2020 北京人大附中高二（上）期末

数　　学

一、单项选择题（本大题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分在每小题列出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.）

1. （5 分）复数 $z=a+i$（$i\in R$）的实部是虚部的 2 倍，则 a 的值为（　　）

A. $-\frac{1}{2}$　　B. $\frac{1}{2}$　　C. -2　　D. 2

2. （5 分）已知向量 $\vec{a}=(1,2,1)$，$\vec{b}=(-1,0,4)$，则 $\vec{a}+2\vec{b}=$（　　）

A. $(-1,2,9)$　　B. $(-1,4,5)$　　C. $(1,2,-7)$　　D. $(1,4,9)$

3. （5 分）若 $a>0$，则不等式 $\frac{1}{x}<a$ 等价于（　　）

A. $0<\frac{1}{a}<x$　　B. $-\frac{1}{a}<x<0$　　C. $x<-\frac{1}{a}$　　D. $x>\frac{1}{a}$ 或 $x<0$

4. （5 分）已知等差数列 $\{a_n\}$ 满足 $4a_3=3a_2$，则 $\{a_n\}$ 中一定为零的项是（　　）

A. a_6　　B. a_8　　C. a_{10}　　D. a_{12}

5. （5 分）设曲线 C 是双曲线，则"曲线 C 的方程为 $x^2-\frac{y^2}{3}=1$"是"曲线 C 的离心率为 2"的（　　）

A. 充分不必要条件　　B. 必要不充分条件

C. 充要条件　　D. 既不充分也不必要条件

6. （5 分）已知 x，$y>0$ 且 $x+y=4$，则下面结论正确的是（　　）

A. xy 的最大值是 4　　B. xy 的最小值是 4

C. $\exists x$，y，$x+y\le\sqrt{xy}$　　D. $\forall x$，y，$x+y\le 2\sqrt{xy}$

7. （5 分）某企业为激励员工创新，计划逐年加大研发资金投入．若该公司 2020 年全年投入研发资金 130 万元，在此基础上，每年投入的研发资金比上一年增长 12%，则该企业全年投入的研发资金开始超过 200 万元的年份是（　　）

A. 2022 年　　B. 2023 年　　C. 2024 年　　D. 2025 年

8．（5 分）在棱长为 2 的正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，若点 P 是棱上一点（含顶点），则满足 $\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PC_1}=-1$ 的点 P 的个数为（　　）

A．6　　B．8　　C．12　　D．24

二、填空（本大题共 6 小题，每小题 5 分，共 30 分）

9．（5 分）已知双曲线 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{3}=1$，（$a>0$）的左焦点是（－2，0），则 a 的值为______．

10．（5 分）已知复数 z 满足 $z(1+i)=2-4i$，那么 $z=$______．

11．（5 分）已知数列$\{a_n\}$满足 $\frac{a_{n+1}}{n+1}=\frac{a_n}{n}$，且 $a_5=15$，则 $a_8=$______．

12．（5 分）设 a，b，c 是任意实数，能够说明"若 $c<b<a$ 且 $ac<0$，则 $ab<ac$"是假命题的一组整数 a，b，c 的值依次为______．

13．（5 分）已知三棱锥 $O-ABC$，M，N 分别是对边 OA，BC 的中点，点 G 在 MN 上，且 $MN=2GN$，设 $\overrightarrow{OA}=\vec{a}$，$\overrightarrow{OB}=\vec{b}$，$\overrightarrow{OC}=\vec{c}$，则 $\overrightarrow{OG}=$______（用基底（$\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$）表示）

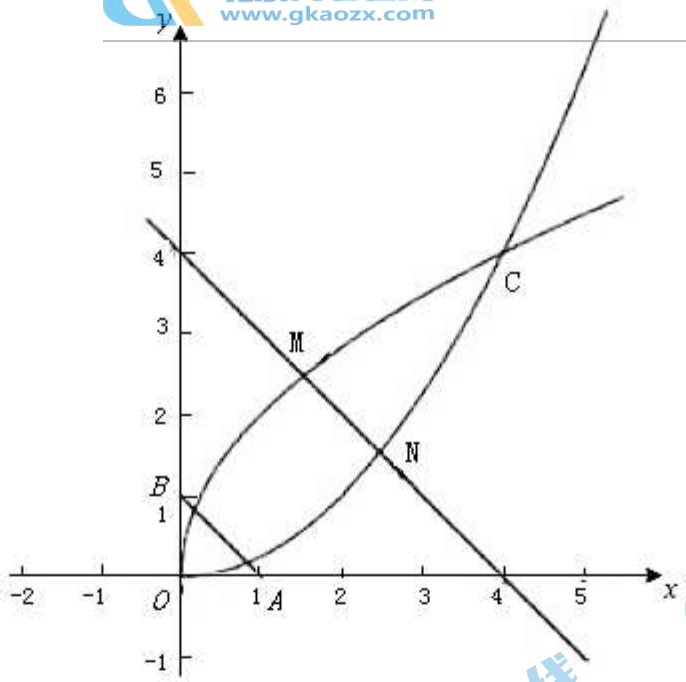
14．（5 分）如图，曲线 C_1：$y^2=4x$（$y\geq0$）和曲线 C_2：$x^2=4y$（$x\geq0$）在第一象限的交点为 C，已知 A（1，0），B（0，1），直线 $x+y=m$，$m\in$（0，8）分别与 C_1 和 C_2 交于 M，N 两点，且 M，N，A，B 不共线．以下关于四边形 $ABMN$ 描述中：

①$\forall m\in$（0，8），四边形 $ABMN$ 的对角线 $AM=BN$；

②$\exists m\in$（0，8），四边形 $ABMN$ 为正方形；

③$\exists m\in$（0，8），使得 $|MN|=\frac{3}{2}$．

其中所有正确结论的序号是：______．



三、解答题（本大题共 3 小题，共 30 分.解答应写出文字说明过程或演算步骤.）

15．（8 分）在等比数列$\{a_n\}$中，$a_2=1$，$a_5=8$，$n\in N^*$.

