2021 年普通高等学校招生全国统一考试
理科数学甲卷

本试卷 5 页，23 题（含选考题）。全卷满分 150 分。考试用时 120 分钟。

注意事项：

1. 答题前，先将自己的姓名、准考证号填写在试卷和答题卡上，并将准考证号条形码粘贴在答题卡上的指定位置。

2. 选择题的作答：每小题选出答案后，用 2B 铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑，写在试卷、草稿纸和答题卡上的非答题区域均无效。

3. 非选择题的作答：用黑色签字笔直接答在答题卡上对应的答题区域内，写在试卷、草稿纸和答题卡上的非答题区域均无效。

4. 选考题的作答：先把所选题目的题号在答题卡上指定的位置用 2B 铅笔涂黑，答案写在答题卡上对应的答题区域内，写在试卷、草稿纸和答题卡上的非答题区域均无效。

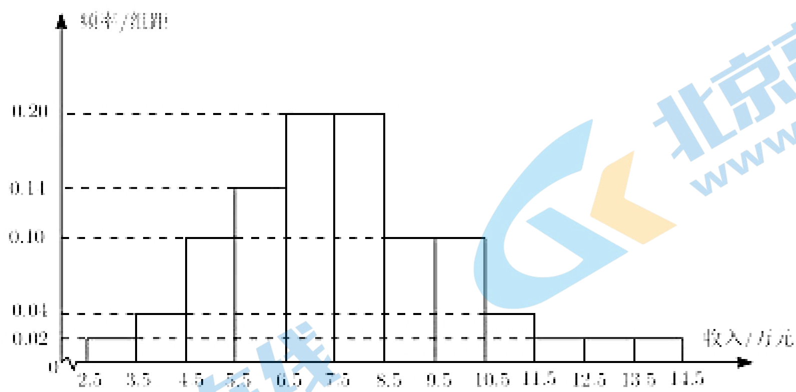
5. 考试结束后，请将本试卷和答题卡一并上交。

一、选择题：本题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分，在每小题给出的四个选项中，只有一项符合题目要求。

1. 设集合 $M=\{x|0<x<4\}$，$N=\{x|\frac{1}{3}\leqslant x\leqslant 5\}$，则 $M\cap N=$（　）．

A：$\{x|0<x\leqslant\frac{1}{3}\}$　　B：$\{x|\frac{1}{3}\leqslant x<4\}$　　C：$\{x|4\leqslant x<5\}$　　D：$\{x|0<x\leqslant 5\}$

2. 为了解某地农村经济情况，对该地农户家庭年收入进行抽样调查，将农户家庭年收入的调查数据整理得到如下频率分布直方图：



根据此频率分布直方图，下面结论中不正确的是（　）．

A：该地农户家庭年收入低于 4.5 万元的农户比率估计为 6%

B：该地农户家庭年收入不低于 10.5 万元的农户比率估计为 10%

C：估计该地农户家庭年收入的平均值不超过 6.5 万元

D：估计该地有一半以上的农户，其家庭年收入介于 4.5 万元至 8.5 万元之间．

3. 已知 $(1-\mathrm{i})^2z=3+2\mathrm{i}$，则 $z=$（　）．

A：$-1-\frac{3}{2}\mathrm{i}$　　B：$-1+\frac{3}{2}\mathrm{i}$　　C：$-\frac{3}{2}+\mathrm{i}$　　D：$-\frac{3}{2}-\mathrm{i}$

4. 青少年视力是社会普遍关注的问题，视力情况可借助视力表测量．通常用五分记录法和小数记录法记录视力数据，五分记录法的数据 L 和小数记录法的数据 V 满足 $L=5+\lg V$．已知某同学视力的五分记录法的数据为 4.9，则其视力的小数记录法的数据约为（ $\sqrt[10]{10}\approx 1.259$ ）（　）．

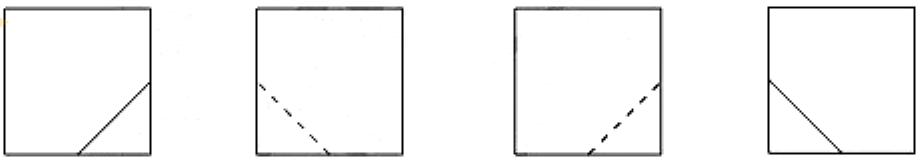
A：1.5　　B：1.2　　C：0.8　　D：0.6

5. 已知 F_1, F_2 是双曲线 C 的两个焦点，P 为 C 上一点，且 $\angle F_1PF_2=60^\circ$，$|PF_1|=3|PF_2|$，则 C 的离心率为（　）．

A：$\frac{\sqrt{7}}{2}$　　B：$\frac{\sqrt{13}}{2}$　　C：$\sqrt{7}$　　D：$\sqrt{13}$

6. 在一个正方体中，过顶点 A 的三条棱的中点分别为 E, F, G．该正方体截去三棱锥 $A-EFG$ 后，所得多面体的三视图中，正视图如图所示，则相应的侧视图是（　）．

题图（正视图）



A　　B　　C　　D

7. 等比数列 $\{a_n\}$ 的公比为 q，前 n 项和为 S_n，设甲：$q>0$，乙：$\{S_n\}$ 是递增数列，则（　）．

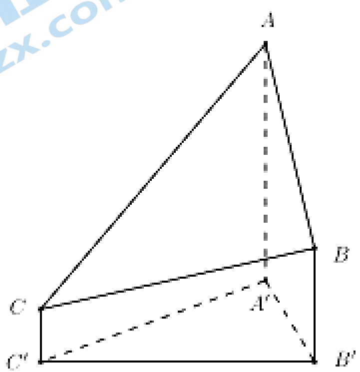
A：甲是乙的充分条件但不是必要条件

B：甲是乙的必要条件但不是充分条件

C：甲是乙的充要条件

D：甲既不是乙的充分条件也不是乙的必要条件

8. 2020 年 12 月 8 日，中国和尼泊尔联合公布珠穆朗玛峰最新高程为 8848.86（单位：m）．三角高程测量法是珠峰高程测量方法之一．如图是三角高程测量法的一个示意图，现有 A, B, C 三点，且 A, B, C 在同一水平面上的投影 A', B', C' 满足 $\angle A'C'B'=45^\circ$，$\angle A'B'C'=60^\circ$．由 C 点测得 B 点的仰角为 15°，BB' 与 CC' 的差为 100；由 B 点测得 A 点的仰角为 45°，则 A, C 两点到水平面 $A'B'C'$ 的高度差 $AA'-CC'$ 约为（ $\sqrt{3}\approx 1.732$ ）（　）．



A：346　　B：373　　C：446　　D：473

9. 若 $\alpha \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$，$\tan 2\alpha = \frac{\cos\alpha}{2-\sin\alpha}$，则 $\tan\alpha =$ (　).

