2023北京朝阳高二（上）期末

数　学

2023．1

（考试时间120分钟　满分150分）

考生务必将答案答在答题卡上，在试卷上作答无效。考试结束后，将本试卷和答题卡一并交回。

第一部分（选择题　共50分）

一、选择题共10小题，每小题5分，共50分。在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项。

（1）已知$\{a_n\}$为等差数列，$a_5=4$，则$a_4+a_6=$

（A）4　　（B）6

（C）8　　（D）10

（2）已知点$M(a,2)$（$a>0$）到直线$l:x-y+3=0$的距离为1，则实数$a=$

（A）$\sqrt{2}-1$　　（B）$\sqrt{2}$

（C）$2-\sqrt{2}$　　（D）$\sqrt{2}+1$

（3）设函数$f(x)=x+\ln x$，则曲线$y=f(x)$在点$(1,f(1))$处的切线方程为

（A）$x-y-1=0$　　（B）$2x-y-1=0$

（C）$x-y-2=0$　　（D）$2x-y-2=0$

（4）已知F是抛物线$C:y^2=4x$的焦点，点$P(3,y_0)$在抛物线C上，则$|PF|=$

（A）$2\sqrt{3}$　　（B）$2\sqrt{3}+1$

（C）3　　（D）4

（5）已知直线$l_1:x+ay+1=0$，直线$l_2:(a+2)x+3y-1=0$，则“$a=1$”是“$l_1 // l_2$”的

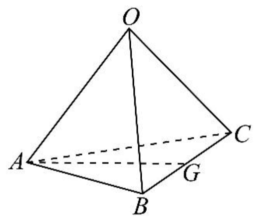
（A）充分而不必要条件　　（B）必要而不充分条件

（C）充分必要条件　　（D）既不充分也不必要条件

（6）如图，在四面体$O-ABC$中，G是BC的中点，设$\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{OB}=\boldsymbol{b}$，$\overrightarrow{OC}=\boldsymbol{c}$，则$\overrightarrow{AG}=$

（A）$\boldsymbol{a}-\frac{1}{2}\boldsymbol{b}-\frac{1}{2}\boldsymbol{c}$　　（B）$\frac{1}{2}\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c}$

（C）$-\frac{1}{2}\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}$　　（D）$-\boldsymbol{a}+\frac{1}{2}\boldsymbol{b}+\frac{1}{2}\boldsymbol{c}$



（7）已知函数$f(x)=x^3+ax^2+x+1$（$a\in\mathbf{R}$）有两个极值点x_1,x_2（$x_1<x_2$），则

（A）$a<-\sqrt{3}$或$a>\sqrt{3}$　　（B）x_1是$f(x)$的极小值点

（C）$x_1+x_2=\frac{1}{3}$　　（D）$x_1x_2=-\frac{1}{3}$

（8）在平面直角坐标系xOy中，设F_1,F_2是双曲线$C:x^2-\frac{y^2}{2}=1$的两个焦点，点M在C上，且$\overrightarrow{MF_1}\cdot\overrightarrow{MF_2}=0$，

则$\triangle F_1F_2M$的面积为

（A）$\sqrt{3}$　　（B）2

（C）$\sqrt{5}$　　（D）4

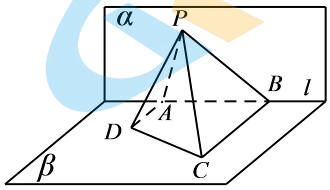
（9）如图，平面$\alpha\perp$平面β，$\alpha\cap\beta=l$，A,B是直线l上的两点，C,D是平面β内的两点，且$DA\perp l$，$CB\perp l$，$DA=4$，$AB=6$，$CB=8$，若平面α内的动点P满足$\angle APD=\angle BPC$，则四棱锥$P-ABCD$的体积的最大值为

