 $x+y+1=0$.

（2）因为 $f(x)=\ln x-(a+2)x+ax^2$，定义域为 $(0,+\infty)$，

所以 $f'(x)=\frac{1}{x}-(a+2)+2ax=\frac{2ax^2-(a+2)x+1}{x}=\frac{(2x-1)(ax-1)}{x}$.

①当 $a\le 0$ 时，$f(x)$ 与 $f'(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上的变化情况如下：

x	$(0,\frac{1}{2})$	$\frac{1}{2}$	$(\frac{1}{2},+\infty)$
$f'(x)$	+	0	−
$f(x)$	↗	最大值 $f(\frac{1}{2})=-\ln 2-1-\frac{a}{4}$	↘

所以 $f(x)$ 在 $(0,\frac{1}{2})$ 内单调递增，在 $(\frac{1}{2},+\infty)$ 内单调递减.

②当 $0<a<2$ 时，$f(x)$ 与 $f'(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上的变化情况如下：

x	$(0,\frac{1}{2})$	$\frac{1}{2}$	$(\frac{1}{2},\frac{1}{a})$	$\frac{1}{a}$	$(\frac{1}{a},+\infty)$
$f'(x)$	+	0	−	0	+
$f(x)$	↗	极大值 $f(\frac{1}{2})=-\ln 2-1-\frac{a}{4}$	↘	极小值 $f(\frac{1}{a})=-\ln a-1-\frac{1}{a}$	↗

所以 $f(x)$ 在 $(0,\frac{1}{2})$，$(\frac{1}{a},+\infty)$ 内单调递增，在 $(\frac{1}{2},\frac{1}{a})$ 内单调递减.

③当 $a=2$ 时，$f'(x)\ge 0$，所以 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增.

④当 $a>2$ 时，$f(x)$ 与 $f'(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上的变化情况如下：

x	$(0,\frac{1}{a})$	$\frac{1}{a}$	$(\frac{1}{a},\frac{1}{2})$	$\frac{1}{2}$	$(\frac{1}{2},+\infty)$
$f'(x)$	+	0	−	0	+
$f(x)$	↗	极大值 $f(\frac{1}{a})=-\ln a-1-\frac{1}{a}$	↘	极小值 $f(\frac{1}{2})=-\ln 2-1-\frac{a}{4}$	↗

所以 $f(x)$ 在 $(0,\frac{1}{a})$，$(\frac{1}{2},+\infty)$ 内单调递增，在 $(\frac{1}{a},\frac{1}{2})$ 内单调递减.

（3）由（2）可知：

①当 $a \le 0$ 时，$f(x)$ 在 $(0,\dfrac{1}{2})$ 内单调递增，在 $(\dfrac{1}{2},+\infty)$ 内单调递减，

当 $x=\dfrac{1}{2}$ 时，$f(x)$ 取得最大值 $f(\dfrac{1}{2})=-\ln 2-1-\dfrac{a}{4}$.

（i）当 $-4\ln 2-4\le a\le 0$ 时，$f(\dfrac{1}{2})\le 0$，

所以 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上至多有一个零点，不符合题意.

（ii）当 $a<-4\ln 2-4$ 时，$f(\dfrac{1}{2})>0$.

因为 $f(\dfrac{1}{2})>0$，$f(1)=-2<0$，$f(x)$ 在 $(\dfrac{1}{2},+\infty)$ 内单调递减，

所以 $f(x)$ 在 $(\dfrac{1}{2},+\infty)$ 内有唯一零点.

因为 $a<-4\ln 2-4<-\mathrm{e}$，

所以 $-a>\mathrm{e}$ 且 $0<-\dfrac{1}{a}<\dfrac{1}{4\ln 2+4}<\dfrac{1}{2}$.

因为 $f(-\dfrac{1}{a})=-\ln(-a)+1+\dfrac{3}{a}<1-\ln(-a)<1-\ln \mathrm{e}=0$，$f(\dfrac{1}{2})>0$，

且 $f(x)$ 在 $(0,\dfrac{1}{2})$ 内单调递增，所以 $f(x)$ 在 $(0,\dfrac{1}{2})$ 内有唯一零点.

所以当 $a<-4\ln 2-4$ 时，$f(x)$ 恰有两个零点.

②当 $0<a<2$ 时，$f(x)$ 在 $(0,\dfrac{1}{2})$，$(\dfrac{1}{a},+\infty)$ 内单调递增，在 $(\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{a})$ 内单调递减，

因为当 $x=\dfrac{1}{2}$ 时，$f(x)$ 取得极大值 $f(\dfrac{1}{2})=-\ln 2-1-\dfrac{a}{4}<0$，

所以 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上至多有一个零点，不符合题意.