A：$\frac{\sqrt{15}}{15}$　　B：$\frac{\sqrt{5}}{5}$　　C：$\frac{\sqrt{5}}{3}$　　D：$\frac{\sqrt{15}}{3}$

10. 将 4 个 1 和 2 个 0 随机排成一行，则 2 个 0 不相邻的概率为 (　).

A：$\frac{1}{3}$　　B：$\frac{2}{5}$　　C：$\frac{2}{3}$　　D：$\frac{4}{5}$

11. 已知 A, B, C 是半径为 1 的球 O 的球面上的三个点，且 $AC \perp BC$，$AC = BC = 1$，则三棱锥 $O-ABC$ 的体积为 (　).

A：$\frac{\sqrt{2}}{12}$　　B：$\frac{\sqrt{3}}{12}$　　C：$\frac{\sqrt{2}}{4}$　　D：$\frac{\sqrt{3}}{4}$

12. 设函数 $f(x)$ 的定义域为 $\mathbf{R}$，$f(x+1)$ 为奇函数，$f(x+2)$ 为偶函数，当 $x \in [1,2]$ 时，$f(x) = ax^2 + b$．若 $f(0) + f(3) = 6$，则 $f(\frac{9}{2}) =$ (　).

A：$-\frac{9}{4}$　　B：$-\frac{3}{2}$　　C：$\frac{7}{4}$　　D：$\frac{5}{2}$

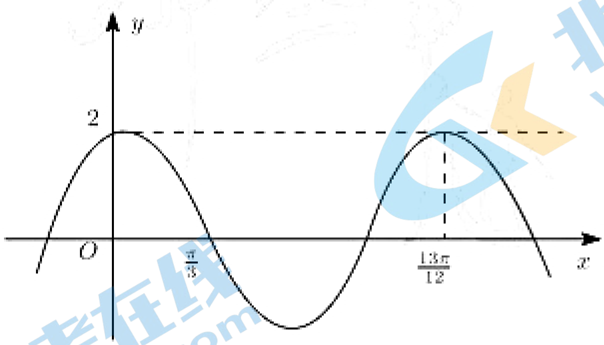
二、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分.

13. 曲线 $y = \frac{2x-1}{x+2}$ 在点 $(-1,-3)$ 处的切线方程为__________.

14. 已知向量 $\boldsymbol{a} = (3,1)$，$\boldsymbol{b} = (1,0)$，$\boldsymbol{c} = \boldsymbol{a} + k\boldsymbol{b}$．若 $\boldsymbol{a} \perp \boldsymbol{c}$，则 $k =$__________.

15. 已知 F_1, F_2 为椭圆 C：$\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{4} = 1$ 的两个焦点，P, Q 为 C 上关于坐标原点对称的两点，且 $|PQ| = |F_1F_2|$，则四边形 PF_1QF_2 的面积为__________.

16. 已知函数 $f(x) = 2\cos(\omega x + \varphi)$ 的部分图像如图所示，则满足条件 $(f(x) - f(-\frac{7\pi}{4}))(f(x) - f(\frac{4\pi}{3})) > 0$ 的最小正整数 x 为__________.



三、解答题：共 70 分．解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤．第 17~21 题为必考题，每个试题考生都必须作答．第 22、23 题为选考题，考生根据要求作答.

(一) 必考题：共 60 分.

17. (12 分)

甲、乙两台机床生产同种产品，产品按质量分为一级品和二级品，为了比较两台机床产品的质量，分别用两台机床各生产了 200 件产品，产品的质量情况统计如下表：

	一级品	二级品	合计
甲机床	150	50	200
乙机床	120	80	200
合计	270	130	400

(1) 甲机床、乙机床生产的产品中一级品的频率分别是多少？

(2) 能否有 99% 的把握认为甲机床的产品质量与乙机床的产品质量有差异？

附：$K^2=\dfrac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$，

$P(K^2 \geqslant k)$	0.050	0.010	0.001
k	3.841	6.635	10.828

18. (12 分)

已知数列 $\{a_n\}$ 的各项均为正数，记 S_n 为 $\{a_n\}$ 的前 n 项和，从下面①②③中选取两个作为条件，证明另外一个成立.

① 数列 $\{a_n\}$ 是等差数列；② 数列 $\{\sqrt{S_n}\}$ 是等差数列；③ $a_2=3a_1$.

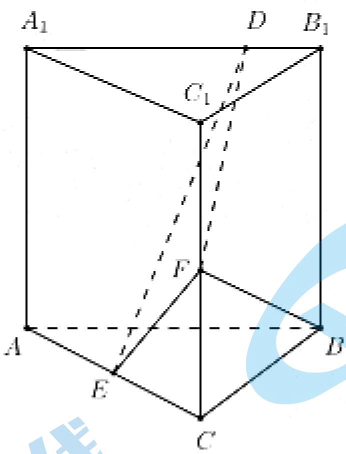
注：若选择不同的组合分别解答，则按第一个解答计分.

19. (12 分)

已知直三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中，侧面 AA_1B_1B 为正方形，$AB=BC=2$，E，F 分别为 AC 和 CC_1 的中点，D 为棱 A_1B_1 上的点，$BF\perp A_1B_1$.

(1) 证明：$BF\perp DE$；

(2) 当 B_1D 为何值时，面 BB_1C_1C 与面 DFE 所成的二面角的正弦值最小？



20. (12 分)

抛物线 C 的顶点为坐标原点 O，焦点在 x 轴上，直线 $l: x=1$ 交 C 于 P，Q 两点，且 $OP\perp OQ$. 已知点 $M(2,0)$，且 $\odot M$ 与 l 相切.

(1) 求 C，$\odot M$ 的方程；

(2) 设 A_1，A_2，A_3 是 C 上的三个点，直线 A_1A_2，A_1A_3 均与 $\odot M$ 相切，判断直线 A_2A_3 与 $\odot M$ 的位置关系，并说明理由.

21. (12 分)

已知 $a>0$ 且 $a\neq 1$，函数 $f(x)=\dfrac{x^a}{a^x}(x>0)$.

(1) 当 $a=2$ 时，求 $f(x)$ 的单调区间；

(2) 若曲线 $y=f(x)$ 与直线 $y=1$ 有且仅有两个交点，求 a 的取值范围.

(二) 选考题：共 10 分. 请考生在第 22、23 题中任选一题作答. 如果多做，则按所做的第一题计分.

22.【选修 4 – 4：坐标系与参数方程】(10 分)

在直角坐标系 xOy 中，以坐标原点为极点，x 轴正半轴为极轴建立极坐标系，曲线 C 的极坐标方程为 $\rho=2\sqrt{2}\cos\theta$.