（A）24

（B）$24\sqrt{3}$

（C）48

（D）$48\sqrt{3}$



（10）斐波那契数列$\{F_n\}$（$n\in\mathbf{N}^*$）在很多领域都有广泛应用，它是由如下递推公式给出的：$F_1=F_2=1$，当$n>2$时，$F_n=F_{n-1}+F_{n-2}$．若$F_{100}=\dfrac{F_1^2+F_2^2+F_3^2+\cdots+F_m^2}{F_m}$，则$m=$

（A）98　　（B）99

（C）100　　（D）101

第二部分（非选择题　共 100 分）

二、填空题共 6 小题，每小题 5 分，共 30 分。

（11）函数$f(x)=xe^x$的导函数$f'(x)=$_______．

（12）已知平面α的法向量为$\boldsymbol{n}=(1,2,-2)$，直线l的方向向量为$\boldsymbol{u}=(-2,m,4)$，且$l\perp\alpha$，则实数$m=$_______．

（13）过圆$C:(x+1)^2+y^2=1$的圆心且与直线$x-y=0$平行的直线的方程是_______．

（14）设点F_1,F_2分别为椭圆$C:\dfrac{x^2}{2}+y^2=1$的左、右焦点，则椭圆C的离心率为_______；经过原点且斜率不为0的直线l与椭圆C交于P,Q两点，当四边形PF_1QF_2的面积最大时，$\overrightarrow{PF_1}\cdot\overrightarrow{PF_2}=$_______．

（15）已知$\{a_n\}$是首项为负数，公比为q的等比数列，若对任意的正整数n，$2a_{2n-1}+a_{2n}>0$恒成立，则q的值可以是________．（只需写出一个）

（16）数学家笛卡儿研究了许多优美的曲线，如笛卡儿叶形线D在平面直角坐标系xOy中的方程为$x^3+y^3-3axy=0$．当$a=1$时，给出下列四个结论：

① 曲线D不经过第三象限；

② 曲线D关于直线$y=x$轴对称；

③ 对任意$k\in\mathbf{R}$，曲线D与直线$y=-x+k$一定有公共点；

④ 对任意$k\in\mathbf{R}$，曲线D与直线$y=k$一定有公共点．

其中所有正确结论的序号是_______．

三、解答题共 5 小题，共 70 分。解答应写出文字说明，演算步骤或证明过程。

（17）（本小题 13 分）

设函数 $f(x)=\frac{1}{3}x^3-x^2-3x+1$.

（Ⅰ）求 $f(x)$ 的单调区间；

（Ⅱ）当 $x\in[0,4]$ 时，求 $f(x)$ 的最大值与最小值.

（18）（本小题 14 分）

已知 $\{a_n\}$ 是等差数列，其前 n 项和为 S_n（$n\in \mathbf{N}^*$），$a_1=1$，$a_5=9$.

（Ⅰ）求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式及 S_n；

（Ⅱ）从条件①、条件②、条件③这三个条件中选择一个作为已知，求数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和 T_n.

条件①：$b_n=2^{a_n}$；

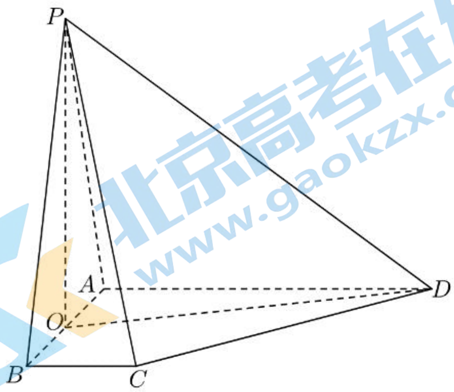
条件②：$b_n=2^n+a_n$；

条件③：$b_n=\dfrac{1}{a_n\cdot a_{n+1}}$.

注：如果选择多个条件分别解答，按第一个解答计分.

（19）（本小题 14 分）

如图，在四棱锥 $P-ABCD$ 中，平面 $PAB\perp$ 平面 $ABCD$，$AD//BC$，$\angle ABC=\frac{\pi}{2}$，$PA=PB=3$，$BC=1$，$AB=2$，$AD=3$，点 O 是 AB 的中点.