（I）求数列$\{a_n\}$的通项公式；

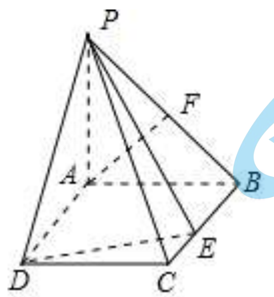
（II）设数列$\{a_n\}$的前 n 项和为 S_n，若 $S_n<100$，求 n 的最大值.

16．（12 分）如图，在四棱锥 $P-ABCD$ 中，底面 $ABCD$ 为正方形，$PA\perp$平面 $ABCD$，$AB=PA=1$，F 是 PB 的中点，E 为 BC 上一点.

（I）求证：$AF\perp$平面 PBC；

（II）若 $BE=\frac{1}{2}$，求直线 PB 和直线 DE 所成角的余弦值；

（III）当 BE 为何值时，直线 DE 与平面 AFC 所成角为 45°？



17．（10 分）已知椭圆 C：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$（$a>b>0$）的离心率为$\frac{\sqrt{3}}{2}$，过 C 的左焦点作 x 轴的垂线交 C 与 P、Q 两点，且$|PQ|=1$.

（I）求椭圆 C 的标准方程；

（II）椭圆 C 的短轴的上下端点分别为 A，B，点 M（m，$\frac{1}{2}$），满足 $m\neq0$，且 $m\neq\pm\sqrt{3}$，若直线 AM，BM 分别与椭圆 C 交于 E，F 两点，试判断：是否存在点 M，使得△ABF 的面积与△BOE 的面积相等？若存在，求 m 的值；若不存在，说明理由．

二、不定项选择题（本大题共 3 小题，每小题 6 分，共 18 分在每小题列出的四个选项中，可能有一项或几项是符合题目要求的）

18．（6 分）不等式组 $\begin{cases}x+y\geqslant1\\x-2y\leqslant4\end{cases}$ 的解集记为 D，下列四个命题中真命题是（　　）

A．∀（x，y）∈D，$x+2y\geq-2$　　　B．∃（x，y）∈D，$x+2y\geq2$

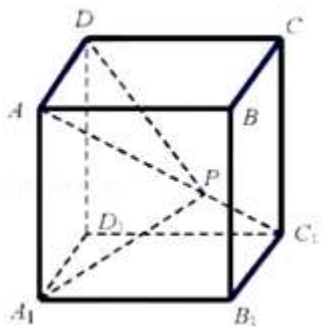
C．∀（x，y）∈D，$x+2y\leq3$　　　D．∃（x，y）∈D，$x+2y\leq-1$

19．（6 分）已知 a、b∈R，“$a<b$”是“$2^a<3^b$”的（　　）

A．充分而不必要条件　　　B．必要而不充分条件

C．充分必要条件　　　D．既不充分也不必要条件

20．（6 分）如图，在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，点 P 是对角线 AC_1 上一动点，在点 P 从顶点 A 移动到顶点 C_1 的过程中，下列结论中正确的有（　　）



A．二面角 $P-A_1D-B_1$ 的取值范围是$[0,\frac{\pi}{2}]$

B．直线 AC_1 与平面 A_1DP 所成的角逐渐增大

C．存在一个位置，使得 $AC_1\perp$平面 A_1DP

D．存在一个位置，使得平面 A_1DP∥平面 B_1CD_1

二、填空题（本大题共 3 小题，每小题 6 分，共 18 分，）

21．（6 分）若复数 z 满足：$z^2-2az+a^2+4=0$，且$|z|=\sqrt{5}$，则实数 $a=$______．

22. （6分）已知集合 $A=\{x|x=a_3\times3^0+a_2\times3^{-1}+a_1\times3^{-2}+a_0\times3^{-3}\}$，其中 $a_k\in\{0，1，2\}$，$k=0，1，2，3$，将集合 A 中的元素从小到大排列得到数列 $\{b_n\}$，设 $\{b_n\}$ 的前 n 项和为 S_n，则 $b_3=$______，$S_{15}=$______.

23. （6分）曲线 C 是平面内与三个顶点 F_1（－1，0），F_2（1，0）和 F_3（0，1）的距离的和等于 $2\sqrt{2}$ 的点的轨迹，给出下列三个结论：

①曲线 C 关于 x 轴、y 轴均对称；

②曲线 C 上存在一点 P，使得 $|PF_3|=\frac{2\sqrt{2}}{3}$；

③若点 P 在曲线 C 上，则△F_1PF_2 的面积最大值是 1.

其中所有真命题的序号是：______.

参考答案

一、单项选择题（本大题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分在每小题列出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.）

1. 【答案】D

【分析】直接利用复数的基本概念求解.

【解答】解：∵复数 $z=a+i$（$i\in R$）的实部是虚部的 2 倍，

$\therefore a=2$.

故选：D.

【点评】本题考查复数的基本概念，是基础题.