(1) 将 C 的极坐标方程化为直角坐标方程;

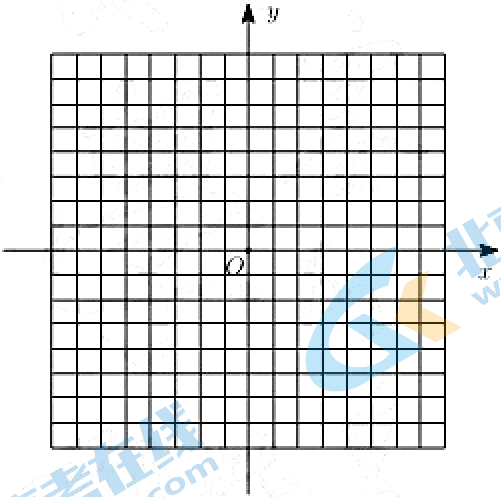
(2) 设点 A 的直角坐标为 $(1,0)$，M 为 C 上的动点，点 P 满足 $\overrightarrow{AP}=\sqrt{2}\overrightarrow{AM}$，写出 P 的轨迹 C_1 的参数方程，并判断 C 与 C_1 是否有公共点.

23.【选修 4 – 5：不等式选讲】(10 分)

已知函数 $f(x)=|x-2|$，$g(x)=|2x+3|-|2x-1|$.

(1) 画出 $y=f(x)$ 和 $y=g(x)$ 的图像;

(2) 若 $f(x+a)\geqslant g(x)$，求 a 的取值范围.



2021 年普通高等学校招生全国统一考试
理科数学甲卷 参考答案

本试卷 5 页，23 题（含选考题）．全卷满分 150 分．考试用时 120 分钟．

注意事项：

1. 答题前，先将自己的姓名、准考证号填写在试卷和答题卡上，并将准考证号条形码粘贴在答题卡上的指定位置．

2. 选择题的作答：每小题选出答案后，用 2B 铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑．写在试卷、草稿纸和答题卡上的非答题区域均无效．

3. 非选择题的作答：用黑色签字笔直接答在答题卡上对应的答题区域内．写在试卷、草稿纸和答题卡上的非答题区域均无效．

4. 选考题的作答：先把所选题目的题号在答题卡上指定的位置用 2B 铅笔涂黑．答案写在答题卡上对应的答题区域内．写在试卷、草稿纸和答题卡上的非答题区域均无效．

5. 考试结束后，请将本试卷和答题卡一并上交．

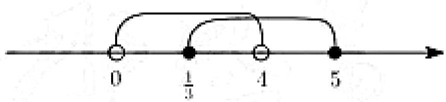
一、选择题：本题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分．在每小题给出的四个选项中，只有一项符合题目要求．

1. 设集合 $M=\{x|0<x<4\}$，$N=\{x|\frac{1}{3}\leqslant x\leqslant 5\}$，则 $M\cap N=$（　）．

A：$\{x|0<x\leqslant\frac{1}{3}\}$　　B：$\{x|\frac{1}{3}\leqslant x<4\}$　　C：$\{x|4\leqslant x<5\}$　　D：$\{x|0<x\leqslant 5\}$

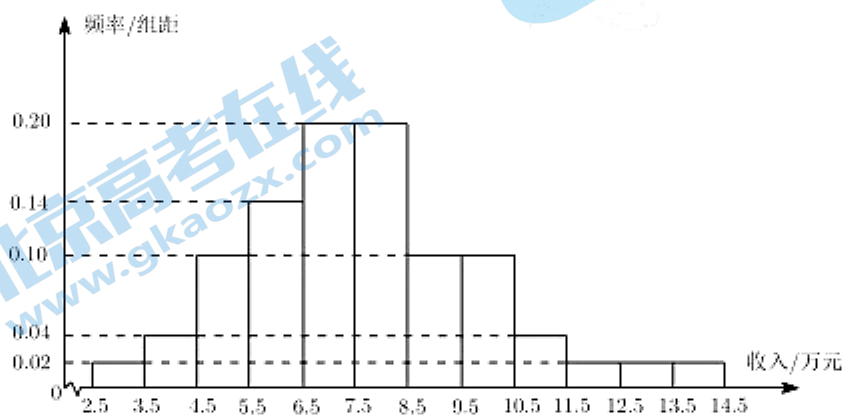
答案： B．

解析：



由图知，$M\cap N=\{x|\frac{1}{3}\leqslant x<4\}$．

2. 为了解某地农村经济情况，对该地农户家庭年收入进行抽样调查，将农户家庭年收入的调查数据整理得到如下频率分布直方图：



根据此频率分布直方图，下面结论中不正确的是（　）．

A： 该地农户家庭年收入低于 4.5 万元的农户比率估计为 6%

B： 该地农户家庭年收入不低于 10.5 万元的农户比率估计为 10%

C： 估计该地农户家庭年收入的平均值不超过 6.5 万元

D： 估计该地有一半以上的农户，其家庭年收入介于 4.5 万元至 8.5 万元之间.

答案：C.

解析：A. 低于 4.5 万元的比率估计为 $0.02\times1+0.04\times1=0.06=6\%$ 正确.

B. 不低于 10.5 万元的比率估计为 $(0.04+0.02\times3)\times1=0.1=10\%$ 正确.

C. 平均值为: $(3\times0.02+4\times0.04+5\times0.1+6\times0.14+7\times0.2+8\times0.2+9\times0.1+10\times0.1+11\times0.04+12\times0.02+13\times0.02+14\times0.02)\times1=7.68$ 万元. 不正确.

D. 4.5 万到 8.5 万的比率为: $0.1\times1+0.14\times1+0.2\times1+0.2\times1=0.64$. 正确.

3. 已知 $(1-\mathrm{i})^2z=3+2\mathrm{i}$, 则 $z=$ (　).

A： $-1-\frac{3}{2}\mathrm{i}$　　B： $-1+\frac{3}{2}\mathrm{i}$　　C： $-\frac{3}{2}+\mathrm{i}$　　D： $-\frac{3}{2}-\mathrm{i}$

答案：B.

解析：$z=\frac{3+2\mathrm{i}}{(1-\mathrm{i})^2}=\frac{3+2\mathrm{i}}{-2\mathrm{i}}=\frac{-2+3i}{2}=-1+\frac{3}{2}\mathrm{i}$, 选 B.

4. 青少年视力是社会普遍关注的问题, 视力情况可借助视力表测量. 通常用五分记录法和小数记录法记录视力数据, 五分记录法的数据 L 和小数记录法的数据 V 满足 $L=5+\lg V$. 已知某同学视力的五分记录法的数据为 4.9, 则其视力的小数记录法的数据约为 ($\sqrt[10]{10}\approx1.259$) (　).

A： 1.5　　B： 1.2　　C： 0.8　　D： 0.6

答案：C.

解析：代入 $L=5+\lg V$, 知 $\lg V=4.9-5=-0.1$, 故 $V=10^{-0.1}=\frac{1}{\sqrt[10]{10}}\approx0.8$, 选 C.

5. 已知 F_1, F_2 是双曲线 C 的两个焦点, P 为 C 上一点, 且 $\angle F_1PF_2=60^\circ$, $|PF_1|=3|PF_2|$, 则 C 的离心率为 (　).