（Ⅰ）求证：$PO\perp CD$；

（Ⅱ）求二面角 $A-PO-D$ 的余弦值；

（Ⅲ）在棱 PC 上是否存在点 M，使得 $BM//$ 平面 POD？若存在，求 $\dfrac{CM}{CP}$ 的值；若不存在，说明理由.

（20）（本小题 14 分）

已知椭圆 $C:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$（$a>b>0$）的长轴长为 4，且点 $P(1,\frac{\sqrt{3}}{2})$ 在椭圆 C 上.

（Ⅰ）求椭圆 C 的方程；

（Ⅱ）过点 $M(4,0)$ 的直线 l 与椭圆 C 交于 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$ 两点，且 $y_1y_2\neq 0$．问：x 轴上是否存在点 N，使得直线 NA，直线 NB 与 y 轴围成的三角形始终是底边在 y 轴上的等腰三角形？若存在，求点 N 的坐标；若不存在，说明理由.

（21）（本小题 15 分）

在无穷数列 $\{a_n\}$ 中，$a_1=\sqrt{2}$，$a_2=1$，$a_{n+2}=|a_{n+1}-a_n|$，$n\in\mathbf{N}^*$．

（Ⅰ）求 $\frac{a_4}{a_1}$ 与 $\frac{a_7}{a_4}$ 的值；

（Ⅱ）证明：数列 $\{a_n\}$ 中有无穷多项不为 0；

（Ⅲ）证明：数列 $\{a_n\}$ 中的所有项都不为 0．

（考生务必将答案答在答题卡上，在试卷上作答无效）

参考答案

一、选择题（共 10 小题，每小题 5 分，共 50 分）

（1）C　（2）A　（3）B　（4）D　（5）C

（6）D　（7）A　（8）B　（9）C　（10）B

二、填空题（共 6 小题，每小题 5 分，共 30 分）

（11）$(x+1)e^x$　　（12）-4

（13）$x-y+1=0$　　（14）$\frac{\sqrt{2}}{2}$；0

（15）-3（答案不唯一）　　（16）①②④

三、解答题（共 5 小题，共 70 分）

（17）（共 13 分）

解：（Ⅰ）函数 $f(x)$ 的定义域为 $\mathbf{R}$，

$f'(x)=x^2-2x-3$.

令 $f'(x)=x^2-2x-3=0$，得 $x_1=-1$，$x_2=3$.

当 x 变化时，$f'(x),f(x)$ 的变化情况如下：

x	$(-\infty,-1)$	-1	$(-1,3)$	3	$(3,+\infty)$
$f'(x)$	+	0	−	0	+
$f(x)$	单调递增	极大值	单调递减	极小值	单调递增

所以函数 $f(x)$ 的单调递增区间为 $(-\infty,-1)$，$(3,+\infty)$；

单调递减区间为 $(-1,3)$.　　……………………………………8 分

（Ⅱ）由（Ⅰ）可知，函数 $f(x)$ 在区间 $[0,3]$ 上单调递减，在区间 $[3,4]$ 上单调递增，

所以 $f(x)$ 在区间 $[0,4]$ 上的最小值为 $f(3)=-8$.

因为 $f(0)=1$，$f(4)=-\frac{17}{3}$，所以 $f(0)>f(4)$.

所以 $f(x)$ 在区间 $[0,4]$ 上的最大值为 $f(0)=1$.　……………………………13 分

（18）（共 14 分）

解：（Ⅰ）设等差数列 $\{a_n\}$ 的公差为 d，

则 $a_5=a_1+4d$.

由 $9=1+4d$，解得 $d=2$.

因为 $a_n=a_1+(n-1)d$，

所以 $a_n=2n-1$（$n\in\mathbf{N}^*$）.

所以 $S_n=\frac{(a_1+a_n)n}{2}=\frac{[1+(2n-1)]n}{2}=n^2$.　……………………………………6 分

（Ⅱ）选条件①：$b_n=2^{a_n}$.

因为 $b_n=2^{a_n}=2^{2n-1}$，

所以 $\frac{b_{n+1}}{b_n}=\frac{2^{2n+1}}{2^{2n-1}}=2^2=4$.

