2018 北京潞河中学高二（上）期末

数　　学（文）

2018.1

本试卷共 9 页，150 分。考试时长 120 分钟。考生务必将答案答在答题卡上，在试卷上作答无效。考试结束后，将本试卷和答题卡一并交回。

第一部分　　（选择题　共 40 分）

一、选择题(共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分，在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项)

1. 抛物线 $y^2=8x$ 的焦点坐标为

（A）$(1,0)$　　（B）$(0,1)$　　（C）$(2,0)$　　（D）$(0,2)$

2. 在复平面内，复数 $\frac{1+\mathrm{i}}{\mathrm{i}}$ 的对应的点位于

（A）第一象限　　（B）第二象限　　（C）第三象限　　（D）第四象限

3. 双曲线 $\frac{x^2}{9}-y^2=1$ 的渐近线方程为

（A）$y=\pm 3x$　　（B）$y=\pm\frac{1}{3}x$　　（C）$y=\pm\sqrt{3}x$　　（D）$y=\pm\frac{\sqrt{3}x}{3}$

4. 下列三个命题中：

①命题“若 $x>1$ 且 $y>1$，则 $x+y>2$”的逆命题.

②命题“若两个三角形面积相等，则它们全等”的否命题.

③命题“若 $a>b$，则 $\frac{1}{a}<\frac{1}{b}$”的逆否命题.

其中真命题的个数是

（A）0　　（B）1　　（C）2　　（D）3

5. 已知 $F_1(-2,0),F_2(2,0)$，满足 $||PF_1|-|PF_2||=2$ 的动点 P 的轨迹方程为

（A）$x^2-\frac{y^2}{3}=1$　　（B）$\frac{x^2}{3}-y^2=1$

（C） $y^2-\frac{x^2}{3}=1$　　　　（D） $\frac{y^2}{3}-x^2=1$

6. “$m>n>0$”是“曲线$\frac{x^2}{m}+\frac{y^2}{n}=1$为焦点在$x$轴上的椭圆”的

（A）充分而不必要条件　　　　（B）必要而不充分条件

（C）充要条件　　　　（D）既不充分也不必要条件

7. 已知A,B为双曲线$C:\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$的左右顶点, 点$M$在双曲线$C$上, $\triangle ABM$是以AM为底边的等腰三角形, 且顶角为120°, 则双曲线C的离心率为

（A） $\sqrt{5}$　　（B） 2　　（C） $\sqrt{3}$　　（D） $\sqrt{2}$

8. 高二年级有甲、乙、丙三个班参加社会实践活动, 高二年级老师要分到各个班级带队, 其中男女老师各一半, 每次任选两个老师, 将其中一个老师分到甲班, 如果这个老师是男老师, 就将另一个老师分到乙班, 否则就分到丙班, 重复上述过程, 直到所有老师都分到班级, 则

（A）乙班女老师不多于丙班女老师　　　　（B）乙班男老师不多于丙班男老师

（C）乙班男老师与丙班女老师一样多　　　　（D）乙班女老师与丙班男老师一样多

第二部分　　（非选择题　共 110 分）

二、填空题(共 6 小题，每小题 5 分，共 30 分)

9. 命题p:“$\exists x_0>1, {x_0}^2-1>0$”, 则“$\neg p$”为______.

10. 若抛物线$y^2=2px(p>0)$的准线经过双曲线$x^2-\frac{y^2}{3}=1$的左焦点, 则实数$p=$______.

11. 已知!ABC的顶点B,C均在椭圆$\frac{x^2}{3}+y^2=1$上, 顶点A是椭圆的一个焦点, 椭圆的另一个焦点在BC边上, 则!ABC的周长是______.

12. 已知$P(m,2)$是抛物线$C:y^2=4x$上一点, 则$m=$______; F为抛物线C的焦点, 则$|PF|=$______.

13. 能够说明“设a,b,c是任意实数, 若$a>b>c$, 则$a+b>c$”是假命题的一组整数a,b,c的值依次为______.

14. 在平面直角坐标系xOy中, 动点$P(x,y)$到两坐标轴的距离之和等于它到定点$(1,1)$的距离, 记点P的轨迹为C. 给

出下面四个结论:

①曲线 C 关于原点对称;

②曲线 C 关于 x 轴对称;

③点 $(-a^2,1)(a\in R)$ 在曲线 C 上;

④在第一象限内, 曲线 C 与 x 轴的非负半轴, y 轴的非负半轴围成的封闭图形面积为 $\frac{1}{2}$.