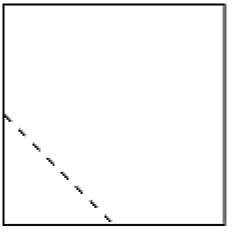
A： $\frac{\sqrt{7}}{2}$　　B： $\frac{\sqrt{13}}{2}$　　C： $\sqrt{7}$　　D： $\sqrt{13}$

答案：A.

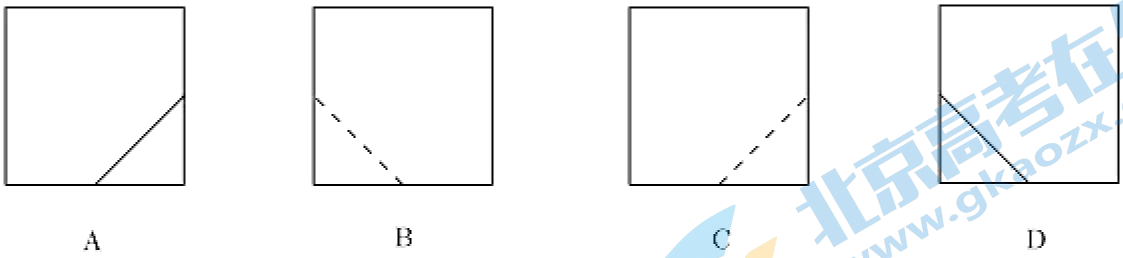
解析：记 $r_1=|PF_1|, r_2=|PF_2|$. 由 $r_1=3r_2$ 及 $r_1-r_2=2a$ 得 $r_1=3a, r_2=a$.

又由余弦定理知 $r_1^2+r_2^2-2r_1r_2\cdot\cos\angle F_1PF_2=4c^2$ 得 $7a^2=4c^2$, 从而 $e=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{7}}{2}$, 选 A.

6. 在一个正方体中, 过顶点 A 的三条棱的中点分别为 E, F, G. 该正方体截去三棱锥 $A-EFG$ 后, 所得多面体的三视图中, 正视图如图所示, 则相应的侧视图是 (　).

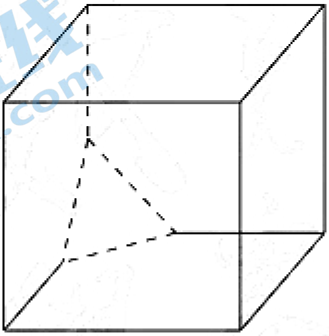


题图（正视图）



答案：D.

解析：由题可得直观图，如下图.



故选 D.

7. 等比数列 $\{a_n\}$ 的公比为 q，前 n 项和为 S_n. 设甲：$q>0$，乙：$\{S_n\}$ 是递增数列，则（　）.

A：甲是乙的充分条件但不是必要条件

B：甲是乙的必要条件但不是充分条件

C：甲是乙的充要条件

D：甲既不是乙的充分条件也不是乙的必要条件

答案：B.

解析：若 $q=1$，则 $S_n=na_1$.

① $a_1>0$，则 $\{S_n\}$ 单调递增；

② $a_1<0$，则 $\{S_n\}$ 单调递减.

$\therefore$ 甲 $\nRightarrow$ 乙

又若 $\{S_n\}$ 单调递增，则 $S_{n+1}>S_n$ 恒成立，

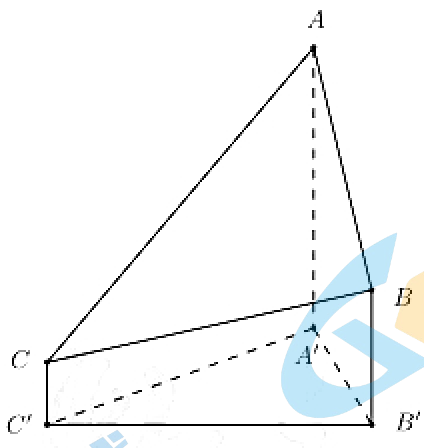
$\therefore a_{n+1}>0 \Rightarrow a_1q^n>0$ 恒成立.

$\therefore a_1>0, q>0$.

$\therefore$ 甲 $\Leftarrow$ 乙.

综上：甲 $\Leftarrow$ 乙，选 B.

8. 2020 年 12 月 8 日，中国和尼泊尔联合公布珠穆朗玛峰最新高程为 8848.86（单位：m），三角高程测量法是珠峰高程测量方法之一. 如图是三角高程测量法的一个示意图，现有 A,B,C 三点，且 A,B,C 在同一水平面上的投影 A',B',C' 满足 $\angle A'C'B'=45^\circ$，$\angle A'B'C'=60^\circ$. 由 C 点测得 B 点的仰角为 15°，BB' 与 CC' 的差为 100；由 B 点测得 A 点的仰角为 45°，则 A,C 两点到水平面 $A'B'C'$ 的高度差 $AA'-CC'$ 约为（$\sqrt{3}\approx 1.732$）（　）.



A： 346　　　B： 373　　　C： 446　　　D： 473

答案：B.

解析：由题意得 $BM=100$, $\angle BCM=15^\circ$, $\angle ABN=45^\circ$, 即 $CM=100\cos 15^\circ=B'C'$.

所以

$$BN=B'A'=\frac{B'C'\sin 45^\circ}{\sin 75^\circ}=\frac{100\cos 15^\circ\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}}{\sin 75^\circ}=\frac{50\sqrt{2}\cdot\cos 75^\circ}{\sin 15^\circ\sin 75^\circ}=\frac{50\sqrt{2}}{\sin 15^\circ}$$

所以

$$AN=BN=\frac{50\sqrt{2}}{\sin 75^\circ}=\frac{50\sqrt{2}}{\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}}=273.$$

又 $AQ=AA'-CC'=AQ=AN+NQ=(BB'-CC')+NQ=100+273=373$.

9. 若 $\alpha\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$, $\tan 2\alpha=\frac{\cos\alpha}{2-\sin\alpha}$, 则 $\tan\alpha=$(　).

A： $\frac{\sqrt{15}}{15}$　　　B： $\frac{\sqrt{5}}{5}$　　　C： $\frac{\sqrt{5}}{3}$　　　D： $\frac{\sqrt{15}}{3}$

答案：A.

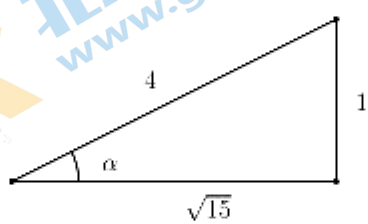
解析：$\tan 2\alpha=\frac{\cos\alpha}{2-\sin\alpha}$.

$\tan 2\alpha=\frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}=\frac{2\sin\alpha\cos\alpha}{\cos^2\alpha-\sin^2\alpha}=\frac{\cos\alpha}{2-\sin\alpha}$

$\therefore 2\sin\alpha(2-\sin\alpha)=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha$

$\therefore 4\sin\alpha-2\sin^2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha=1-2\sin^2\alpha$

$\therefore \sin\alpha=\frac{1}{4}$.



