北京市怀柔区 2022—2023 学年度第二学期期末试卷高二数学　　2023.7

第一部分（选择题 共40分）

一、选择题共10小题，每小题4分，共40分．在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项．

（1）若$1, x, 2$成等差数列，则

（A）$x=\frac{3}{2}$　　（B）$x=3$　　（C）$x=2$　　（D）$x=\pm\sqrt{2}$

（2）函数 $f(x)=x+\frac{1}{x}$ 在 $x=2$ 处的切线斜率为

（A）-3　　（B）$\frac{3}{4}$　　（C）$\frac{5}{4}$　　（D）5

（3）已知函数 $f(x)=\sin x+\cos x$， $f'(x)$ 为 $f(x)$ 的导函数，则

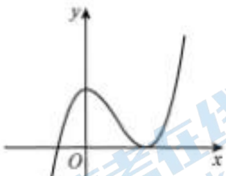
（A）$f'(x)=\sin x+\cos x$　　（B）$f'(x)=\sin x-\cos x$

（C）$f'(x)=-\sin x+\cos x$　　（D）$f'(x)=-\sin x-\cos x$

（4）一个袋中装有大小相同的 3 个白球和 2 个红球，现在不放回的取 2 次球，每次取出一个球，记“第 1 次拿出的是白球”为事件 A，“第 2 次拿出的是白球”为事件 B，则 P(B|A)=

（A）$\frac{1}{4}$　　（B）$\frac{3}{10}$　　（C）$\frac{3}{5}$　　（D）$\frac{1}{2}$

（5）已知函数 $f(x)$ 的导函数 $f'(x)$ 的图象如图所示，则 $f(x)$



（A）有极小值，但无极大值

（B）既有极小值，也有极大值

（C）有极大值，但无极小值

（D）既无极小值，也无极大值

（6）将一枚均匀硬币随机抛掷4次，记“正面向上出现的次数”为X，则随机变量 X 的期望 $E(X)=$

（A）1　　（B）2　　（C）3　　（D）4

（7）在数列$\{a_n\}$中，若 $a_1=-1$， $a_n=\frac{1}{1-a_{n-1}}(n\geq 2, n\in N^*)$，则 $a_{10}=$

（A）-1　　（B）1　　（C）$\frac{1}{2}$　　（D）2

（8）若 S_n 是等差数列$\{a_n\}$的前 n 项和， $S_8>S_n(n\neq 8, n\in N^*)$， 则

（A）$a_8\geq 0, a_9<0$　　（B）$a_8>0, a_9<0$　　（C）$a_8=0, a_9<0$　　（D）$a_8>0, a_9=0$

（9）数列$\{a_n\}$的通项公式为$a_n=(n-\lambda)\cdot 2^n(n=1, 2, \cdots)$，若$\{a_n\}$是递增数列，则 λ 的取值范围是

（A）$[1,+\infty)$　　（B）$(1+\log_2 e,3)$　　（C）$(-\infty,1+\log_2 e]$　　（D）$(-\infty,3)$

（10）已知函数 $f(x)=e^x-ln(x+3)$，则下面对函数 $f(x)$ 的描述正确的是

(A) $\forall x\in(-3,+\infty), f(x)\geq\frac{1}{3}$　　(B) $\forall x\in(-3,+\infty), f(x)>-\frac{1}{2}$

(C) $\exists x_0\in(-3,+\infty), f(x_0)=-1$　　(D) $f(x)_{min}\in(0,1)$

第二部分（非选择题 共110 分）

二、填空题共5小题，每小题5分，共25分.

（11）设函数 $f(x)=\dfrac{x}{e^x}$，则 $f'(1)=$___.

（12）已知随机变量 X 的分布列如下，且 $E(X)=\dfrac{7}{6}$：

X	0	1	a
P	$\frac{1}{6}$	p	$\frac{1}{3}$

则 $p=$___；$a=$___.