其中所有正确结论的序号是______.

三、解答题(共 6 小题，共 80 分。解答应写出文字说明、演算步骤或证明过程)

15. （本小题满分 13 分）

已知椭圆方程为 $x^2+4y^2=4$.

（Ⅰ）求椭圆的长轴长、焦点坐标和离心率;

（Ⅱ）直线 $y=x+1$ 与椭圆交于 A,B 两点, O 为坐标原点, 求！AOB 的面积.

16. （本小题满分 13 分）

命题 $p:\forall x\in R$, 不等式 $x^2+2x+m>0$ 恒成立, 命题 $q:\exists x_0\in \mathbf{R}$, 使得 $4x_0^{\ 2}+4(m+2)x_0+1=0$.

（Ⅰ）若“ $p\wedge q$ ”为真命题, 求实数 m 的取值范围;

（Ⅱ）若“ $p\vee q$ ”为真命题, 求实数 m 的取值范围.

17. （本小题满分 13 分）

已知点 P 是椭圆 $C:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 上一点, P 到椭圆 C 的两个焦点 F_1,F_2 的距离之和为 $2\sqrt{3}$, $|F_1F_2|=2\sqrt{2}$.

（Ⅰ）求椭圆 C 的方程和离心率;

（Ⅱ）设直线 $y=kx+2$ 交椭圆于 M,N 两点, 是否存在实数 k, 使以 MN 为直径的圆过点 $F(-1,0)$, 若存在, 求 k 的值, 若不存在, 请说明理由.

18. （本小题满分 13 分）

已知椭圆 $C:\dfrac{x^2}{8m}+\dfrac{y^2}{2m}=1(m>0)$ 的长轴长为 $4\sqrt{2}$，O 为坐标原点.

（Ⅰ）求椭圆 C 的方程和离心率;

（Ⅱ）设点 $A(3,0)$，动点 P 在椭圆 C 上, 且 P 在 y 轴的右侧, 线段 AP 的垂直平分线 l 与 y 轴相交于点 B，求 $|OB|$ 的最小值.

19. （本小题满分 14 分）

已知椭圆 C 的中心在原点, 焦点在 x 轴上, 短轴长为 4，离心率为 $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

（Ⅰ）求椭圆 C 的方程;

（Ⅱ）设 P 是椭圆 C 长轴上的一个动点, 过点 P 作斜率为 $\dfrac{1}{2}$ 的直线 l 交椭圆 C 于 A,B 两点.

求证: $|PA|^2+|PB|^2$ 为定值.

20. （本小题满分 14 分）

在平面直角坐标系 xOy 中, 点 Q 是曲线 C 上的动点, Q 到点 $F(1,0)$ 的距离与 Q 到直线 $x=-1$ 的距离相等.

（Ⅰ）求曲线 C 的方程;

（Ⅱ）设 $P(1,2)$ 是曲线 C 上的点, 点 A,B 在曲线 C 上, 直线 PA,PB 分别与 y 轴交于点 M,N，且 $|PM|=|PN|$，求直线 AB 的斜率.

数学试题答案

一、选择题:本大题共 8 小题,每小题 5 分,共 40 分.

题号	1	2	3	4	5	6	7	8
答案	C	D	B	B	A	C	D	C

二、填空题:本大题共 6 小题,每小题 5 分,共 30 分.

9. $\forall x>1, x^2-1\le 0$

10. 4

11. $4\sqrt{3}$

12. 1 ; 2

13. $-1,-2,-3$

14. ③④

三、解答题:

15. （本小题满分 13 分）

解:（Ⅰ）椭圆的标准方程为$\frac{x^2}{4}+y^2=1$

所以$a^2=4, b^2=1$, 由$a^2=b^2+c^2$知$c^2=3$

所以 $a=2,c=\sqrt{3}$

所以椭圆的长轴长为 $2a=4$，焦点坐标为 $(\pm\sqrt{3},0)$，离心率 $e=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

（II）设 $A(x_1,y_1),B(x_2,y_2)$

由 $\begin{cases}x^2+4y^2=4\\y=x+1\end{cases}$，消去 y 有 $5x^2+8x=0$

所以 $x_1=0,x_2=-\frac{8}{5}$，代入直线方程得 $y_1=1,y_2=-\frac{3}{5}$

所以 $|AB|=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}=\sqrt{2}$

原点到直线的距离 $d=\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$

所以 $S_{\triangle AOB}=\frac{1}{2}\times|AB|\times d=\frac{1}{2}\times\sqrt{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{1}{2}$.

