2020 年清华大学丘成桐数学英才班招生考试数学试题

1. 证明：$\dfrac{2019!}{(x+1)(x+2)\cdots(x+2019)}$ 可以分解成

$$\frac{A_1}{x+1}+\frac{A_2}{x+2}+\cdots+\frac{A_{2019}}{x+2019}$$

的形式，其中 $A_1,A_2,\cdots,A_{2019}$ 都是整数

2. 已知整系数多项式 $P(x)$，整数 $a_1,\cdots,a_{2019}$ 满足 $P(a_1)=a_2$，$P(a_2)=a_3$，$\cdots$，$P(a_{2018})=a_{2019}$，$P(a_{2019})=a_1$，求证：$a_1=a_2=\cdots=a_{2019}$

3. 定义“数独矩阵”为 4×4 的矩阵，它的每行，每列，每宫都是 $1,2,3,4$ 的某种排列（其中宫是指横竖线分开形成的四个部分），若矩阵 T 满足：对于任何数独矩阵 A 都有 TA 也是一个数独矩阵，则称 T 是“好的”，构造尽量多的好矩阵，并说明理由

4. 定义两个数列 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$ 满足

$$a_n=\int_{2019}^{2019+n}\frac{1}{x\ln x}dx,\quad b_n=\int_{2019}^{2019+n}\frac{\sin x}{x\ln x}dx$$

请问 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$ 是否存在极限，证明你的结论

5. 设$a>b>0$，定义

$$\Gamma=\left\{(x,y)\left|\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\right.\right\}$$

求证：不存在第一象限$(x>0,y>0)$里Γ上四个点使得这四点共圆

6. 证明：在任意7个无理数中都可以选出其中4个使得它们两两加起来还是无理数

7. 请问：四根柱子六个盘子的汉诺塔最少要移动几步？

8. 若λ_1，$\cdots$，λ_{2019}是一列互不相等的实数，$c_1,\cdots,c_{2019}$也是一列实数，满足

$$\lim_{x\to+\infty}\sum_{j=1}^{2019}c_j\mathrm{e}^{i\lambda_j x}=0$$

求证：$c_1=c_2=\cdots c_{2019}=0$

关于我们

北京高考在线创办于 2014 年，隶属于北京太星网络科技有限公司，是北京地区极具影响力的中学升学服务平台。主营业务涵盖：北京新高考、高中生涯规划、志愿填报、强基计划、综合评价招生和学科竞赛等。

北京高考在线旗下拥有网站门户、微信公众平台等全媒体矩阵生态平台。平台活跃用户 40W+，网站年度流量数千万量级。用户群体立足于北京，辐射全国 31 省市。

北京高考在线平台一直秉承 “精益求精、专业严谨 ” 的建设理念，不断探索“K12 教育+互联网+大数据”的运营模式，尝试基于大数据理论为广大中学和家长提供新鲜的高考资讯、专业的高考政策解读、科学的升学规划等，为广大高校、中学和教科研单位提供“衔接和桥梁纽带”作用。

平台自创办以来，为众多重点大学发现和推荐优秀生源，和北京近百所中学达成合作关系，累计举办线上线下升学公益讲座数百场，帮助数十万考生顺利通过考入理想大学，在家长、考生、中学和社会各界具有广泛的口碑影响力

未来，北京高考在线平台将立足于北京新高考改革，基于对北京高考政策研究及北京高校资源优势，更好的服务全国高中家长和学生。

微信搜一搜
北京高考资讯