又 $\because \alpha\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$, 如图, $\tan\alpha=\frac{1}{\sqrt{15}}=\frac{\sqrt{15}}{15}$.

10. 将 4 个 1 和 2 个 0 随机排成一行, 则 2 个 0 不相邻的概率为 (　).

A： $\frac{1}{3}$　　　B： $\frac{2}{5}$　　　C： $\frac{2}{3}$　　　D： $\frac{4}{5}$

答案：C.

解析：把位置依次标为 1 到 6.

总数: 先排 2 个 0, 有 $C_6^2=15$ 种, 再排 4 个 1, 有一种, 故共有 15 种.

满足题设的排法: 先排 4 个 1, 有 1 种. 其间有 5 个空, 选 2 个空插入有 $C_5^2=10$ 种.

故 $P=\frac{10}{15}=\frac{2}{3}$.

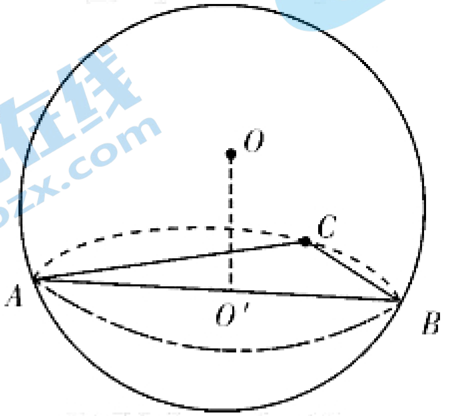
满足题设排法的另一种解释：0 的位置有 (1,3)，(1,4)，(1,5)，(1,6)，(2,4)，(2,5)，(2,6)，(3,5)，(3, 6)，(4,6)，共 10 种．

11. 已知 A,B,C 是半径为 1 的球 O 的球面上的三个点，且 $AC\perp BC$，$AC=BC=1$，则三棱锥 $O-ABC$ 的体积为（ ）．

A：$\dfrac{\sqrt{2}}{12}$　　B：$\dfrac{\sqrt{3}}{12}$　　C：$\dfrac{\sqrt{2}}{4}$　　D：$\dfrac{\sqrt{3}}{4}$

答案：A．

解析：记 O' 为 A,B,C 所在圆面的圆心，则 $OO'\perp ABC$．



又 $AB=\sqrt{2}$，所以

$$OO'=\sqrt{OA^2-AO'^2}=\sqrt{1^2-\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2}=\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

所以

$$V_{O-ABC}=\frac{1}{3}\cdot S_{\triangle ABC}\cdot OO'=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot 1\cdot 1\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\sqrt{2}}{12}.$$

故选 A．

12. 设函数 $f(x)$ 的定义域为 $\mathbf{R}$，$f(x+1)$ 为奇函数，$f(x+2)$ 为偶函数，当 $x\in[1,2]$ 时，$f(x)=ax^2+b$．若 $f(0)+f(3)=6$，则 $f(\frac{9}{2})=$（ ）．

A：$-\dfrac{9}{4}$　　B：$-\dfrac{3}{2}$　　C：$\dfrac{7}{4}$　　D：$\dfrac{5}{2}$

答案：D．

解析：$\because f(x+1)$ 为奇函数，$\therefore f(x)$ 关于 $(1,0)$ 中心对称，$\therefore f(1)=0$．

因 $f(x+2)$ 为偶函数，故 $f(x)$ 关于 $x=2$ 轴对称，周期为 4．

$\therefore f(0)=-f(2)$，$f(3)=f(1)$，即 $f(1)-f(2)=6$，$f(2)=-6$．

$$\begin{cases}a+b=0\\4a+b=-6\end{cases},\ \therefore\begin{cases}a=-2\\b=2\end{cases}.$$

故

$$f\left(\frac{9}{2}\right)=f\left(\frac{1}{2}\right)=-f\left(\frac{3}{2}\right)=-\left(-2\times\frac{9}{4}+2\right)=\frac{5}{2}.$$

故选 D．

二、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分.

13. 曲线 $y=\dfrac{2x-1}{x+2}$ 在点 $(-1,-3)$ 处的切线方程为____________.

答案：$y=5x+2$.

解析：$f'(x)=\dfrac{5}{(x+2)^2}$，$f'(-1)=5$，$f(-1)=\dfrac{-3}{1}=3$.

切线：$y+3=5(x+1)\Rightarrow y=5x+2$.

14. 已知向量 $\boldsymbol{a}=(3,1)$，$\boldsymbol{b}=(1,0)$，$\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+k\boldsymbol{b}$. 若 $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{c}$，则 $k=$____________.

答案：$-\dfrac{10}{3}$.

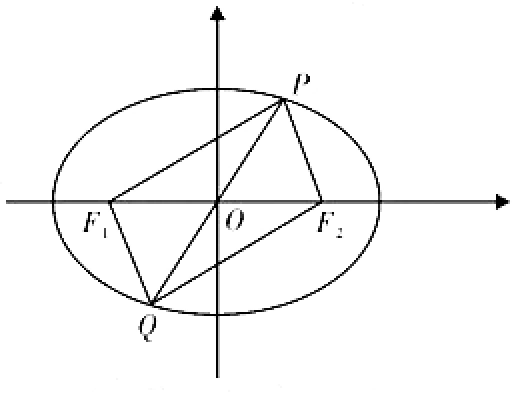
解析：$\boldsymbol{c}=(3+k,1)$，$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}=0\Leftrightarrow 3(3+k)+1=0$.

所以 $k=-\dfrac{10}{3}$.

15. 已知 F_1,F_2 为椭圆 $C:\dfrac{x^2}{16}+\dfrac{y^2}{4}=1$ 的两个焦点，P,Q 为 C 上关于坐标原点对称的两点，且 $|PQ|=|F_1F_2|$，则四边形 PF_1QF_2 的面积为____________.

答案：8.

解析：如图，由 $|PQ|=|F_1F_2|$ 及椭圆对称性可知，四边形 PF_1QF_2 为矩形.

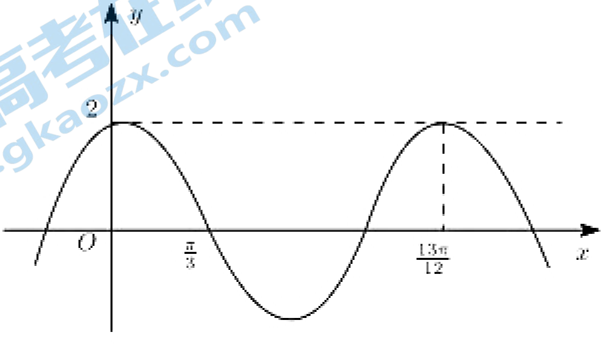


设 $|PF_1|=m$，$|PF_2|=n$，则

$$\begin{cases} m+n=8 & ① \\ m^2+n^2=|F_1F_2|^2=48 & ② \end{cases}$$

$\dfrac{①^2-②}{2}$ 得 $mn=8$，所以，四边形 PF_1QF_2 面积为 $mn=8$.