又因为 $b_1=2$，所以数列 $\{b_n\}$ 是首项为 2，公比为 4 的等比数列.

所以 $T_n=\frac{2(1-4^n)}{1-4}=\frac{2(4^n-1)}{3}$. ……………………………………14 分

选条件②：$b_n=2^n+a_n$.

因为 $b_n=2^n+a_n=2^n+2n-1$.

所以 $T_n=b_1+b_2+b_3+\cdots+b_n$

$=(2^1+1)+(2^2+3)+(2^3+5)+\cdots+[2^n+(2n-1)]$

$=(2^1+2^2+2^3+\cdots+2^n)+[1+3+5+\cdots+(2n-1)]$

$=\frac{2(1-2^n)}{1-2}+n^2$

$=2^{n+1}+n^2-2$. ……………………………………14 分

选条件③：$b_n=\frac{1}{a_n\cdot a_{n+1}}$.

因为 $b_n=\frac{1}{a_n\cdot a_{n+1}}=\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}=\frac{1}{2}\cdot(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1})$,

所以 $T_n=b_1+b_2+b_3+\cdots+b_n$

$=\frac{1}{2}\cdot(1-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{5}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\cdots+\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1})$

$=\frac{1}{2}\cdot(1-\frac{1}{2n+1})$

$=\frac{n}{2n+1}$. ……………………………………14 分

（19）（共 14 分）

解：（Ⅰ）因为 $PA=PB$，点 O 为 AB 的中点，所以 $PO\perp AB$.

又因为平面 $PAB\perp$ 平面 $ABCD$,

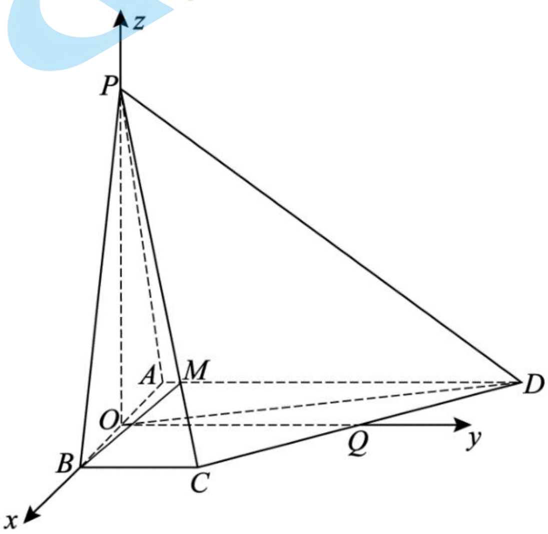
平面 $PAB\cap$ 平面 $ABCD=AB$,

$PO\subset$ 平面 PAB,

所以 $PO\perp$ 平面 $ABCD$.

又因为 $CD\subset$ 平面 $ABCD$,

所以 $PO\perp CD$. ………………………… 4 分



（Ⅱ）取 Q 为 CD 的中点，连接 OQ.

因为 $OQ//BC$，$\angle ABC=\frac{\pi}{2}$,

所以 $OQ\perp AB$.

由（Ⅰ）知 $PO \perp AB$.

又因为 $PO \perp$ 平面 $ABCD$， $OQ \subset$ 平面 $ABCD$，

所以 $PO \perp OQ$.

如图，分别以 OB, OQ, OP 为 x 轴， y 轴， z 轴建立空间直角坐标系 $O-xyz$.

则 $A(-1,0,0), B(1,0,0), C(1,1,0), D(-1,3,0)$.

因为 $PO=\sqrt{PA^2-OA^2}=2\sqrt{2}$，所以 $P(0,0,2\sqrt{2})$.

所以 $\overrightarrow{OP}=(0,0,2\sqrt{2})$， $\overrightarrow{OD}=(-1,3,0)$.

因为 $OQ \perp$ 平面 APO，所以平面 APO 的法向量为 $\boldsymbol{n}_1=(0,1,0)$.