（13）已知 $\{a_n\}$ 是公比为 q 的等比数列，其前 n 项和为 S_n．若 $S_2=3a_1$，则 $q=$___.

（14）若曲线 $y=\ln(x-a)+bx$ 在 $x=0$ 处的切线方程为 $y=x$，则 $a=$___；$b=$___.

（15）设随机变量 ξ 的分布列如下：

ξ	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
P	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7	a_8	a_9	a_{10}

给出下列四个结论：

①当 $\{a_n\}$ 为等差数列时，$a_5+a_6=\dfrac{1}{5}$；

②当 $\{a_n\}$ 为等差数列时，公差 $0<\mathrm{d}<\dfrac{1}{45}$；

③当数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_n=\dfrac{1}{2^n}$ (n=1, 2, . . . , 9) 时，$a_{10}=\dfrac{1}{2^9}$ ；

④当数列 $\{a_n\}$ 满足时，$P(\xi\le k)=k^2a_k\,(k=1,2,\ldots 10)$时，$a_n=\dfrac{11}{10n(n+1)}$.

其中所有正确结论的序号是___.

三、解答题共 6 小题，共 85 分. 解答应写出文字说明，演算步骤或证明过程.

（16）（本小题 13 分）

已知等差数列的 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n，从条件①、条件②和条件③中选择两个作为已知，并完成解答：

（Ⅰ）求 $\{a_n\}$ 的通项公式；

（Ⅱ）若 $\{b_n\}$ 是等比数列，$b_1=a_2$，$b_2=S_3$，求数列 $\{a_n+b_n\}$ 的前 n 项和 T_n．

① $a_{n+1}=a_n+2$；

② $a_4=7$；

③ $S_2=4$.

（17）（本小题 13 分）

已知函数 $f(x)=x(\mathrm{e}^x-1)-\dfrac{1}{2}x^2$.

（Ⅰ）求 $f(x)$ 的极值；

（Ⅱ）求 $f(x)$ 在区间 $[-1,2]$ 上的最大值和最小值.

（18）（本小题 14 分）

为宣传交通安全知识，某地区中学联合开展了交通安全知识竞赛活动．现从参加该活动的学生中随机抽取了 20 名学生，将他们的竞赛成绩（单位：分）用茎叶图记录如下：

男		女
	5	8
0	6	6
8 5	7	0 5 6
6 4 1	8	6 9
6 2 2 1	9	5 8 8

（Ⅰ）从该地区参加该活动的男生中随机抽取 1 人，估计该男生的竞赛成绩在 90 分以上的概率；

（Ⅱ）从图中 90 分以上的人中随机抽取 4 人，抽到男生的人数记为 X，求 X 的分布列和期望；

（Ⅲ）为便于普及交通安全知识，现从该地区某所中学参加知识竞赛活动的学生中随机选取 5 名男生、5 名女生作为宣传志愿者，记这 5 名男生竞赛成绩的平均数为 μ_1，这 5 名女生竞赛成绩的平均数为 μ_2，能否认为 $\mu_1>\mu_2$，说明理由.

（19）（本小题 15 分）

已知某企业生产一种产品的固定成本为 400 万元，每生产 x 万件，需另投入成本 $p(x)$ 万元，假设该企业年内共生产该产品 x 万件，并且全部销售完，每 1 件的销售收入为 100 元，且

$$p(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{150}x^3+50x, & 0<x<60\\ 101x+\dfrac{6400}{x}-1860, & x\ge 60\end{cases}$$

(I) 求出年利润 y (万元) 关于年生产零件 x (万件) 的函数关系式 (注: 年利润=年销售收入−年总成本)；

(II) 将年产量 x 定为多少万件时，企业所获年利润最大。

（20）（本小题 15 分）

已知函数 $f\left(x\right)=ax^2+\ln x$

(I) 求函数 $f(x)$ 的单调区间；

(II) 若对任意 $x\in(0,+\infty)$，$f(x)\le\dfrac{1}{2}$ 恒成立，求 a 的取值范围.

