2021 年全国高中数学联赛广西赛区预赛试题

参考答案

一、 填空题（本大题共 8 小题，每小题 10 分，共 80 分.）

1. 集合 $M=\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ 的所有子集的元素的和等于__▲__.

答案：672. 提示：所有子集的元素的和为 $2^5(1+2+3+4+5+6)=672$.

2. 已知 $xy+yz+zx=1$，其中 x、y、z 均为正数，则 $\sqrt{3xy+1}+\sqrt{3yz+1}+\sqrt{3zx+1}$ 的整数部分为__▲__.

答案：4. 提示：取 $x=y=z=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ 易得结果，一般的证明可考虑使用幂平均不等式.

3. 某学校在不同时段开设了三门选修课，要求每位学生至少选择其中一门，则 A、B、C 三位学生可能的选法有__▲__种.

答案：343. 提示：每个同学有 7 种不同的选法，由乘法原理选法总数为 $7^3=343$.

4. 设 k 为方程 $|x|^{\frac{1}{4}}+|x|^{\frac{1}{2}}-\cos x=0$ 的实根的个数，则 $k=$__▲__.

答案：2. 提示：令 $f(x)=|x|^{\frac{1}{4}}+|x|^{\frac{1}{2}}-\cos x$，则 $f(0)=-1$. 当 $x\ge 1$时，$f(x)\ge 1$. $f(x)$ 在 $[0,1]$ 单调，$f(0)f(1)<0$. 故 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 内有唯一实根，从而 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 内有唯一实根. 于是，由 $f(x)$ 为偶函数可得原方程有且只有 2 个实根.

5. 设 n 为正整数，函数 $f_n(x)=\dfrac{n+x+\dfrac{1}{n+x}}{n+1}$，$x\in(0,1)$ 的值域为 I_n，$I=\bigcup_{n=1}^{\infty}I_n$，则 $I=$__▲__.

答案：$(\dfrac{5}{6},\dfrac{5}{4})$. 提示：$f_n(x)$ 单调递增，$f_n(0)<f_n(x)<f_n(1)$，$I_n=(f_n(0),f_n(1))$，$n\in\mathbf{N}_+$. $f_n(0)\ge f_2(0)=\dfrac{5}{6}$，$f_n(1)\le f_1(1)=\dfrac{5}{4}$. 因此 $I=(\dfrac{5}{6},\dfrac{5}{4})$.

6. 已知 $\vec{m}$ 为非零向量，$\vec{n}$ 为单位向量，$\vec{m}\ne\vec{n}$，$\vec{m}$ 与 $\vec{m}-\vec{n}$ 的夹角为 60°，$|\vec{m}|\in(0,a]$，则 a 的最小值为__▲__.

答案：$\dfrac{2}{\sqrt{3}}$. 提示：在 $\triangle ABC$ 中设 $\overrightarrow{CA}=\vec{m}$，$\overrightarrow{CB}=\vec{m}-\vec{n}$，则 $\overrightarrow{BA}=\vec{n}$. 设 AD 为 $\triangle ABC$ 的外接圆的直径. 则 $|\overrightarrow{AD}|=\dfrac{2}{\sqrt{3}}$，$|\vec{m}|=|\overrightarrow{CA}|\le|\overrightarrow{AD}|=\dfrac{2}{\sqrt{3}}$（当 AC 为外接圆的直径时取等号）.

7. 设 $\sin\alpha+\sin\beta=\frac{4}{5}\sqrt{2}$，$\cos\alpha+\cos\beta=\frac{4}{5}\sqrt{3}$，则 $\tan\alpha+\tan\beta=$___▲___.

答案：$\sqrt{6}$．提示：$\tan\frac{\alpha+\beta}{2}=\frac{\sin\alpha+\sin\beta}{\cos\alpha+\cos\beta}=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$，$\cos(\alpha-\beta)=\frac{3}{5}$．故

$$\tan\alpha+\tan\beta=\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos\alpha\cos\beta}=\frac{2\sin(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha-\beta)+\cos(\alpha+\beta)}=\sqrt{6}.$$

8. 设点 P 在椭圆 $\frac{x^2}{5}+y^2=1$ 上，F_1、F_2 是该椭圆的两个焦点，若 $\triangle F_1PF_2$ 的面积为 $\frac{\sqrt{3}}{3}$，则 $\angle F_1PF_2=$___▲___.