设平面 POD 的法向量为 $\boldsymbol{n}_2=(x,y,z)$，则

$$\begin{cases} \boldsymbol{n}_2 \cdot \overrightarrow{OP}=0, \\ \boldsymbol{n}_2 \cdot \overrightarrow{OD}=0, \end{cases} \text{即} \begin{cases} 2\sqrt{2}z=0, \\ -x+3y=0. \end{cases}$$

令 $y=1$，则 $x=3$， $z=0$.

于是 $\boldsymbol{n}_2=(3,1,0)$.

设二面角 $A-PO-D$ 为 α，由题知 α 为锐角，则

$$\cos\alpha=|\cos<\boldsymbol{n}_1,\boldsymbol{n}_2>|=\frac{|\boldsymbol{n}_1 \cdot \boldsymbol{n}_2|}{|\boldsymbol{n}_1| \cdot |\boldsymbol{n}_2|}=\frac{\sqrt{10}}{10}.$$

所以二面角 $A-PO-D$ 的余弦值为 $\frac{\sqrt{10}}{10}$. ……………………………………10 分

（Ⅲ）设 M 是棱 PC 上一点，则存在 $\lambda \in [0,1]$ 使得 $\overrightarrow{CM}=\lambda\overrightarrow{CP}$.

因为 $\overrightarrow{CP}=(-1,-1,2\sqrt{2})$，

所以 $\overrightarrow{BM}=\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CM}=\overrightarrow{BC}+\lambda\overrightarrow{CP}=(-\lambda,1-\lambda,2\sqrt{2}\lambda)$.

因为平面 POD 的法向量为 $\boldsymbol{n}_2=(3,1,0)$，

所以 BM // 平面 POD 当且仅当 $\overrightarrow{BM} \cdot \boldsymbol{n}_2=0$，

即 $-3\lambda+1-\lambda=0$，解得 $\lambda=\frac{1}{4}$.

所以在棱 PC 上存在点 M，使得 BM // 平面 POD，此时 $\frac{CM}{CP}=\frac{1}{4}$. …….14 分

（20）（共 14 分）

解：（Ⅰ）由题设，得 $\begin{cases} 2a=4, \\ \frac{1}{a^2}+\frac{3}{4b^2}=1. \end{cases}$

解得 $a=2$， $b=1$.

所以椭圆 C 的方程为 $\frac{x^2}{4}+y^2=1$. ……………………………………4 分

（Ⅱ）依题意，直线 l 的斜率存在且不为 0，设其方程为 $y=k(x-4)$（$k\neq 0$）.

由 $\begin{cases} y=k(x-4), \\ x^2+4y^2-4=0 \end{cases}$ 得 $(4k^2+1)x^2-32k^2x+64k^2-4=0$.

由 $\Delta=(-32k^2)^2-4(4k^2+1)(64k^2-4)>0$，得 $-\dfrac{\sqrt{3}}{6}<k<\dfrac{\sqrt{3}}{6}$.

$x_1+x_2=\dfrac{32k^2}{4k^2+1}$，$x_1x_2=\dfrac{64k^2-4}{4k^2+1}$.

假设存在点 $N(t,0)$ 满足题意，则 $k_{NA}+k_{NB}=0$.

$k_{NA}+k_{NB}=\dfrac{y_1}{x_1-t}+\dfrac{y_2}{x_2-t}=\dfrac{k(x_1-4)}{x_1-t}+\dfrac{k(x_2-4)}{x_2-t}$

$=k\cdot\dfrac{2x_1x_2-(t+4)(x_1+x_2)+8t}{(x_1-t)(x_2-t)}$.

令 $k\cdot\dfrac{2x_1x_2-(t+4)(x_1+x_2)+8t}{(x_1-t)(x_2-t)}=0$，即 $2x_1x_2-(t+4)(x_1+x_2)+8t=0$.

所以 $\dfrac{128k^2-8}{4k^2+1}-\dfrac{(t+4)32k^2}{4k^2+1}+\dfrac{8t+32tk^2}{4k^2+1}=0$.

所以 $128k^2-8-(t+4)32k^2+8t+32tk^2=0$，即 $8t=8$.