（21）（本小题 15 分）

定义: 若对任意正整数 n, 数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 S_n 都是整数的完全平方数, 则称数列 $\{a_n\}$ 为“完全平方数列”.

(I) 若数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_n=\begin{cases}1, & n=1\\ 3^{n-1}, & n\ge 2, n\in N^*\end{cases}$，判断 $\{a_n\}$ 为是否为“完全平方数列”；

(II) 若数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和 $T_n=(n-t)^2$（t 是正整数），那么是否存在 t，使数列 $\{|b_n|\}$ 为“完全平方数列”？若存在，求出 t 的值; 若不存在，请说明理由；

(III) 试求出所有为“完全平方数列”的等差数列的通项公式.

北京市怀柔区 2022—2023 学年度第二学期期末试卷

高二数学答案及评分参考

2023.7

一、选择题（共 10 小题，每小题 4 分，共 40 分）

（1） A	（2） B	（3） C	（4） D	（5） A
（6） B	（7） A	（8） B	（9） D	（10） B

二、填空题（共 5 小题，每小题 5 分，共 25 分）

（11）0　（12）$\frac{1}{2}$ ，2　（13）2　（14）-1 ，0　（15）①③④

注：（11）、（14）题第一空 3 分，第二空 2 分；（15）题给 5、4、3 分，有错解不给分。

（13）题写 2 的给 5 分，写 2 或 1 的给 3 分

三、解答题（共 6 小题，共 85 分）

（16）解：选① $a_{n+1}=a_n+2$；② $a_4=7$

（Ⅰ）设等差数列$\{a_n\}$的公差为 $d=a_{n+1}-a_n=2$.　………2 分

由题设，得 $a_1+3d=7$

解得 $a_1=1$.　………4 分

所以 $a_n=a_1+(n-1)d=2n-1$.　………6 分

（Ⅱ）因为$\{b_n\}$是等比数列，且由$b_1=a_2$，得$b_1=a_1+d=3$，　………7 分

由$b_2=S_3$，得$b_2=3a_1+3d=9$　………8 分

所以 $b_n=b_1q^{n-1}=3^n$　………10 分

所以 $a_n+b_n=2n-1+3^n$.

所以 $T_n=(1+3+\cdots+2n-1)+(3^1+3^2+\cdots+3^n)$　………11 分

$=\dfrac{3(1-3^n)}{1-3}+\dfrac{n(1+2n-1)}{2}$　………13 分

$=\dfrac{3}{2}\cdot\left(3^n-1\right)+n^2$.

选其它，结论一样，按步给分.

（17）（共 13 分）

解：（Ⅰ）因为 $f(x)=x(e^x-1)-\frac{1}{2}x^2$，所以 $f'(x)=e^x-1+xe^x-x=(x+1)(e^x-1)$.　………4 分

令 $f'(x)=0$，得 $x_1=-1, x_2=0$.　………5 分

$f(x)$， $f'(x)$ 的变化情况如下：

x	$(-\infty,-1)$	-1	$(-1,0)$	0	$(0,+\infty)$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	↗	极大值	↘	极小值	↗