16. 已知函数 $f(x)=2\cos(\omega x+\varphi)$ 的部分图像如图所示，则满足条件 $(f(x)-f(-\dfrac{7\pi}{4}))(f(x)-f(\dfrac{4\pi}{3}))>0$ 的最小正整数 x 为____________.



答案：2.

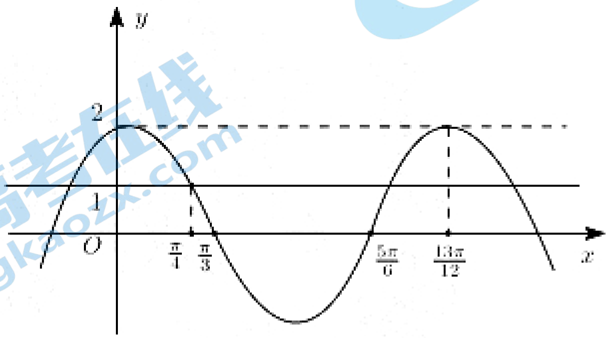
解析：由图可知，$f(x)$ 的最小正周期 $T=\frac{4}{3}\times\left(\frac{13}{12}\pi-\frac{\pi}{3}\right)=\pi$，$\therefore\omega=2$.

$\because f\left(\frac{13\pi}{12}\right)=2$，$\therefore 2\cos\left(\frac{13\pi}{6}+\varphi\right)=2$，$\therefore\varphi=-\frac{\pi}{6}+2k\pi, k\in\mathbb{Z}$.

$\therefore f(x)=2\cos\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)$，$\therefore f\left(\frac{4\pi}{3}\right)=f\left(\frac{\pi}{3}\right)=0$，$f\left(-\frac{\pi}{4}\right)=f\left(\frac{\pi}{4}\right)=2\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{6}\right)=1$.

$\therefore (f(x)-1)(f(x)-0)>0\Leftrightarrow f(x)<0$ 或 $f(x)<1$.

联系图象可知，满足 $f(x)>1$ 的离 y 轴最近的正数区间 $\subseteq\left(0,\frac{\pi}{4}\right)$，无整数；$f(x)<0$ 的离 y 轴最近的正数区间为 $\left(\frac{\pi}{3},\frac{5\pi}{6}\right)$，最小正整数 $x=2$.



解析图

三、解答题：共 70 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤. 第 17~21 题为必考题，每个试题考生都必须作答. 第 22、23 题为选考题，考生根据要求作答.

(一) 必考题：共 60 分.

17. (12 分)

甲、乙两台机床生产同种产品，产品按质量分为一级品和二级品，为了比较两台机床产品的质量，分别用两台机床各生产了 200 件产品，产品的质量情况统计如下表：

	一级品	二级品	合计
甲机床	150	50	200
乙机床	120	80	200
合计	270	130	400

(1) 甲机床、乙机床生产的产品中一级品的频率分别是多少？

(2) 能否有 99% 的把握认为甲机床的产品质量与乙机床的产品质量有差异？

附：$K^2=\frac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$，

$P(K^2\geqslant k)$	0.050	0.010	0.001
k	3.841	6.635	10.828

解析：(1) 由表格数据得：

甲机床生产的产品中一级品的频率为 $\frac{150}{200}=\frac{3}{4}$；

乙机床生产的产品中一级品的频率为 $\frac{120}{200}=\frac{3}{5}$；

(2) 由题意

$$k^2=\frac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}=\frac{400\times(150\times80-120\times50)^2}{200\times200\times270\times130}\approx10.256>6.635.$$

所以有 99% 的把握认为甲机床的产品质量与乙机床的产品质量有差异.

18. (12 分)

已知数列 $\{a_n\}$ 的各项均为正数, 记 S_n 为 $\{a_n\}$ 的前 n 项和, 从下面 ①②③ 中选取两个作为条件, 证明另外一个成立.

① 数列 $\{a_n\}$ 是等差数列; ② 数列 $\{\sqrt{S_n}\}$ 是等差数列; ③ $a_2 = 3a_1$.

注: 若选择不同的组合分别解答, 则按第一个解答计分.

①, ③⇒②

证明: 设等差数列 $\{a_n\}$ 的公差为 d.

因为 $a_2 = 3a_1$, 所以 $a_1 + d = 3a_1$, 则 $d = 2a_1$, 所以

$$S_n = na_1 + \frac{n(n-1)}{2}d = na_1 + n(n-1)a_1 = n^2 a_1,$$

所以

$$\sqrt{S_n} - \sqrt{S_{n-1}} = n\sqrt{a_1} - (n-1)\sqrt{a_1} = \sqrt{a_1}.$$

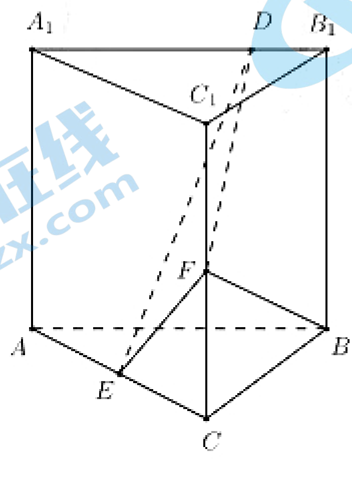
所以 $\{\sqrt{S_n}\}$ 是首项为 $\sqrt{a_1}$, 公差为 $\sqrt{a_1}$ 的等差数列.

19. (12 分)

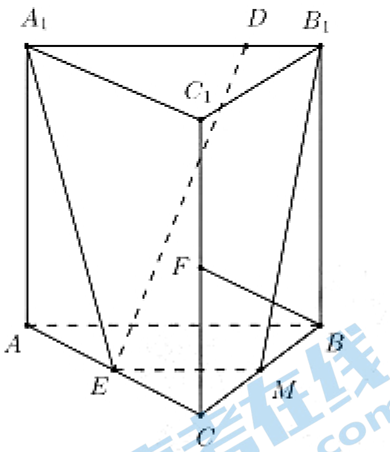
已知直三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中, 侧面 AA_1B_1B 为正方形, $AB = BC = 2$, E, F 分别为 AC 和 CC_1 的中点, D 为棱 A_1B_1 上的点, $BF \perp A_1B_1$.