2. 【答案】A

【分析】利用向量坐标运算性质即可得出.

【解答】解：$\vec{a}+2\vec{b}=$（1，2，1）+2（﹣1，0，4）＝（﹣1，2，9）.

故选：A.

【点评】本题考查了向量坐标运算性质，考查了推理能力与计算能力，属于基础题.

3. 【答案】D

【分析】根据$\frac{1}{x}<a$可得$\frac{1-ax}{x}<0$，再结合 $a>0$ 得到其等价形式即可.

【解答】解：∵$a>0$，∴当$\frac{1}{x}<a$时，有

$\frac{1-ax}{x}<0\Leftrightarrow x(ax-1)>0\Leftrightarrow x>\frac{1}{a}$或 $x<0$.

故选：D.

【点评】本题考查了分式不等式的解法，属基础题.

4. 【答案】A

【分析】利用通项公式即可得出.

【解答】解：设等差数列$\{a_n\}$的公差为 d，∵$4a_3=3a_2$，

∴$4(a_1+2d)=3(a_1+d)$，可得：$a_1+5d=0$，

∴$a_6=0$，

则$\{a_n\}$中一定为零的项是 a_6．

故选：A．

【点评】本题考查了等差数列的通项公式，考查了推理能力与计算能力，属于中档题．

5．【答案】A

【分析】根据双曲线的离心率结合充分条件和必要条件的定义进行判断即可．

【解答】解：若曲线 C 的方程为 $x^2-\frac{y^2}{3}=1$，

则 $a^2=1$，$b^2=3$，

$c^2=a^2+b^2=1+3=4$，即 $c=2$，

所以双曲线 C 的离心率 $e=\frac{c}{a}=2$，

所以曲线 C 的方程为 $x^2-\frac{y^2}{3}=1$”是“曲线 C 的离心率为 2”的充分条件，

若曲线 C 的离心率为 2，

则 $e=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{a}=2$，

所以 $b^2=3a^2$，

当 $a^2=2$，$b^2=12$，

曲线 C 的方程为$\frac{x^2}{2}-\frac{y^2}{12}=1$，

所以曲线 C 的方程为 $x^2-\frac{y^2}{3}=1$”是“曲线 C 的离心率为 2”不必要条件，

故选：A．

【点评】本题主要考查充分条件和必要条件的判断，结合双曲线的渐近线的性质是解决本题的关键．

6. 【答案】A

【分析】结合基本不等式即可判断各选项.

【解答】解：因为 x，$y>0$ 且 $x+y=4$，

由基本不等式可得 $xy\leqslant(\frac{x+y}{2})^2=4$，当且仅当 $x=y=2$ 时取等号，即 xy 的最大值 4，

根据基本不等式可得，$\forall x$，$y>0$ 时，都有 $x+y\geqslant2\sqrt{xy}$.

故选：A.

【点评】本题主要考查了基本不等式的简单应用，属于基础试题.

7. 【答案】C

【分析】设 n 年开始超过 200 万元，则 $130\times(1+12\%)^{n-2020}>200$，解出 n 即可.

【解答】解：设 n 年开始超过 200 万元，则 $130\times(1+12\%)^{n-2020}>200$，

$\therefore(n-2020)\times lg1.12>lg2-lg1.3$，

$\therefore n-2020>\frac{lg2-lg1.3}{lg1.12}\approx\frac{0.30-0.11}{0.05}=3.8$，

$\therefore n>2023.8$，

∴从 2024 年开始超过 200 万元，

故选：C.

【点评】本题主要考查了函数的实际运用，是中档题.

8. 【答案】C

【分析】建立空间直角坐标系，则点 A（2，0，0），C_1（0，2，2），考虑 P 在上底面的棱上，设点 P 的坐标为（x，y，2），则由题意可得 $0\leq x\leq2$，$0\leq y\leq2$，计算 $\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PC_1}=x^2-2x+y^2-2y=(x-1)^2+(y-1)^2-2=-1$，即可得出结论.

【解答】解：如图所示：以点 D 为原点，以 DA 所在的直线为 x 轴，以 DC 所在的直线为 y 轴，以 DD_1 所在的直线为 z 轴，建立空间直角坐标系.

则点 A（2，0，0），C_1（0，2，2），考虑 P 在上底面的棱上，设点 P 的坐标为（x，y，2），则由题意可得 $0\leq x\leq2$，$0\leq y\leq2$.

$\therefore\overrightarrow{PA}=(2-x,\ -y,\ -2)$，$\overrightarrow{PC_1}=(-x,\ 2-y,\ 0)$，

∴$\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PC_1}=-x(2-x)-y(2-y)+0=x^2-2x+y^2-2y=(x-1)^2+(y-1)^2-2=-1$，

∵点 P 是棱上一点（含顶点），

∴ $(x-1)^2+(y-1)^2=1$ 与正方形 $A_1B_1C_1D_1$ 切于 4 个点，

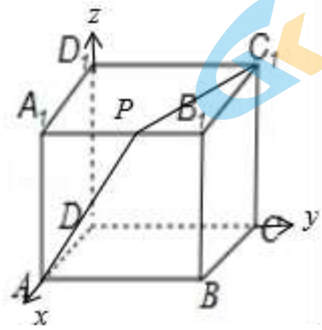
同理 P 在右侧面的棱上，也有 4 个点，

下底面中 $P(2,1,0)$，$\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PC_1}=(0,-1,0)\cdot(-2,1,2)=-1$，$P(0,1,0)$，$\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PC_1}=(2,-1,0)\cdot(0,1,2)=-1$，

内侧面，$P(0,0,1)$，$\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PC_1}=(2,0,-1)\cdot(0,2,1)=-1$，$P(0,2,1)$，$\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PC_1}=(2,-2,-1)\cdot(0,0,1)=-1$，

∴满足$\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PC_1}=-1$的点 P 的个数为 12

故选：C.