所以 $f(x)$ 的单调递增区间为$(-1,0)$，单调递减区间为$(-\infty,-1)$ ，$(0,+\infty)$.　………8 分

从而 $f(x)$ 的极大值为 $f(-1)=\frac{1}{2}-\frac{1}{e}$； $f(x)$ 的极小值为 $f(0)=0$． ………10 分

（Ⅱ）由（Ⅰ）知 $f(x)$ 在区间 $[-1,0]$ 上单调递增，在区间 $[0,2]$ 上单调递减，

又 $f(-1)=\frac{1}{2}-\frac{1}{e}$， $f(2)=2e^2-4$， $f(0)=0$ ………11 分

所以 $f(x)$ 在区间 $[-1,2]$ 上的最大值为 $2e^2-4$，最小值为 0. ………13 分

（18）（共 14 分）

解：（Ⅰ）由茎叶图数据，随机抽取的 20 名学生中有男生 10 人，从男生中随机抽取 1 人，90 分以上的有 4 人，

所以男生的竞赛成绩在 90 分以上的概率估计值为 $\frac{4}{10}=0.4$． ………4 分

（Ⅱ）抽取的样本学生中 90 分以上的有 7 人，其中有 4 名男生，3 名女生。

从 7 人中随机抽取 4 人，抽到男生的人数记为 X， X 的值可能为：1，2，3，4 ………5 分

P（X＝1）$=\frac{C_4^1C_3^3}{C_7^4}=\frac{4}{35}$， ………6 分

P（X＝2）$=\frac{C_4^2C_3^2}{C_7^4}=\frac{18}{35}$， ………7 分

P（X＝3）$=\frac{C_4^3C_3^1}{C_7^4}=\frac{12}{35}$， ………8 分

P（X＝4）$=\frac{C_4^4C_3^0}{C_7^4}=\frac{1}{35}$． ………9 分

X 的分布列为：

X	1	2	3	4
P	$\frac{4}{35}$	$\frac{18}{35}$	$\frac{12}{35}$	$\frac{1}{35}$

E（X）$=1\times\frac{4}{35}+2\times\frac{18}{35}+3\times\frac{12}{35}+4\times\frac{1}{35}=\frac{80}{35}=\frac{16}{7}$ ………11 分

（Ⅲ）不能确定是否有 $\mu_1>\mu_2$．

上述 5 名男生，5 名女生竞赛成绩的数据是随机的，所以 μ_1,μ_2 是随机的.

所以，不能确定是否有 $\mu_1>\mu_2$． ………14 分

（19）（共 15 分）

解： （1）售价固定为$100x$， ………1 分

当产量不足 60 万箱时，

$y=100x-p(x)-400=-\frac{1}{150}x^3+50x-400.$ ………3 分

当产量不小于 60 万箱时，$y=100x-p(x)-400=1460-\left(x+\frac{6400}{x}\right).$ ………5 分

则$y=\begin{cases}-\frac{1}{150}x^3+50x-400, & 0<x<60\\ 1460-\left(x+\frac{6400}{x}\right), & x\geq 60\end{cases}$.

（2）设$f(x)=\begin{cases}-\frac{1}{150}x^3+50x-400, & 0<x<60\\ 1460-\left(x+\frac{6400}{x}\right), & x\ge 60\end{cases}$

当$0<x<60$时，$f'(x)=-\frac{1}{50}(x+50)(x-50)$.得$f(x)$在$(0,50)$上单调递增，在$(50,60)$上单调递减.

则$f(x)\le f(50)=\frac{3800}{3}$. ………9 分

当$x\ge 60$时，由基本不等式有$1460-\left(x+\frac{6400}{x}\right)\le 1460-2\sqrt{x\cdot\frac{6400}{x}}=1300$ ………13 分

当且仅当$x=80$时取等号.又$1300>\frac{3800}{3}$，得当 x=80 时，所获利润最大值为 1300 万元………15 分

（20）（共 15 分）

解：（Ⅰ）因为 $f(x)=ax^2+\ln x$ ，

所以 $x\in(0,+\infty)$，所以 $f'(x)=2ax+\frac{1}{x}=\frac{2ax^2+1}{x}$. ………3 分

当$a\ge 0$时，$f'(x)=\frac{2ax^2+1}{x}\ge 0$，$f(x)$在（0，$+\infty$）单调递增； ………5 分

当$a<0$时，令$f'(x)=\frac{2ax^2+1}{x}=0$，得$x_0=\sqrt{-\frac{1}{2a}}$

x	$(0,x_0)$	x_0	$(x_0,+\infty)$
$f'(x)$	+	0	−
$f(x)$	↗	极大值	↘

所以 $f(x)$ 在区间 $(0,\sqrt{-\frac{1}{2a}})$ 上单调递增，在区间 $(\sqrt{-\frac{1}{2a}},+\infty)$ 上单调递减． ………9 分

（Ⅱ）解法一：由（Ⅰ）分类讨论

当$a\ge 0$时，$f'(x)=\frac{2ax^2+1}{x}\ge 0$，$f(x)$在（0，$+\infty$）单调递增；

$f(e)=ae^2+\ln e=1+ae^2>1$.