16. （本小题满分 13 分）

解：（I）若“$p\wedge q$”为真命题，则 p,q 均为真命题

所以 $\begin{cases}m>1\\m\le-3\text{或}m\ge-1\end{cases}$

所以 $m>1$

即当“$p\wedge q$”为真命题时，实数 m 的取值范围是 $(1,+\infty)$.

（II）若“$p\vee q$”为假命题，则 p,q 均为假命题

所以 $\begin{cases}m\le1\\-3<m<-1\end{cases}$

所以 $-3<m<-1$

所以当“$p\vee q$”为真命题时，实数 m 的取值范围是 $m\le-3$ 或 $m\ge-1$

即当“$p\vee q$”为真命题时，实数 m 的取值范围是 $(-\infty,-3]\cup[-1,+\infty)$.

17. （本小题满分 13 分）

解：（Ⅰ）依题意可知：$2a=2\sqrt{3},2c=2\sqrt{2}$

所以 $a=\sqrt{3},c=\sqrt{2},b^2=a^2-c^2=1$

所以椭圆的方程为 $\frac{x^2}{3}+y^2=1$，离心率为 $e=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{6}}{3}$.

（Ⅱ）设 $M(x_1,y_1),N(x_2,y_2)$

由 $\begin{cases}\frac{x^2}{3}+y^2=1\\ y=kx+2\end{cases}$ 消去 y 知，$(3k^2+1)x^2+12kx+9=0$

则 $\begin{cases}x_1+x_2=-\frac{12k}{3k^2+1}\\ \Delta>0\\ x_1x_2=\frac{9}{3k^2+1}\end{cases}$

若以 MN 为直径的圆过点 $F(-1,0)$，则 $\angle MFN=90^\circ$，即 $\overrightarrow{FM}\cdot\overrightarrow{FN}=0$

而 $\overrightarrow{FM}=(x_1+1,y_1),\overrightarrow{FN}=(x_2+1,y_2)$，且 $y_1=kx_1+2,y_2=kx_2+2$

所以 $\overrightarrow{FM}\cdot\overrightarrow{FN}=(x_1+1)(x_2+1)+y_1y_2=x_1x_2+(x_1+x_2)+1+(kx_1+2)(kx_2+2)$

$=(k^2+1)x_1x_2+(2k+1)(x_1+x_2)+5$

$=(k^2+1)\times\frac{9}{3k^2+1}+(2k+1)\times\frac{-12k}{3k^2+1}+5=0$

解得：$k=\frac{7}{6}$，此时 $\Delta>0$ 复合题意.

综上，k 的值为 $\frac{7}{6}$.

18. （本小题满分 13 分）

解：（Ⅰ）因为椭圆的长轴长为 $4\sqrt{2}$，所以 $a=2\sqrt{2}$

所以 $a^2=8m=8$，所以 $m=1$，$b^2=2$，而 $c^2=a^2-b^2=6$，所以 $c=\sqrt{6}$

所以椭圆的方程为 $\frac{x^2}{8}+\frac{y^2}{2}=1$，离心率为 $e=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

（Ⅱ）设 $P(x_0,y_0)$，因为点 P 在椭圆 C 上，且 P 在 y 轴的右侧，所以 $0<x_0\le 2\sqrt{2}$，$\frac{x_0^2}{8}+\frac{y_0^2}{2}=1$

因为 $A(3,0)$，所以 AP 的中点 $M(\frac{x_0+3}{2},\frac{y_0}{2})$，$k_{AP}=\frac{y_0}{x_0-3}$