【点评】本题主要考查向量在几何中的应用，两个向量的数量积公式，两个向量坐标形式的运算，属于中档题.

二、填空（本大题共 6 小题，每小题 5 分，共 30 分）

9. 【答案】见试题解答内容

【分析】本题根据可得 $c^2=4$，$b^2=3$，再根据 $a^2=b^2+c^2$ 即可计算出结果.

【解答】解：由题意，可知 $c=2$，即 $c^2=4$.

∵$b^2=3$，

∴$a^2=b^2+c^2=3+4=7$.

∴$a=\sqrt{7}$.

故答案是：$\sqrt{7}$.

【点评】本题主要考查椭圆的基础知识及基本计算．本题属基础题．

10．【答案】见试题解答内容

【分析】把已知的等式变形，然后利用复数代数形式的乘除运算化简得答案．

【解答】解：由 $z(1+i)=2-4i$，得

$$z=\frac{2-4i}{1+i}=\frac{(2-4i)(1-i)}{(1+i)(1-i)}=\frac{-2-6i}{2}=-1-3i.$$

故答案为：$-1-3i$．

【点评】本题考查复数代数形式的乘除运算，是基础的计算题．

11．【答案】见试题解答内容

【分析】利用递推关系式，通过累积法求解即可．

【解答】解：数列$\{a_n\}$满足$\frac{a_{n+1}}{n+1}=\frac{a_n}{n}$，

可得$\frac{a_8}{a_7}\cdot\frac{a_7}{a_6}\cdot\frac{a_6}{a_5}=\frac{8}{7}\times\frac{7}{6}\times\frac{6}{5}$，

可得 $a_8=a_5\times\frac{8}{5}=24$．

故答案为：24．

【点评】本题考查数列的递推关系式的应用，考查转化思想以及计算能力．

12．【答案】见试题解答内容

【分析】根据不等式的关系判断出 $a>0$，$c<0$，b 任意，利用特殊值法进行判断即可．

【解答】解：若 $c<b<a$ 且 $ac<0$，

则 $a>0$，$c<0$，b 任意，

则取 $a=1$，$b=0$，$c=-1$，

则满足条件，但 $ab<ac$ 不成立，

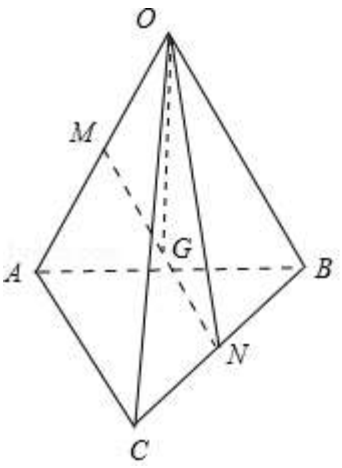
故答案为：1，0，-1．

【点评】本题主要考查命题的真假判断，利用特殊值法是解决本题的关键．比较基础．

13．【答案】见试题解答内容

【分析】可画出图形，根据条件可知 G 为 MN 的中点，然后连接 ON，从而可得出$\overrightarrow{OG}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{ON})$，根据 M，N 是边 OA，BC 的中点即可用$\overrightarrow{a}$，$\overrightarrow{b}$，$\overrightarrow{c}$表示出$\overrightarrow{OG}$.

【解答】解：如图，



∵点 G 在 MN 上，且 $MN=2GN$，

∴G 为 MN 的中点，连接 ON，且 M，N 分别是对边 OA，BC 的中点，则：

$\overrightarrow{OG}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{ON})$

$=\frac{1}{4}(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC})$

$=\frac{1}{4}(\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b}+\overrightarrow{c})$.

故答案为：$\frac{1}{4}(\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b}+\overrightarrow{c})$.

【点评】本题考查了向量加法的平行四边形法则，向量数乘的几何意义，考查了计算能力，属于基础题.

14. 【答案】见试题解答内容

【分析】A（1，0），B（0，1），可得$|AB|=\sqrt{2}$，$k_{AB}=-1$．两点 A，B 关于直线 $y=x$ 对称．直线 MN 方程为：$x+y=m$，$m\in$（0，8），斜率 $k_{MN}=-1$，且 M，N，A，B 不共线．$MN/\!/AB$．由曲线 C_1：$y^2=4x$（$y\geq0$）和曲线 C_2：$x^2=4y$（$x\geq0$），可得：两条曲线关于直线 $y=x$ 对称．可得四边形 $ABMN$ 为等腰梯形或矩形．即可判断出①正确．联立$\begin{cases}y^2=4x\\x+y=m\end{cases}$，解得 M 坐标，得出点 M 到直线 $y=x$ 的距离 d，可得$|MN|=2d=\sqrt{2}|m+4-4\sqrt{1+m}|$，进而判断出②③是否正确.

【解答】解；A（1，0），B（0，1），∴$|AB|=\sqrt{2}$，$k_{AB}=-1$．两点 A，B 关于直线 $y=x$ 对称.

∵直线 MN 方程为：$x+y=m$，$m\in$（0，8），斜率 $k_{MN}=-1$，且 M，N，A，B 不共线.