答案：$\frac{\pi}{3}$．提示：设 $\angle F_1PF_2=\theta$，$PF_1=m$，$PF_2=n$，则 $\begin{cases} m+n=2\sqrt{5} \\ \frac{1}{2}mn\sin\theta=\frac{\sqrt{3}}{3} \\ m^2+n^2-2mn\cos\theta=16 \end{cases}$，解得 $\theta=\frac{\pi}{3}$.

二、 解答题（本大题共 4 小题，共 70 分．解答应写出文字说明、 证明过程或演算步骤．）

9. （本小题满分 15 分） 已知 m，n 都是正整数，其中 n 是奇数，求 2^m+1 与 2^n-1 的最大公约数.

解： $\left(2^{mn}-1,2^{mn}+1\right)=\left(-2,2^{mn}+1\right)=1$．……………………5 分

又由于 $2^m+1\,|\,2^{mn}+1$ 和 $2^n-1\,|\,2^{mn}-1$．……………………10 分

所以 $\left(2^m+1,2^n-1\right)=1$．……………………15 分

10. （本小题满分 15 分） 设 $f(x)$ 在区间 I 上有定义．对任意的 x_1，$x_2\in I$，$t(0\le t\le 1)$．不等式 $f((1-t)x_1+tx_2)\le(1-t)f(x_1)+tf(x_2)$ 总成立．设 $n\ge 2$，$1\le i\le n$，$x_i\in I$，$p_i\ge 0$ 且 $\sum\limits_{i=1}^{n}p_i=1$．证明 $f(\sum\limits_{i=1}^{n}p_ix_i)\le\sum\limits_{i=1}^{n}p_if(x_i)$.

证明：（1）当 $n=2$ 时，$p_1+p_2=1$．令 $p_2=t$，由题设条件可得命题成立.

（2）假设当 $n=k$ 时命题成立．则当 $n=k+1$ 时，对于 $x_i\in I(1\le i\le k+1)$ 和满足 $\sum\limits_{i=1}^{k+1}p_i=1$ 的

非负实数 $p_i(1\le i\le k+1)$，令 $\alpha=\sum\limits_{i=1}^{k}p_i$，$\beta=1-\alpha=p_{k+1}$.

（2.1）若 $\alpha=0$，即 $p_1=p_2=\cdots=p_k=0$，$\beta=p_{k+1}=1$，则

$$f(\sum_{i=1}^{k+1}p_ix_i)=f(p_{k+1}x_{k+1})=p_{k+1}f(x_{k+1})=\sum_{i=1}^{k+1}p_if(x_i).\ \cdots\cdots\cdots\cdots 5\text{ 分}$$

（2.2）若 $\alpha>0$，记 $m=\min\{x_1,x_2,\cdots,x_k\}$，$M=\max\{x_1,x_2,\cdots,x_k\}$，$\overline{x}=\dfrac{1}{\alpha}\sum\limits_{i=1}^{k}p_ix_i$，则

$m,\ M\in I$，且 $m=m\dfrac{1}{\alpha}\sum\limits_{i=1}^{k}p_i\le\dfrac{1}{\alpha}\sum\limits_{i=1}^{k}p_ix_i\le M\dfrac{1}{\alpha}\sum\limits_{i=1}^{k}p_i=M$．因此，$m\le\overline{x}\le M$，$\overline{x}\in I$.