(1) 证明: $BF \perp DE$;

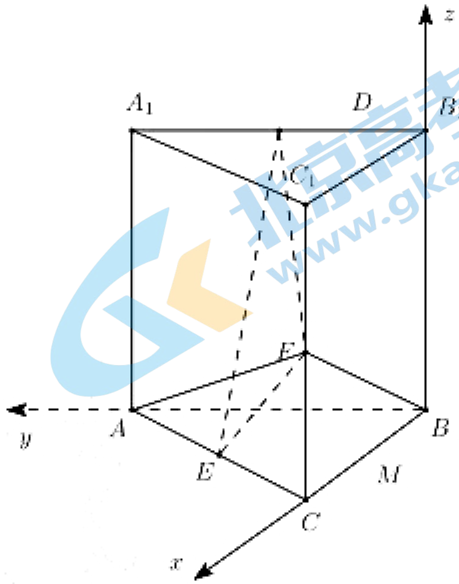
(2) 当 B_1D 为何值时, 面 BB_1C_1C 与面 DFE 所成的二面角的正弦值最小?



证明: (1) 连 A_1E, 取 BC 中点 M 连 B_1M, EM.



解析 (1) 图



解析 (2) 图

由 EM 为 AC, BC 中点, 则 $EM \parallel AB$.

又 $AB \parallel A_1B_1$, $A_1B_1 \parallel EM$, 则 A_1B_1ME 共面, 故 $DE \subset$ 面 A_1B_1ME.

又在侧面 BCC_1B_1 中 $\triangle FCB \cong \triangle MBB_1$, 则 $BF \perp MB_1$.

又

$$\left.\begin{array}{r} BF \perp A_1B_1 \\ MB_1 \cap A_1B_1 = B_1 \\ MB_1, A_1B_1 \subset \text{面} A_1B_1ME \end{array}\right\} \Rightarrow BF \perp \text{面} A_1B_1ME, \text{则} BF \perp DE.$$

(2) $BF \perp A_1B_1$ 则 $BF \perp AB \Rightarrow AF^2 = P \Rightarrow AF = 3$.

又 $AF^2 = FC^2 + AC^2 \Rightarrow AC^2 = 8$ 则 $AB \perp BC$.

如图以 B 为原点建立坐标轴, 则 $B(0,0,0), C(2,0,0), A(0,2,0), E(1,1,0), F(2,0,1)$.

设 $DB_1 = t$ 则 $D(0,t,2)$ $0 \leqslant t \leqslant 2$.

则面 BCC_1B_1 法向量为 $\boldsymbol{m}(0,1,0)$, 对面 DEF 设法向量为 $\boldsymbol{n}(x,y,z)$, 则

$$\begin{cases} \overrightarrow{EF} = (1,-1,1) \\ \overrightarrow{ED} = (-1,t-1,2) \end{cases} \begin{cases} \overrightarrow{EF} \cdot \boldsymbol{n} = 0 \\ \overrightarrow{ED} \cdot \boldsymbol{n} = 0 \end{cases} \Rightarrow \boldsymbol{n} = (1+t, 3, 2-t)$$

则

$$\cos\langle \boldsymbol{m}, \boldsymbol{n} \rangle = \frac{3}{\sqrt{(1+t)^2 + 3^2 + (2-t)^2}} = \frac{3}{\sqrt{2t^2 - 2t + 14}}.$$

要求最小正弦值则求最大余弦值.

当 $\frac{1}{2}$ 时二面角余弦值最大, 则 $B_1D = \frac{1}{2}$ 时二面角正弦值最小.

20. (12 分)

抛物线 C 的顶点为坐标原点 O. 焦点在 x 轴上, 直线 $l: x = 1$ 交 C 于 P, Q 两点, 且 $OP \perp OQ$. 已知点 $M(2,0)$, 且 $\odot M$ 与 l 相切.

(1) 求 C, $\odot M$ 的方程;

(2) 设 A_1, A_2, A_3 是 C 上的三个点. 直线 A_1A_2, A_1A_3 均与 $\odot M$ 相切. 判断直线 A_2A_3 与 $\odot M$ 的位置关系, 并说明理由.

解析: (1) $C: y^2 = x$, $\odot M: (x-2)^2 + y^2 = 1$.

(2) 设 $A_1(a^2, a), A_2(b^2, b), A_3(c^2, c)$.

$l_{A_1A_2}: y - a = \dfrac{1}{a+b}(x - a^2) \Rightarrow x - (a+b)y + ab = 0$, 所以

$$d = r \Rightarrow \frac{|2+ab|}{\sqrt{1+(a+b)^2}} = 1. \qquad ①$$

$l_{A_1A_3}: y - a = \dfrac{1}{a+c}(x - a^2) \Rightarrow x - (a+c)y + ac = 0$, 所以

$$d = r \Rightarrow \frac{|2+ac|}{\sqrt{1+(a+c)^2}} = 1. \qquad ②$$

所以 a, c 是方程 $\dfrac{|2+ax|}{\sqrt{1+(a+x)^2}} = 1 \Rightarrow (a^2-1)x^2 + 2ax - a^2 + 3 = 0$ 的两根.

又 $l_{A_2A_3}: x - (b+c)y + bc = 0$, 所以

$$d = \frac{|2+bc|}{\sqrt{1+(b+c)^2}} = \frac{|2+\dfrac{3-a^2}{a^2-1}|}{\sqrt{1+(\dfrac{2a}{a^2-1})^2}} = \frac{|a^2+1|}{\sqrt{a^4+2a^2+1}} = 1.$$

所以 $d = r$, 即直线 A_2A_3 与 $\odot M$ 相切.

21. (12 分)

已知 $a > 0$ 且 $a \neq 1$, 函数 $f(x) = \dfrac{x^a}{a^x}(x > 0)$.

(1) 当 $a = 2$ 时, 求 $f(x)$ 的单调区间;

(2) 若曲线 $y = f(x)$ 与直线 $y = 1$ 有且仅有两个交点, 求 a 的取值范围.

解析: (1) $a = 2$ 时, $f(x) = \dfrac{x^2}{2^x}$.

$$f'(x) = \frac{2x\cdot 2^x - 2^x\ln 2\cdot x^2}{(2^x)^2} = \frac{x(2 - x\ln 2)}{2^x} = \frac{\ln 2\cdot x(\dfrac{2}{\ln 2} - x)}{2^x}.$$

当 $x \in (0, \dfrac{2}{\ln 2})$ 时, $f'(x) > 0$, $f(x)$ 单调递增; 当 $x \in (\dfrac{2}{\ln 2}, +\infty)$ 时, $f'(x) < 0$, $f(x)$ 单调递减.

故 $f(x)$ 在 $(0, \dfrac{2}{\ln 2})$ 上单调递增, 在 $(\dfrac{2}{\ln 2}, +\infty)$ 上单调递减.

(2) 由题知 $f(x) = 1$ 在 $(0, +\infty)$ 有两不等根;

$$f(x) = 1 \Leftrightarrow x^a = a^x = a\ln x = x\ln a \Leftrightarrow \frac{\ln x}{x} = \frac{\ln a}{a}.$$

令 $g(x) = \dfrac{\ln x}{x}$, $g'(x) = \dfrac{1-\ln x}{x^2}$. $g(x)$ 在 $(0, e)$ 单调递增, 在 $(e, +\infty)$ 单调递减.