$\therefore MN // AB$.

由曲线 C_1：$y^2=4x$（$y\geq 0$）和曲线 C_2：$x^2=4y$（$x\geq 0$），可得：两条曲线关于直线 $y=x$ 对称.

可得四边形 $ABMN$ 为等腰梯形或矩形.

因此①$\forall m\in$（0，8），四边形 $ABMN$ 的对角线 $AM=BN$，正确；

②联立$\begin{cases}y^2=4x\\x+y=m\end{cases}$，解得 $x_M=m+2-2\sqrt{1+m}$，$y_M=2\sqrt{1+m}-2$，

$\therefore$点 M 到直线 $y=x$ 的距离 $d=\dfrac{|m+4-4\sqrt{1+m}|}{\sqrt{2}}$，

$\therefore |MN|=2d=\sqrt{2}|m+4-4\sqrt{1+m}|$，

令$|MN|=|AB|$，可得：$|m+4-4\sqrt{1+m}|=1$，解得：$m=3$，

可得 M（1，2），$k_{MB}=1$，$\therefore MB\perp AB$.

$|MA|=\sqrt{2}=|AB|$，因此$\exists m\in$（0，8），四边形 $ABMN$ 为正方形.

因此②正确.

③令$|MN|=\dfrac{3}{2}$. $\therefore \sqrt{2}|m+4-4\sqrt{1+m}|=\dfrac{3}{2}$，无解.

因此不存在 $m\in$（0，8），使得$|MN|=\dfrac{3}{2}$.

其中所有正确结论的序号是：①②.

【点评】本题考查了抛物线的图象与性质、图象的对称性、方程的解法，考查了数形结合方法、推理能力与计算能力，属于中档题.

三、解答题（本大题共 3 小题，共 30 分.解答应写出文字说明过程或演算步骤.）

15. 【答案】见试题解答内容

【分析】（I）由已知结合等比数控的性质可求公比 q，然后结合通项公式即可求解；

（II）结合等比数列的通项公式，即可求解 n

【解答】解：（I）因为 $a_2=1$，$a_5=8$，

所以 $q^3=\dfrac{a_5}{a_2}=8$，故 $q=2$，

$\therefore a_n = a_2 q^{n-2} = 2^{n-2}$，

（II）$S_n = \dfrac{\frac{1}{2}(1-2^n)}{1-2} = \dfrac{1}{2}(2^n - 1) < 100$，

则 $2^n < 201$，

由于 $2^7 = 128$，$2^8 = 256$

满足条件的 $n = 7$

【点评】本题主要考查了等比数列的通项公式及求和公式的简单应用，属于中档试题.

16. 【答案】见试题解答内容

【分析】（I）推导出 $BC \perp AB$，$BC \perp PA$，从而 $BC \perp$ 平面 PAB，进而 $BC \perp AF$，推导出 $AF \perp PB$，由此能证明 $AF \perp$ 平面 PBC.

（II）以 A 为原点，AD 为 x 轴，AB 为 y 轴，AP 为 z 轴，建立空间直角坐标系，利用向量法能求出直线 PB 和直线 DE 所成角的余弦值.

（III）求出平面 AFC 的法向量，利用向量法能求出 BE.

【解答】解：（I）证明：∵在四棱锥 $P-ABCD$ 中，底面 $ABCD$ 为正方形，$PA \perp$ 平面 $ABCD$，

$\therefore BC \perp AB$，$BC \perp PA$，

$\because AB \cap BC = B$，$\therefore BC \perp$ 平面 PAB，

$\because AF \subset$ 平面 PAB，$\therefore BC \perp AF$，

$\because AB = PA = 1$，F 是 PB 的中点，$\therefore AF \perp PB$，

$\because BC \cap PB = B$，$\therefore AF \perp$ 平面 PBC.

（II）解：以 A 为原点，AD 为 x 轴，AB 为 y 轴，AP 为 z 轴，建立空间直角坐标系，

$\because BE = \dfrac{1}{2}$，$\therefore P(0, 0, 1)$，$B(0, 1, 0)$，$D(1, 0, 0)$，$E(\dfrac{1}{2}, 1, 0)$，

$\overrightarrow{PB} = (0, 1, -1)$，$\overrightarrow{DE} = (-\dfrac{1}{2}, 1, 0)$，

设直线 PB 和直线 DE 所成角为 θ，

则 $\cos\theta=\dfrac{|\overrightarrow{PB}\cdot\overrightarrow{DE}|}{|\overrightarrow{PB}|\cdot|\overrightarrow{DE}|}=\dfrac{1}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{\frac{5}{4}}}=\dfrac{\sqrt{10}}{5}$.

∴直线 PB 和直线 DE 所成角的余弦值为$\dfrac{\sqrt{10}}{5}$.

