高 三 数 学

考生注意：

1. 本试卷分选择题和非选择题两部分。满分 150 分，考试时间 120 分钟。
2. 答题前，考生务必用直径 0.5 毫米黑色墨水签字笔将密封线内项目填写清楚。
3. 考生作答时，请将答案答在答题卡上。选择题每小题选出答案后，用 2B 铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑；非选择题请用直径 0.5 毫米黑色墨水签字笔在答题卡上各题的答题区域内作答，**超出答题区域书写的答案无效，在试题卷、草稿纸上作答无效。**
4. 本卷命题范围：高考范围。

一、选择题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 已知集合 $A=\{x|0<x+1<2\}$，$B=\{x|x<0$ 或 $x>2\}$，则 $A\cap B=$

A. $\{x|-1<x<0\}$　　B. $\{x|2<x<3\}$

C. $\{x|x<1$ 或 $x>2\}$　　D. $\{x|x<0$ 或 $2<x<3\}$

2. $\sin 165^\circ\cos 525^\circ=$

A. $\frac{1}{4}$　　B. $\frac{\sqrt{3}}{4}$　　C. $-\frac{1}{4}$　　D. $-\frac{\sqrt{3}}{4}$

3. 已知单位向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 满足 $|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=2|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|$，则 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 夹角的余弦值为

A. $-\frac{3}{5}$　　B. $\frac{3}{5}$　　C. $-\frac{4}{5}$　　D. $\frac{4}{5}$

4. 已知复数 z 满足 $(z-3\mathrm{i})(2-\mathrm{i})=5$，则 $|z|=$

A. $2\sqrt{2}$　　B. $2\sqrt{5}$　　C. 8　　D. 20

5. 若直线 $l:y=2x+4$ 与抛物线 $C:y^2=2px(p>0)$ 只有 1 个公共点，则 C 的焦点 F 到 l 的距离为

A. $\sqrt{5}$　　B. $2\sqrt{5}$　　C. $3\sqrt{5}$　　D. $4\sqrt{5}$

6. 已知 $\left(x+\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)^n$ 的展开式中，前三项的系数依次成等差数列，则展开式中二项式系数最大的项是

A. $\frac{35}{8}x^{\frac{1}{2}}$　　B. $7x^{\frac{7}{2}}$　　C. $\frac{35}{8}x^2$　　D. $7x^2$

7. 函数 $f(x)=2\sqrt{\cos\left(\frac{\pi}{4}-3x\right)}$ 的单调递减区间是

A. $\left[-\frac{\pi}{4}+\frac{2k\pi}{3},\frac{\pi}{12}+\frac{2k\pi}{3}\right](k\in\mathbf{Z})$　　B. $\left[\frac{\pi}{12}+\frac{2k\pi}{3},\frac{5\pi}{12}+\frac{2k\pi}{3}\right](k\in\mathbf{Z})$

C. $\left[-\frac{\pi}{12}+\frac{2k\pi}{3},\frac{\pi}{12}+\frac{2k\pi}{3}\right](k\in\mathbf{Z})$　　D. $\left[\frac{\pi}{12}+\frac{2k\pi}{3},\frac{\pi}{4}+\frac{2k\pi}{3}\right](k\in\mathbf{Z})$

8. 已知 $f(x)$ 是定义域为 $\mathbf{R}$ 的偶函数，且在 $(-\infty,0)$ 上单调递减，$a=f(\ln 1.04)$，$b=f(1.04)$，$c=f(e^{0.04})$，则

A. $a<b<c$

B. $a<c<b$

C. $c<b<a$

D. $c<a<b$

二、选择题：本题共 3 小题，每小题 6 分，共 18 分。在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求。全部选对的得 6 分，部分选对的得部分分，有选错的得 0 分。

9. 已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1=3$，$2a_{n+1}=3a_n-2$，则

A. $\{a_n-2\}$ 是等差数列

B. $\{a_{2n}\}$ 的前 n 项和为 $\frac{6}{5}\left[\left(\frac{9}{4}\right)^n-1\right]+2n$

C. $\{a_n\}$ 是单调递增数列

D. 数列 $\left\{a_{n+1}+\left(\frac{2}{3}\right)^n\right\}$ 的最小项为 4

10. 已知函数 $f(x)=\left[\frac{x+1}{3}\right]-\left[\frac{x}{3}\right]$（$x\in\mathbf{R}$，其中 $[x]$ 表示不大于 x 的最大整数），则

A. $f(x)$ 是奇函数

B. $f(x)$ 是周期函数

C. $f(x)$ 在 $[0,2)$ 上单调递增

D. $f(x)$ 的值域为 $\{0,1\}$

11. 已知正四面体 $ABCD$ 的棱长为 4，点 P 是棱 AC 上的动点（不包括端点），过点 P 作平面 β 平行于 AD、BC，与棱 AB、BD、CD 交于 Q,S,T，则

A. 该正四面体可以放在半径为 $\sqrt{7}$ 的球内

B. 该正四面体的外接球与以 A 点为球心，2 为半径的球面所形成的交线的长度为 $\frac{8\sqrt{3}}{3}\pi$

C. 四边形 $PQST$ 为矩形

D. 四棱锥 $C-PQST$ 体积的最大值为 $\frac{128\sqrt{3}}{81}$

三、填空题：本题共 3 小题，每小题 5 分，共 15 分。

12. 2023 年度，网络评选出河南最值得去的 5 大景点：洛阳龙门石窟，郑州嵩山少林寺，开封清明上河园，洛阳老君山，洛阳白云山，小张和小李打算从以上景点中各自随机选择一个去游玩，则他们都去洛阳游玩，且不去同一景点的概率为________.