（或其它例子，或 当$x\to+\infty$时, $f(x)=ax^2+\ln x\to+\infty$.）

$f(x)\le\frac{1}{2}$，不恒成立 ． ………11 分

当$a<0$时，$f(x)$ 在区间 $(0,\sqrt{-\frac{1}{2a}})$ 上单调递增，在区间 $(\sqrt{-\frac{1}{2a}},+\infty)$ 上单调递减.

$f(x)_{\max}=f(\sqrt{-\frac{1}{2a}})=-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\ln(-2a)$， ………13 分

令 $-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\ln(-2a)\le\frac{1}{2}$， ………14 分

得 $\ln(-2a)\ge -2$,

得 $-2a\ge e^{-2}$,即$a\le-\frac{1}{2e^2}$. ………15 分

解法二：构造新函数

若对任意 $x\in(0,+\infty)$， $f(x)\le\frac{1}{2}$ 恒成立，

即 $ax^2+\ln x\le\frac{1}{2},x>0$恒成立， ………9 分

则 $a\le\dfrac{\frac{1}{2}-\ln x}{x^2},x>0$恒成立， ………10 分

设 $g(x)=\dfrac{\frac{1}{2}-\ln x}{x^2},x\in(0,+\infty)$，

则 $g'(x)=\dfrac{2(1-\ln x)}{x^3},x\in(0,+\infty)$． ………12 分

令 $g'(x)=0$，得 $x=\mathrm{e}$．

当 $x\in(0,\mathrm{e})$ 时， $g'(x)>0$， $g(x)$ 单调递减；

当 $x\in(\mathrm{e},+\infty)$ 时， $g'(x)<0$， $g(x)$ 单调递增． ………14 分

所以 $g(x)_{\min}=g(\mathrm{e})=-\dfrac{1}{2\mathrm{e}^2}$．

所以 $a\le-\dfrac{1}{2\mathrm{e}^2}$． ………15 分

（21）（共 15 分）

解：（Ⅰ）$\{a_n\}$不是 “完全平方数列”．

$S_1=a_1=1,S_2=a_1+a_2=4,S_3=a_1+a_2+a_3=14$， 14 不是整数的完全平方数. ………4 分

（Ⅱ）存在，t=1.

因为数列$\{\mathrm{b}_n\}$的前 n 项和$T_n=(\mathrm{n}-\mathrm{t})^2$（t 是正整数），

那么 $\mathrm{b}_1=(1-t)^2$

$n\ge2$时，$T_n=(\mathrm{n}-\mathrm{t})^2$，$T_{n-1}=(\mathrm{n}-1-\mathrm{t})^2$

$n\ge2$时，$\mathrm{b}_n=T_n-T_{n-1}=(\mathrm{n}-\mathrm{t})^2-(\mathrm{n}-1-\mathrm{t})^2=2n-2t-1$

要使数列$\{|\mathrm{b}_n|\}$为“完全平方数列”，只需 $\mathrm{b}_n=|\mathrm{b}_n|$

只需 $n\ge2$，$\mathrm{n}\in N^*$时，$\mathrm{b}_n=2n-2t-1\ge0$, 恒成立

只需 $\mathrm{b}_2=2-2t-1\ge0$,

$3-2t\ge0$, t是正整数 ，t=1. ………10 分

（III） $k^2(2n-1)$

因为数列$\{a_n\}$等差数列，设 $a_n=\mathrm{d}n+b$

前n项和$\mathrm{S}_n=\dfrac{(\mathrm{dn+d+2b})n}{2}$

因为$\mathrm{S}_n=\dfrac{(\mathrm{dn+d+2b})n}{2}$是完全平方数，则$\dfrac{\mathrm{d}}{2}$是完全平方数且d+2b=0