（III）解：设 $BE=t$，（$0\le t\le 1$），则 E（t，1，0），F（0，$\frac{1}{2}$，$\frac{1}{2}$），C（1，1，0），

$\overrightarrow{AF}=$（0，$\frac{1}{2}$，$\frac{1}{2}$），$\overrightarrow{AC}=$（1，1，0），$\overrightarrow{ED}=$（$1-t$，-1，0），

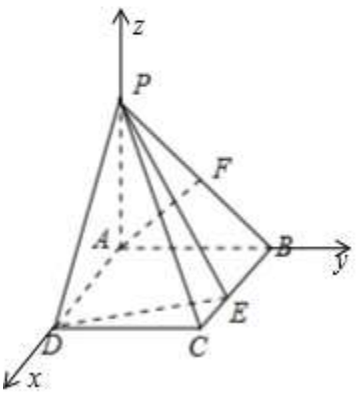
设平面 AFC 的法向量$\vec{n}=$（x，y，z），

则$\begin{cases}\vec{n}\cdot\overrightarrow{AF}=\frac{1}{2}y+\frac{1}{2}z=0\\ \vec{n}\cdot\overrightarrow{AC}=x+y=0\end{cases}$，取 $x=1$，得$\vec{n}=$（1，-1，1），

∵直线 DE 与平面 AFC 所成角为 45°，

∴$\sin45°=\dfrac{|\overrightarrow{ED}\cdot\vec{n}|}{|\overrightarrow{ED}|\cdot|\vec{n}|}=\dfrac{|2-t|}{\sqrt{(1-t)^2+1}\cdot\sqrt{3}}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，

由 $0\le t\le 1$，解得 $t=\sqrt{3}-1$，∴$BE=\sqrt{3}-1$.



【点评】本题考查考查线面垂直的证明，考查线面角的余弦值、线段长的求法，考查空间中线线、线面、面面间的位置关系等基础知识，考查运算求解能力，是中档题.

17. 【答案】见试题解答内容

【分析】（I）由题可知，点 P 的坐标为$(-c，\frac{1}{2})$，代入椭圆中，再结合离心率为$\frac{\sqrt{3}}{2}$和 $a^2=b^2+c^2$，即可求得椭圆标准方程；

（II）由 A、M 两点的坐标写出直线 AE 的方程，由 B、M 两点的坐标写出直线 BF 的方程，再分别与椭圆联立解出 x 的值即可得到 x_E 和 x_F，然后结合△ABF 的面积与△BOE 的面积相等，列出关于 m 的方程，解之即可.

【解答】解：（I）∵过 C 的左焦点作 x 轴的垂线交 C 与 P、Q 两点，且$|PQ|=1$，∴不妨设点 P 的坐标为 $(-c,\ \frac{1}{2})$，

代入椭圆方程有，$\frac{c^2}{a^2}+\frac{1}{4b^2}=1$，

又∵离心率为$\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{c}{a}$，且 $a^2=b^2+c^2$，∴$a^2=4$，$b^2=1$，

故椭圆方程为$\frac{x^2}{4}+y^2=1$.

（II）由 A（0，1）和 M（m，$\frac{1}{2}$）可知直线 AE 的方程为$y=-\frac{1}{2m}x+1$，

与椭圆$\frac{x^2}{4}+y^2=1$联立得，$(\frac{1}{4}+\frac{1}{4m^2})x^2-\frac{1}{m}x=0$，解得 $x=0$ 或$\frac{4m}{m^2+1}$，∴ $x_E=\frac{4m}{m^2+1}$，

同理可得，直线 BF 的方程为$y=\frac{3}{2m}x-1$，$x_F=\frac{12m}{m^2+9}$，

∵△ABF 的面积与△BOE 的面积相等，∴$\frac{1}{2}\bullet|AB|\bullet|x_F|=\frac{1}{2}\bullet|OB|\bullet|x_E|$，

∴ $2\times\left|\frac{12m}{m^2+9}\right|=\left|\frac{4m}{m^2+1}\right|$，解得 $m=\pm\frac{\sqrt{15}}{5}$.

故存在点 M 符合题意，此时 $m=\pm\frac{\sqrt{15}}{5}$.

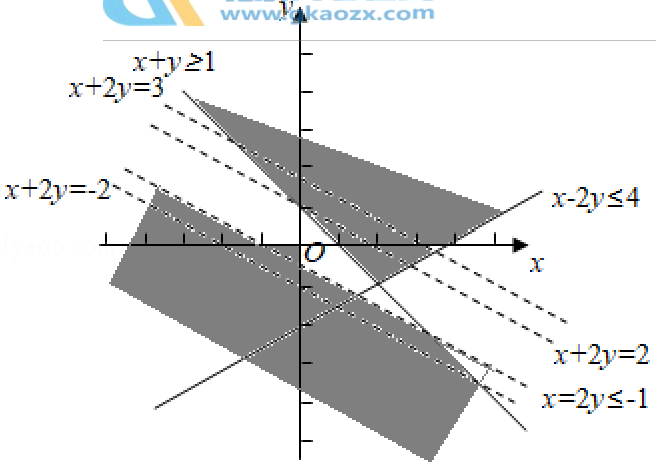
【点评】本题考查直线与椭圆的位置关系，解题的关键是由椭圆与直线联立得出点 E、F 的横坐标，考查了学生分析问题的能力和运算能力，属于中档题.

二、不定项选择题（本大题共 3 小题，每小题 6 分，共 18 分在每小题列出的四个选项中，可能有一项或几项是符合题目要求的）

18. 【答案】AB

【分析】作出不等式组$\begin{cases}x+y\geqslant 1\\ x-2y\leqslant 4\end{cases}$的表示的区域 D，对四个选项逐一分析即可.