因为 $\alpha+\beta=1$，所以 $f(\alpha\overline{x}+\beta x_{k+1})\le\alpha f(\overline{x})+\beta f(x_{k+1})$．即

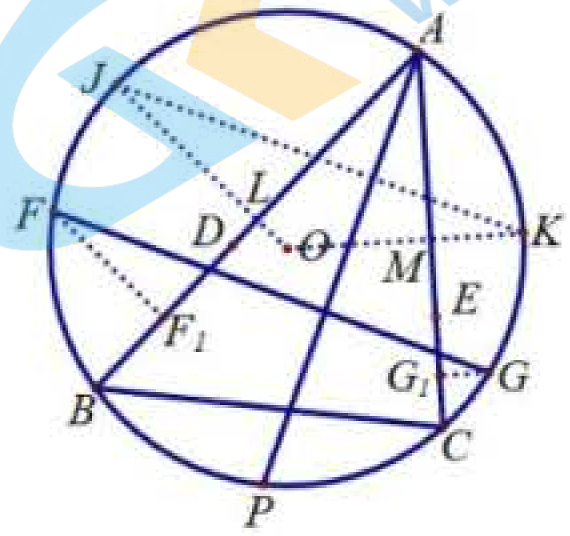
$$f(\sum_{i=1}^{k+1}p_ix_i)\le\alpha f(\frac{1}{\alpha}\sum_{i=1}^{k}p_ix_i)+p_{k+1}f(x_{k+1}).\ \cdots\cdots\cdots\cdots 10\text{ 分}$$

$\sum\limits_{i=1}^{k}\dfrac{p_i}{\alpha}=\dfrac{1}{\alpha}\sum\limits_{i=1}^{k}p_i=1$，由归纳假设有 $f(\sum\limits_{i=1}^{k}\dfrac{p_i}{\alpha}x_i)\le\sum\limits_{i=1}^{k}\dfrac{p_i}{\alpha}f(x_i)$，从而 $\alpha f(\dfrac{1}{\alpha}\sum\limits_{i=1}^{k}p_ix_i)\le\sum\limits_{i=1}^{k}p_if(x_i)$.

于是，$f(\sum\limits_{i=1}^{k+1}p_ix_i)\le\sum\limits_{i=1}^{k+1}p_if(x_i)$．因此，当 $n=k+1$ 时命题也成立. $\cdots\cdots\cdots\cdots$ 15 分

综上所述，命题成立.

11．（本小题满分 20 分）如图，设点 D、E 分别为圆 O 的内接三角形 $\triangle ABC$ 的边 AB、AC 上的点，且 $AD=AE$．线段 BD、CE 的垂直平分线分别交圆 O 的劣弧 $\overset{\frown}{AB}$、$\overset{\frown}{AC}$ 于点 F、G，点 P 为劣弧 $\overset{\frown}{BC}$ 的中点．求证：$AP\perp FG$.



证明：如图，作 OL、OM 分别垂直 AB、AC 交圆 O 于点 J、K，连接 JK，则点 J、K 分别为劣弧 $\overset{\frown}{AB}$ 和劣弧 $\overset{\frown}{AC}$ 弧的中点.

因为 $\dfrac{1}{2}\overset{\frown}{AK}+\dfrac{1}{2}\overset{\frown}{PBJ}=\dfrac{\pi}{2}$，所以 $AP\perp JK$. $\cdots\cdots\cdots\cdots$ 5 分

下面证明 $FG//JK$.

取 BD、CE 的中点 F_1、G_1，易知 FF_1、GG_1 分别垂直 AB、AC，故 FF_1、GG_1 分别平行于 OJ、OK. $\cdots\cdots\cdots\cdots$ 10 分

因为 $F_1L=\frac{1}{2}(AB-BD)=\frac{1}{2}AD$，$G_1M=\frac{1}{2}(AC-CE)=\frac{1}{2}AE$，所以 $F_1L=G_1M$.……15 分

FF_1 到过圆心 O 的线段 OJ 的距离与 GG_1 到过圆心 O 的线段 OK 的距离相等，故 $\overset{\frown}{FJ}$ 等于 $\overset{\frown}{GK}$，从而 $FG//JK$．于是由 $AP\perp JK$，$FG//JK$ 可得 $AP\perp FG$.……………………20 分