13. 已知 F_1,F_2 分别是双曲线 $C:\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 的左、右焦点，过点 F_2 且垂直 x 轴的直线与 C 交于 A,B 两点，且 $\tan\angle AF_1F_2=\frac{2\sqrt{5}}{5}$，若圆 $(x-2)^2+y^2=4$ 与 C 的一条渐近线交于 M,N 两点，则 $|MN|=$________.

14. 若圆锥 SO 的母线长为 3，则圆锥 SO 体积的最大值为________.

四、解答题：本题共 5 小题，共 77 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

15.（本小题满分 13 分）

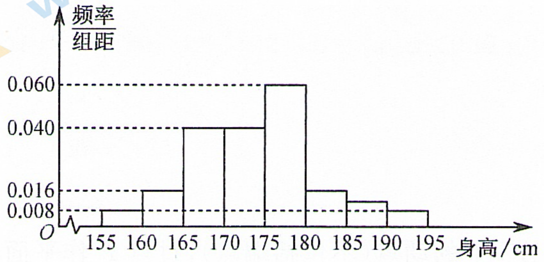
已知在△ABC 中，角 A,B,C 所对的边分别为 a,b,c，$c(\cos B-\cos C)=(c-b)\cos C$.

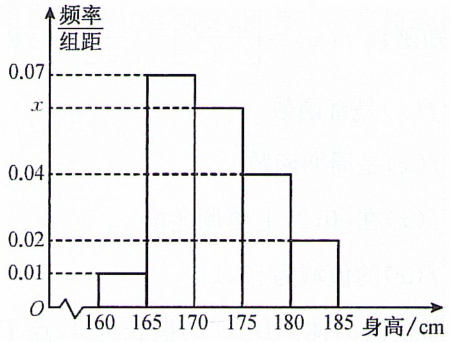
(1)若 $A\neq 2C$，证明：△ABC 是等腰三角形；

(2)若 $b=2c=4$，求 a 的值.

16.（本小题满分 15 分）

2022 年日本 17 岁男性的平均身高为 170.8 cm，同样的数据 1994 年是 170.9 cm，近 30 年日本的平均身高不仅没有增长，反而降低了 0.1 cm. 反观中国近 30 年，男性平均身高增长了约 9 cm. 某课题组从中国随机抽取了 400 名成年男性，记录他们的身高，将数据分成八组：[155,160)，[160,165)，…，[190,195]；同时从日本随机抽取了 200 名成年男性，记录他们的身高，将数据分成五组：[160,165)，[165,170)，…，[180,185]，整理得到如下频率分布直方图：





(1)由频率分布直方图估计样本中日本成年男性身高的 75%分位数；

(2)为了了解身高与蛋白质摄入量之间是否有关联，课题组调查样本中的 600 人得到如下列联表：

身高	蛋白质摄入量		合计
	丰富	不丰富	
低于 175 cm	108		
不低于 175 cm		100	
合计			600

结合频率分布直方图补充上面的列联表，并依据小概率值 $\alpha=0.001$ 的独立性检验，推断成年男性身高与蛋白质摄入量之间是否有关联？

附：$\chi^2=\dfrac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$，$n=a+b+c+d$.

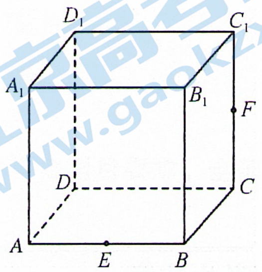
α	0.1	0.05	0.01	0.005	0.001
x_α	2.706	3.841	6.635	7.879	10.828

17.(本小题满分 15 分)

如图,正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的棱长为 2,E,F 分别为棱 AB,CC_1 的中点.

(1)请在正方体的表面完整作出过点 E,F,D_1 的截面,并写出作图过程;(不用证明)

(2)求点 B_1 到平面 EFD_1 的距离.



18.(本小题满分 17 分)

已知椭圆 $C:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$的离心率为 e,点 $A(1,e)$在 C 上,C 的长轴长为 $4e$.

(1)求 C 的方程;

(2)已知原点为 O,点 P 在 C 上,OP 的中点为 Q,过点 Q 的直线与 C 交于点 M,N,且线段 MN 恰好被点 Q 平分,判断$\overrightarrow{OM}^2\cdot\overrightarrow{ON}^2-(\overrightarrow{OM}\cdot\overrightarrow{ON})^2$ 是否为定值?若为定值,求出该定值;若不为定值,说明理由.

19.(本小题满分 17 分)

已知函数 $f(x)=\frac{a(x+1)}{e^x}+\ln x(a\in\mathbf{R})$.

(1)若 $f(x)$在$(0,+\infty)$上单调递增,求 a 的取值范围;

(2)若 $f(x)$有 2 个极值点 $x_1,x_2(x_1>x_2>0)$,求证:$a(x_1^2+x_2^2)>2\sqrt{e}$.