【解答】解：作出图形如下：



由图知，区域 D 为直线 $x+y=1$ 与 $x-2y=4$ 相交的上部角型区域，

A：区域 D 在 $x+2y\geq-2$ 区域的上方，故：$\forall$（x，y）$\in D$，$x+2y\geq-2$ 成立；

B：在直线 $x+2y=2$ 的右上方和区域 D 重叠的区域内，$\exists$（x，y）$\in D$，$x+2y\geq2$，故 p_2：$\exists$（x，y）$\in D$，$x+2y\geq2$ 正确；

C：由图知，区域 D 有部分在直线 $x+2y=3$ 的上方，因此 p_3：$\forall$（x，y）$\in D$，$x+2y\leq3$ 错误；

D：$x+2y\leq-1$ 的区域（左下方的虚线区域）恒在区域 D 下方，故 p_4：$\exists$（x，y）$\in D$，$x+2y\leq-1$ 错误；

故选：AB．

【点评】本题考查命题的真假判断与应用，着重考查作图能力，熟练作图，正确分析是关键，属于难题．

19．【答案】D

【分析】根据不等式的性质，利用充分条件和必要条件的定义进行判断．

【解答】解：若 $a=3$，$b=2$，则满足"$2^a<3^b$"，但 $a<b$ 不成立，即必要性不成立，

若 $a=-3$，$b=-2$，满足 $a<b$，但"$2^a<3^b$"不成立，即充分性不成立，

故，"$a<b$"是"$2^a<3^b$"的既不充分也不必要条件，

故选：D．

【点评】本题主要考查充分条件和必要条件的判断，根据不等式的性质是解决本题的关键．

20．【答案】ACD

【分析】点 P 由 A 点移动到 AC_1 中点的过程中，二面角 $P-A_1D-B_1$ 逐渐由 90°减小至 0，再由对称性即可判断 A 选项；

找特殊点，令点 P 分别与点 A 和点 C_1 重合，找出相应位置的线面角，并比较二者大小即可判断 B 选项；

当点 P 为平面 A_1BD 与直线 AC_1 的交点时，根据空间中线面平行或垂直的判定定理与性质定理可判断 CD 选项．

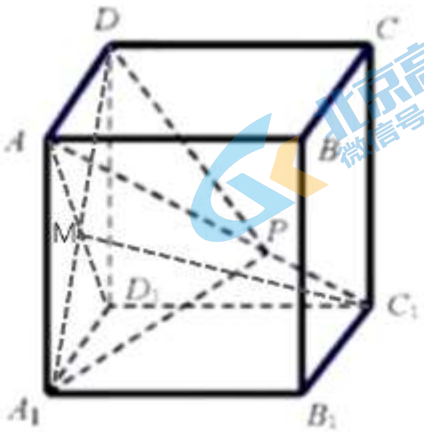
【解答】解：对于 A，当 P 与 A 重合时，二面角 $A-A_1D-B_1$ 为 $90°$，点 P 由 A 点移动到 AC_1 中点的过程中，二面角 $P-A_1D-B_1$ 逐渐减小至 0，

由对称性可知，当 P 由 AC_1 中点移动到点 C_1 的过程中，二面角 $P-A_1D-B_1$ 由 0 逐渐增大至 $90°$，即 A 正确；

对于 B，当点 P 与 A 重合时，$\angle C_1AD_1$ 即为所求，此时有 $\tan\angle C_1AD_1=\frac{C_1D_1}{AD_1}=\frac{\sqrt{2}}{2}$，

当 P 与 C_1 重合时，连接 AD_1，A_1D 相交于点 M，则 $\angle AC_1M$ 即为所求，此时有 $\tan\angle AC_1M=\frac{AM}{C_1M}=\frac{\sqrt{3}}{3}<\frac{\sqrt{2}}{2}$，

所以 $\angle AC_1M<\angle C_1AD_1$，即直线 AC_1 与平面 A_1DP 所成的角并不是逐渐增大，所以 B 错误；



对于 C，当点 P 为平面 A_1BD 与直线 AC_1 的交点时，连接 AD_1，则 $A_1D\perp AD_1$，

又因为 $C_1D_1\perp$ 平面 ADD_1A_1，$A_1D\subset$ 平面 ADD_1A_1，所以 $A_1D\perp C_1D_1$，

又 $C_1D_1\cap AD_1=D_1$，所以 $A_1D\perp$ 平面 AC_1D_1，所以 $AC_1\perp A_1D$．同理可得，$AC_1\perp A_1B$．

因为 $A_1D\cap A_1B=A_1$，$A_1D\subset$ 平面 A_1DP，$A_1B\subset$ 平面 A_1DP，所以 $AC_1\perp$ 平面 A_1DP，即 C 正确；

对于 D，当点 P 为平面 A_1BD 与直线 AC_1 的交点时，因为 $BD\parallel B_1D_1$，$BD\not\subset$ 平面 B_1CD_1，$B_1D_1\subset$ 平面 B_1CD_1，所以 $BD\parallel$ 平面 B_1CD_1，

同理可得，$A_1B\parallel$ 平面 B_1CD_1，又因为 $BD\cap A_1B=B$，$BD\subset$ 平面 A_1DP，$A_1B\subset$ 平面 A_1DP，所以平面 $A_1DP\parallel$ 平面 B_1CD_1，即 D 正确．

故选：ACD.

【点评】本题考查空间立体几何的综合问题，包含二面角、线面角与线面位置关系等，知识面比较广，考查学生空间立体感和推理论证能力，属于中档题.

二、填空题（本大题共 3 小题，每小题 6 分，共 18 分，）

21. 【答案】见试题解答内容

【分析】根据题意，设 $z=x+yi$（x，$y\in R$）是 $z^2-2az+a^2+4=0$ 的一个根，由复数的性质可得 $\overline{z}=x-yi$ $z^2-2az+a^2+4=0$ 的另外一个根，进而可得 $z\bullet\overline{z}=a^2+4=5$，解可得 a 的值，即可得答案.