又 $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = -\infty, g(e) = \dfrac{1}{e}$, $g(1) = 0$, $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = 0$.

所以 $0 < \dfrac{\ln a}{a} < \dfrac{1}{e} \Rightarrow a > 1$ 且 $a \neq e$.

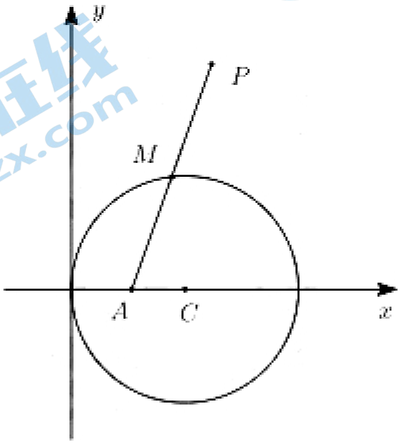
（二）选考题：共 10 分. 请考生在第 22、23 题中任选一题作答. 如果多做, 则按所做的第一题计分.

22.【选修 4－4: 坐标系与参数方程】(10 分)

在直角坐标系 xOy 中, 以坐标原点为极点, x 轴正半轴为极轴建立极坐标系, 曲线 C 的极坐标方程为 $\rho = 2\sqrt{2}\cos\theta$.

(1) 将 C 的极坐标方程化为直角坐标方程;

(2) 设点 A 的直角坐标为 $(1,0)$, M 为 C 上的动点, 点 P 满足 $\overrightarrow{AP} = \sqrt{2}\overrightarrow{AM}$, 写出 P 的轨迹 C_1 的参数方程, 并判断 C 与 C_1 是否有公共点.



解析：(1)$P^2 = 2\sqrt{2}\rho\cos\theta \Rightarrow x^2 + y^2 = 2\sqrt{2}x \Rightarrow (x-\sqrt{2})^2 + y^2 = 2$.

(2) 设 $P(x,y), M(x_0,y_0)$, 由

$$\overrightarrow{AP} = \sqrt{2}\overrightarrow{AM} \Rightarrow \overrightarrow{OM} = \frac{\sqrt{2}}{2}\overrightarrow{AP} + \overrightarrow{OA} = \frac{\sqrt{2}}{2}(x-1,y) + (1,0) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}x - \frac{\sqrt{2}}{2} + 1, \frac{\sqrt{2}}{2}y\right).$$

又 M 在 C 上, 所以

$$\left(\frac{\sqrt{2}}{2}x - \frac{3}{2}\sqrt{2} + 1\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}y\right)^2 = 2 \Rightarrow (x+\sqrt{2}-3)^2 + y^2 = 4.$$

则 C 为 $(3-\sqrt{2},0)$ 为圆心，半径为 2 的圆. 所以 C 的参数方程为

$$\begin{cases} x+\sqrt{2}-3 = 2\cos\theta \\ y = 2\sin\theta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 3-\sqrt{2}+2\cos\theta \\ y = 2\sin\theta \end{cases}$$

$|C_1C| < |r_1 - r_2|$.

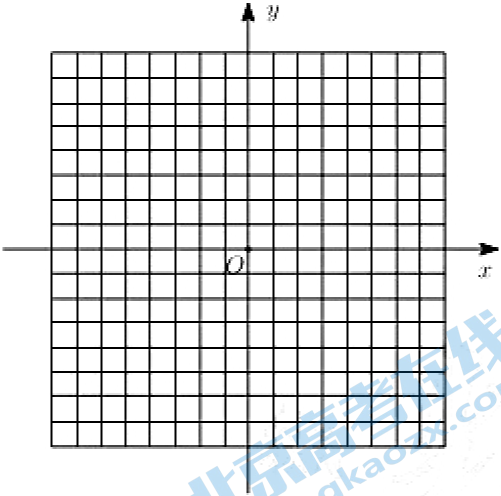
所以, 两圆为内含关系. 所以, 圆 C 与圆 C_1 无公共点.

23.【选修 4－5: 不等式选讲】(10 分)

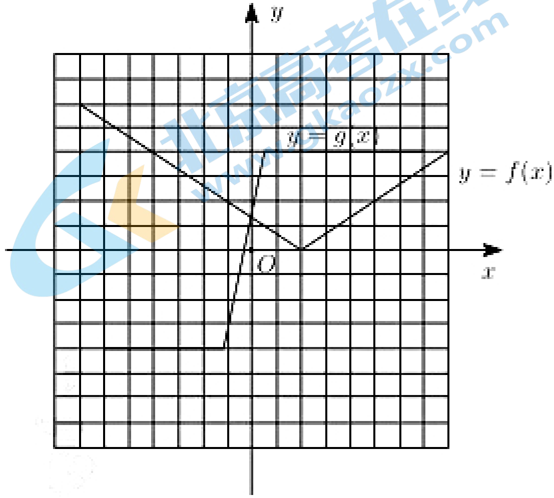
已知函数 $f(x) = |x-2|, g(x) = |2x+3| - |2x-1|$.

(1) 画出 $y = f(x)$ 和 $y = g(x)$ 的图像;

(2) 若 $f(x+a) \geqslant g(x)$, 求 a 的取值范围.



题图



解析图

解析：(1)

$$f(x)=\begin{cases}x-2 & x\geqslant 2\\ 2-x & x<2\end{cases};\ g(x)=\begin{cases}-4 & x\leqslant -\frac{3}{2}\\ 4x+2 & -\frac{3}{2}<x<\frac{1}{2}\\ 4 & x\geqslant \frac{1}{2}\end{cases}$$

(2) 当 $a\leqslant 0$ 时，恒不满足，此时 $f(2-a+a)=0<g(2-a)=4$；

当 $a>0$ 时，$f(x+a)\geqslant g(x)$ 恒成立，必有

$$f(\frac{1}{2}+a)\geqslant g(\frac{1}{2})\Leftrightarrow |a-\frac{3}{2}|\geqslant 4\Rightarrow a\geqslant \frac{11}{2}.$$

当 $a\geqslant \dfrac{11}{2}$ 时，

1° $x<-\dfrac{3}{2}$ 时，$g(x)\leqslant 0$，$f(x)\geqslant 0$，所以 $f(x)\geqslant g(x)$.

2° $x\in[-\dfrac{3}{2},\dfrac{1}{2}]$ 时 $g(x)=4x+2$，$f(x)=x+a-2$．令 $F(x)=f(x)-g(x)=-3x+a-4$，所以

$$F(x)\geqslant F(\frac{1}{2})=a-\frac{11}{2}\geqslant 0.$$

3° $x\in(\dfrac{1}{2},+\infty)$，$f(x)=x+a-2$，$g(x)=4$.

$F(x)=f(x)-g(x)=x+a-6$，所以 $F(x)>F(\dfrac{1}{2})=0$.

所以，$a\in\left[\dfrac{11}{2},+\infty\right]$.