所以线段 AP 的垂直平分线的斜率 $k=-\frac{1}{k_{AP}}=-\frac{x_0-3}{y_0}$，且过点 M

所以线段 AP 的垂直平分线的方程为 $y-y_0=-\frac{x_0-3}{y_0}(x-\frac{x_0+3}{2})$

令 $x=0$，则 $y_B=\frac{x_0^2+2y_0^2-9}{2y_0}$，而 $x_0^2=8-4y_0^2$

所以 $|OB|=|y_B|=|\frac{8-4y_0^2+2y_0^2-9}{2y_0}|=|\frac{2y_0^2+1}{2y_0}|=|y_0|+\frac{1}{|2y_0|}\ (0\le|y_0|\le\sqrt{2})$

$\ge 2\sqrt{|y_0|\cdot\frac{1}{|2y_0|}}=\sqrt{2}$

当且仅当 $|y_0|=\frac{1}{|2y_0|}$ 即 $y_0=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$ 时等号成立.

所以 $|OB|$ 的最小值为 $\sqrt{2}$.

19. （本小题满分 14 分）

解：（Ⅰ）依题意知 $2b=4, e=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{3}}{2}$

由 $a^2=b^2+c^2$ 得，$a=4, b=2$

所以椭圆的方程为 $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{4}=1$.

（Ⅱ）设直线 l 的方程为 $y=\frac{1}{2}x+m$，$A(x_1,y_1),B(x_2,y_2)$，则 $P(-2m,0)(-4\le -2m\le 4)$

由$\begin{cases}\dfrac{x^2}{16}+\dfrac{y^2}{4}=1\\ y=\dfrac{1}{2}x+m\end{cases}$ 消去 y 知： $x^2+2mx+2m^2-8=0$

则$\begin{cases}x_1+x_2=-2m\\ x_1x_2=2m^2-8\end{cases}$

而 $y_1=\dfrac{1}{2}x_1+m, y_2=\dfrac{1}{2}x_2+m$

所以$|PA|^2+|PB|^2=(x_1+2m)^2+{y_1}^2+(x_2+2m)^2+{y_2}^2$

$=\dfrac{5}{4}[(x_1+x_2)^2-2x_1x_2+4m(x_1+x_2)+8m^2]$

$=\dfrac{5}{4}[4m^2-2(2m^2-8)+4m\cdot(-2m)+8m^2]$

$=\dfrac{5}{4}\times 16=20$ 为定值.

20. （本小题满分 14 分）

解：（Ⅰ）由抛物线的定义知, 曲线 C 是以 $F(1,0)$ 为焦点, 以 $x=-1$ 为准线的抛物线

所以 $\dfrac{p}{2}=1$, 所以 $p=2$

所以曲线 C 的方程为 $y^2=4x$.

（Ⅱ）设 AB 的直线方程为 $y=kx+m$ ， $A(x_1,y_1),B(x_2,y_2)$

由$\begin{cases}y=kx+m\\ y^2=4x\end{cases}$ 消去 y , 得 $k^2x^2+(2km-4)x+m^2=0$

则$\begin{cases}x_1+x_2=\dfrac{4-2km}{k^2}\\ \Delta>0\\ x_1x_2=\dfrac{m^2}{k^2}\end{cases}$

因为点 $P(1,2)$, $k_{PA}=\dfrac{y_1-2}{x_1-1}$,

所以直线 AP 的方程为: $y-2=\dfrac{y_1-2}{x_1-1}(x-1)$

令 $x=0$, 则 $y_M=2-\dfrac{y_1-2}{x_1-1}=\dfrac{2x_1-y_1}{x_1-1}$

同理: $y_N=\dfrac{2x_2-y_2}{x_2-1}$

因为 $|PM|=|PN|$, 所以 $\dfrac{y_M+y_N}{2}=2$, 即 $\dfrac{2x_1-y_1}{x_1-1}+\dfrac{2x_2-y_2}{x_2-1}=4$, 而 $y_1=kx_1+m, y_2=kx_2+m$

所以 $[(2-k)x_1-m](x_2-1)+[(2-k)x_2-m](x_1-1)=4(x_1-1)(x_2-1)$

即 $2kx_1x_2+(m-k-2)(x_1+x_2)+4-2m=0$

所以 $2k\cdot\dfrac{m^2}{k^2}+(m-k-2)\cdot\dfrac{4-2km}{k^2}+4-2m=0$

化简得: $(k+1)(m+k-2)=0$

所以 $k=-1$

综上: 直线 AB 的斜率为 -1.