【解答】解：设 $z=x+yi$（x，$y\in R$）是 $z^2-2az+a^2+4=0$ 的一个根，

则 $\overline{z}=x-yi$ 是 $z^2-2az+a^2+4=0$ 的另外一个根，

则有 $z\bullet\overline{z}=a^2+4=5$，即 $a^2=1$，

解可得 $a=\pm1$；

故答案为：±1.

【点评】本题考查复数的计算，涉及复数方程的解法，属于基础题.

22. 【答案】见试题解答内容

【分析】由题意可知 a_0，a_1，a_2，a_3 有 3 种取法（均可取 0，1，2），判断求解 b_3，求出数列的各项，判断数列的特征，利用数列求和即可求得 A 中 S_{15} 之和.

【解答】解：由题意可知，则 $b_3=0\times3^0+0\times3^{-1}+0\times3^{-2}+2\times3^{-3}=\dfrac{2}{27}$.

集合 $A=\{x|x=a_3\times1+a_2\times\dfrac{9}{27}+a_1\times\dfrac{3}{27}+a_0\times\dfrac{1}{27}\}$，其中 $a_k\in\{0，1，2\}$，$k=0，1，2，3$，将集合 A 中的元素从小到大排列得到数列$\{b_n\}$，前 15 项：

$0，\dfrac{1}{27}，\dfrac{2}{27}，\dfrac{3}{27}，\dfrac{4}{27}，\dfrac{5}{27}，\dfrac{6}{27}，\dfrac{7}{27}，\dfrac{8}{27}，\dfrac{9}{27}，\dfrac{10}{27}，\dfrac{11}{27}，\dfrac{12}{27}，\dfrac{13}{27}，\dfrac{14}{27}$；

$$S_{15}=0+\frac{1}{27}+\frac{2}{27}+\frac{3}{27}+\frac{4}{27}+\frac{5}{27}+\ldots+\frac{14}{27}=\frac{\frac{1+14}{2}\times14}{27}=\frac{35}{9}.$$

$=\dfrac{280}{27}$.

故答案为：$\dfrac{2}{27}$；$\dfrac{35}{9}$.

【点评】本题考查数列的求和，数列的项的求法，以及集合的表示方法，考查转化思想的应用，属于难题．

23. 【答案】见试题解答内容

【分析】设曲线 C 上任意一点坐标为 P（x，y），从而得出轨迹方程．在①中，用 $-x$，$-y$ 分别代替 x，y 即可判断；②若$|PF_3|=\frac{2\sqrt{2}}{3}$，则 $|PF_1|+|PF_2|=\frac{4\sqrt{2}}{3}<|F_1F_2|=2$ 即可判断；③满足条件的所有点 P 都应该在椭圆 D：$\frac{x^2}{2}+y^2=1$内（含边界），找出曲线 C 和椭圆 D 的唯一公共点（0，1），即可判断．

【解答】解：设曲线上任意一点 P 的坐标为（x，y），则

$\sqrt{(x+1)^2+y^2}+\sqrt{(x-1)^2+y^2}+\sqrt{x^2+(y-1)^2}=2\sqrt{2}$，

①用 $-x$，$-y$ 分别代替 x，y，可知曲线 C 只关于 y 轴对称，不关于 x 轴对称，即①错误；

②若存在点 P 使得$|PF_3|=\frac{2\sqrt{2}}{3}$，则 $|PF_1|+|PF_2|=\frac{4\sqrt{2}}{3}<|F_1F_2|=2$，三角形两边之和小于第三边，所以不存在，即②错误；

③∵ $|PF_1|+|PF_2|\leqslant|PF_1|+|PF_2|+|PF_3|=2\sqrt{2}$，∴所有的点 P 都应该在椭圆 D：$\frac{x^2}{2}+y^2=1$内（含边界）．

曲线 C 与椭圆 D 有唯一公共点 A（0，1），此时三角形面积最大，为 1．即③正确．

故答案为：③．

【点评】本题考查曲线的轨迹方程及其性质，考查学生分析问题、解决问题的能力和运算能力，属于中档题．

关于我们

北京高考在线创办于 2014 年，隶属于北京太星网络科技有限公司，是北京地区极具影响力的中学升学服务平台。主营业务涵盖：北京新高考、高中生涯规划、志愿填报、强基计划、综合评价招生和学科竞赛等。

北京高考在线旗下拥有网站门户、微信公众平台等全媒体矩阵生态平台。平台活跃用户 40W+，网站年度流量数千万量级。用户群体立足于北京，辐射全国 31 省市。

北京高考在线平台一直秉承 “ 精益求精、专业严谨 ” 的建设理念，不断探索“K12 教育+互联网+大数据”的运营模式，尝试基于大数据理论为广大中学和家长提供新鲜的高考资讯、专业的高考政策解读、科学的升学规划等，为广大高校、中学和教科研单位提供“衔接和桥梁纽带”作用。

平台自创办以来，为众多重点大学发现和推荐优秀生源，和北京近百所中学达成合作关系，累计举办线上线下升学公益讲座数百场，帮助数十万考生顺利通过考入理想大学，在家长、考生、中学和社会各界具有广泛的口碑影响力

未来，北京高考在线平台将立足于北京新高考改革，基于对北京高考政策研究及北京高校资源优势，更好的服务全国高中家长和学生。