设 $\dfrac{\mathrm{d}}{2}=\mathrm{k}^2$，$\mathrm{k}\in Z$， 所以$a_n=\mathrm{k}^2(2n\text{-}1)$ ………15 分

备 18（Ⅱ）**：**从该地区参加该活动的全体男生中随机抽取 2 人，全体女生中随机抽取 2 人，估计这 4 人中男生竞赛成在 90 分以上的人数比女生竞赛成绩在 90 分以上的人数多的概率。

解：随机抽取的 20 名学生中有女生 10 人，从女生中随机抽取 1 人，90 分以上的有 3 人，

所以女生的竞赛成绩在 90 分以上的概率估计值为 $\frac{3}{10}=0.3$.　　………2 分

从该地区参加该活动的全体男生中随机抽取 2 人，全体女生中随机抽取 2 人，估计这 4 人中男生竞赛成绩在 90 分以上的人数比女生竞赛成绩在 90 分以上的人数多的情况有 3 种情况，

$C_2^2 0.4^2 C_2^0 0.3^0 0.7^2 = 0.0784$　　………6 分

$C_2^2 0.4^2 C_2^1 0.3^1 0.7^1 = 0.0672$　　………8 分

$C_2^1 0.4^1 0.6^1 C_2^0 0.3^0 0.7^2 = 0.2352$　　………10 分

概率估计值 $C_2^2 0.4^2 C_2^0 0.3^0 0.7^2 + C_2^2 0.4^2 C_2^1 0.3^1 0.7^1 + C_2^1 0.4^1 0.6^1 C_2^0 0.3^0 0.7^2 = 0.3808$；………11 分

备 21:设等差数列 $\{a_n\}$ 的各项均为整数，且满足对任意正整数 n，总存在正整数 m，使得 $a_1+a_2+\ldots+a_n=a_m$，则称这样的数列 $\{a_n\}$ 具有性质 P.

（I）若数列 $\{a_n\}$ 的通项公式为 $a_n=2n-1$，数列 $\{a_n\}$ 是否具有性质 P？并说明理由;

（II）若 $a_1=3$，求出具有性质 P 的数列 $\{a_n\}$ 公差的所有可能值；

（III）对于给定的 a_1，具有性质 P 的数列 $\{a_n\}$ 是有限个，还是可以无穷多个？无需说明理由.

解：（1）数列 $\{a_n\}$ 不具有性质 P　（2）3，-3，1　（3）具有性质 P 的数列 $\{a_n\}$ 是有限个

关于我们

北京高考在线创办于 2014 年，隶属于北京太星网络科技有限公司，是北京地区极具影响力的中学升学服务平台。主营业务涵盖：北京新高考、高中生涯规划、志愿填报、强基计划、综合评价招生和学科竞赛等。

北京高考在线旗下拥有网站门户、微信公众平台等全媒体矩阵生态平台。平台活跃用户 40W+，网站年度流量数千万量级。用户群体立足于北京，辐射全国 31 省市。

北京高考在线平台一直秉承 ‘’ 精益求精、专业严谨 ‘’ 的建设理念，不断探索“K12 教育+互联网+大数据”的运营模式，尝试基于大数据理论为广大中学和家长提供新鲜的高考资讯、专业的高考政策解读、科学的升学规划等，为广大高校、中学和教科研单位提供“衔接和桥梁纽带”作用。

平台自创办以来，为众多重点大学发现和推荐优秀生源，和北京近百所中学达成合作关系，累计举办线上线下升学公益讲座数百场，帮助数十万考生顺利通过考入理想大学，在家长、考生、中学和社会各界具有广泛的口碑影响力

未来，北京高考在线平台将立足于北京新高考改革，基于对北京高考政策研究及北京高校资源优势，更好的服务全国高中家长和学生。