12. （本小题满分 20 分）某校 n 名同学通过选拔进入学校的数学讨论班，在一次讨论班上他们讨论 A、B 和 C 三个问题．已知每位同学都和班里的其他所有同学讨论了其中的一个问题，每两位同学只讨论一个问题．若至少有 3 名同学互相之间讨论的是同一个问题，求 n 的最小值，并给出证明．

解： n 的最小值为 17．

设所求的最小值为 m．(1) 先考虑 $n=17$ 的情形．将 17 名同学表示为 a_1，a_2，...，a_{17}．因为 $\frac{16}{3}>5$，根据抽屉原理知 a_1 与其他 16 名同学中至少有 6 人讨论的是同一个问题，不妨设 a_1 与 a_2，...，a_7 讨论的是问题 A．若这 6 人中有 2 个人（不妨是 a_2 和 a_3）讨论的是问题 A，则 a_1、a_2 和 a_3 这 3 名同学互相之间讨论的是问题 A．否则，问题转化为这 6 名同学之间只讨论问题 B 或 C 的情形．下面证明至少有 3 名同学互相讨论的是同一个问题．………………5 分

因为 $\frac{5}{2}>2$，根据抽屉原理知 a_2 与其他 5 名同学中至少有 3 人（不妨是 a_3、a_4 和 a_5）讨论的是同一个问题，不妨设所讨论的是问题 B．若这 3 人中有 2 人（不妨是 a_3 和 a_4）讨论的是问题 B，则 a_2、a_3 和 a_4 这 3 名同学互相之间讨论的是问题 B．否则 a_3、a_4 和 a_5 讨论的是问题 C．因此，$m\le 17$．……………………………………………………………10 分

（2）当 $n=16$ 时，考虑二进制下的集合 $G=\{0000,0001,\cdots,1111\}$，集合中每一个数表示一名同学．对集合中的元素施以“按位加”（+）运算，即不考虑进位，同位相同则为 0，同位相异则 1．如 $1010+1100=0110$．设

$$V_1=\{1100,0011,1001,1110,1000\},$$

$$V_2=\{1010,0101,0110,1101,0100\},$$

$$V_3=\{0001,0010,0111,1011,1111\}.$$

若 x，$y\in G$，易知 $x+y\in G$．用 $x+y\in V_i(i=1,2,3)$ 表示同学 x 和同学 y 讨论第 i 个问题；

用 $x \in V_i (i=1,2,3)$ 表示同学 0000 与同学 x 讨论第 i 个问题.

按照上述规定，没有 3 位同学互相之间讨论同一个问题. 因此 $m \geq 17$.

综上所述，$m=17$，即 n 的最小值为 17. ……………………………………………………………………………………20

关于我们

北京高考在线创办于 2014 年，隶属于北京太星网络科技有限公司，是北京地区极具影响力的中学升学服务平台。主营业务涵盖：北京新高考、高中生涯规划、志愿填报、强基计划、综合评价招生和学科竞赛等。

北京高考在线旗下拥有网站门户、微信公众平台等全媒体矩阵生态平台。平台活跃用户 40W+，网站年度流量数千万量级。用户群体立足于北京，辐射全国 31 省市。

北京高考在线平台一直秉承 " 精益求精、专业严谨 " 的建设理念，不断探索“K12 教育+互联网+大数据”的运营模式，尝试基于大数据理论为广大中学和家长提供新鲜的高考资讯、专业的高考政策解读、科学的升学规划等，为广大高校、中学和教科研单位提供“衔接和桥梁纽带”作用。

平台自创办以来，为众多重点大学发现和推荐优秀生源，和北京近百所中学达成合作关系，累计举办线上线下升学公益讲座数百场，帮助数十万考生顺利通过考入理想大学，在家长、考生、中学和社会各界具有广泛的口碑影响力

未来，北京高考在线平台将立足于北京新高考改革，基于对北京高考政策研究及北京高校资源优势，更好的服务全国高中家长和学生。