③当 $a=2$ 时，$f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，

所以 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上至多有一个零点，不符合题意.

④当 $a>2$ 时，$f(x)$ 在 $(0,\dfrac{1}{a})$，$(\dfrac{1}{2},+\infty)$ 内单调递增，在 $(\dfrac{1}{a},\dfrac{1}{2})$ 内单调递减.

因为当 $x=\dfrac{1}{a}$ 时，$f(x)$ 取得极大值 $f(\dfrac{1}{a})=-\ln a-1-\dfrac{1}{a}<0$，

所以 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上至多有一个零点，不符合题意.

综上所述，实数 a 的取值范围是 $(-\infty,-4\ln 2-4)$.

【点睛】方法点睛：导函数中常用的两种常用的转化方法：一是利用导数研究含参函数的单调性，常化为不等式恒成立问题．注意分类讨论与数形结合思想的应用；二是函数的零点、不等式证明常转化为函数的单调性、极(最)值问题处理.

21.【答案】(1) 是，理由见解析

(2) 63

(3) 证明见解析

【分析】(1) 计算 $a_{n+2}-a_{n+1}=2^{n+1}$，$a_{n+1}-a_n=2^n$，$2^{n+1}>2^n$，得到答案.

(2) 根据题意得到 $2023\geq\frac{k(k+1)}{2}$，$k\in Z$，计算当 $k=64$ 时，$\frac{k(k+1)}{2}=2080$，当 $k=65$ 时，$\frac{k(k+1)}{2}=2145$，得到答案.

(3) 证明 $b_{2k-m+1}+b_m>b_k+b_{k+1}$，得到 $k>k(b_k+b_{k+1})$，得到 $b_k+b_{k+1}<1$，代入计算得到证明.

【小问 1 详解】

因为 $a_n=2^n$，则 $a_{n+2}-a_{n+1}=2^{n+2}-2^{n+1}=2^{n+1}$，$a_{n+1}-a_n=2^{n+1}-2^n=2^n$，

又 $2^{n+1}>2^n$，故 $a_{n+2}-a_{n+1}>a_{n+1}-a_n$，数列 $\{2^n\}$ 是"速增数列".

【小问 2 详解】

$a_1=1, a_2=3, a_k=2023$，

当 $k\geq 2$ 时，$a_k=2023=(a_k-a_{k-1})+(a_{k-1}-a_{k-2})+\cdots+(a_2-a_1)+a_1\geq 1+2+3+\cdots+k-1+k$，

即 $2023\geq\frac{k(k+1)}{2}$，$k\in Z$，

当 $k=63$ 时，$\frac{k(k+1)}{2}=2016$，当 $k=64$ 时，$\frac{k(k+1)}{2}=2080$，

故正整数 k 的最大值为 63.

【小问 3 详解】

$b_{k+2}-b_{k+1}>b_{k+1}-b_k>b_k-b_{k-1}$，故 $b_{k+2}-b_{k+1}>b_k-b_{k-1}$，即 $b_{k+2}+b_{k-1}>b_k+b_{k+1}$；

$b_{k+3}-b_{k+2}>b_{k+2}-b_{k+1}>b_{k+1}-b_k>b_k-b_{k-1}>b_{k-1}-b_{k-2}$，故 $b_{k+3}-b_{k+2}>b_{k-1}-b_{k-2}$，

即 $b_{k+3}+b_{k-2}>b_{k-1}+b_{k+2}>b_k+b_{k+1}$，

同理可得：$b_{2k-m+1}+b_m>b_k+b_{k+1}$，$m\in N^*$，$1\leq m\leq k-1$，

故 $k=b_1+b_2+\cdots+b_{2k}=(b_1+b_{2k})+(b_2+b_{2k-1})+\cdots+(b_k+b_{k+1})>k(b_k+b_{k+1})$，

故 $b_k+b_{k+1}<1$，$c_kc_{k+1}=2^{b_k}\times 2^{b_{k+1}}=2^{b_k+b_{k+1}}<2$，得证.

【点睛】关键点睛：本题考查了数列的新定义问题，意在考查学生的计算能力，转化能力和综合应用能力，其中根据题意利用累加法的思想确定 $b_{2k-m+1}+b_m>b_k+b_{k+1}$ 是解题的关键.