所以 $t=1$.

故在 x 轴上存在点 $N(1,0)$，使得直线 NA，直线 NB 与 y 轴围成的三角形始终是底边在 y 轴上的等腰三角形．……………………………………14 分

(21)（共 15 分）

解：（Ⅰ）因为 $a_1=\sqrt{2},a_2=1$，所以 $a_3=\sqrt{2}-1,a_4=2-\sqrt{2}$.

所以 $\dfrac{a_4}{a_1}=\dfrac{2-\sqrt{2}}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}-1$.

又 $a_5=3-2\sqrt{2},a_6=\sqrt{2}-1,a_7=3\sqrt{2}-4$，

所以 $\dfrac{a_7}{a_4}=\dfrac{3\sqrt{2}-4}{2-\sqrt{2}}=\sqrt{2}-1$. ……………………………………………………4 分

（Ⅱ）假设数列 $\{a_n\}$ 中只有有限多个不为 0 的项.

设 $a_k\neq 0$ 是数列 $\{a_n\}$ 中不为 0 的最后一项.

则 $a_{k+1}=0$.

所以 $a_{k+2}=|a_{k+1}-a_k|=a_k\neq 0$，与假设矛盾.

所以数列 $\{a_n\}$ 中有无穷多项不为 0. ……………………………………9 分

（Ⅲ）解法一：由（Ⅰ）可得 $a_1=\sqrt{2},a_2=1,a_3=\sqrt{2}-1$，

$a_4=\sqrt{2}(\sqrt{2}-1),a_5=(\sqrt{2}-1)^2,a_6=\sqrt{2}-1,a_7=\sqrt{2}(\sqrt{2}-1)^2$.

下面证明对任意 $n\in\mathbf{N}^*$，有

$a_{3n-2}=\sqrt{2}(\sqrt{2}-1)^{n-1}$，①

$a_{3n-1}=\begin{cases}(\sqrt{2}-1)^{n-1}, & n\text{为奇数}, \\ (\sqrt{2}-1)^{n}, & n\text{为偶数},\end{cases}$ ②

$a_{3n}=\begin{cases}(\sqrt{2}-1)^{n}, & n\text{为奇数}, \\ (\sqrt{2}-1)^{n-1}, & n\text{为偶数}.\end{cases}$ ③

当 $n=1$ 时，由（Ⅰ）可得 $a_1=\sqrt{2},a_2=1,a_3=\sqrt{2}-1$.

假设当 $n=k$ 时，①②③式成立.

当 $n=k+1$ 时，$a_{3(k+1)-2}=a_{3k+1}=|a_{3k}-a_{3k-1}|=|(\sqrt{2}-1)^k-(\sqrt{2}-1)^{k-1}|=\sqrt{2}(\sqrt{2}-1)^k$，

①式成立，

$a_{3(k+1)-1}=a_{3k+2}=|a_{3k+1}-a_{3k}|$

$=\begin{cases}|\sqrt{2}(\sqrt{2}-1)^{k}-(\sqrt{2}-1)^{k-1}|, & k+1\text{为奇数},\\ |\sqrt{2}(\sqrt{2}-1)^{k}-(\sqrt{2}-1)^{k}|, & k+1\text{为偶数},\end{cases}$

$=\begin{cases}(\sqrt{2}-1)^{k}, & k+1\text{为奇数},\\ (\sqrt{2}-1)^{k+1}, & k+1\text{为偶数},\end{cases}$

②式成立，

$a_{3(k+1)}=a_{3k+3}=|a_{3k+2}-a_{3k+1}|$

$=\begin{cases}|(\sqrt{2}-1)^{k}-\sqrt{2}(\sqrt{2}-1)^{k}|, & k+1\text{为奇数},\\ |(\sqrt{2}-1)^{k+1}-\sqrt{2}(\sqrt{2}-1)^{k}|, & k+1\text{为偶数},\end{cases}$

$=\begin{cases}(\sqrt{2}-1)^{k+1}, & k+1\text{为奇数},\\ (\sqrt{2}-1)^{k}, & k+1\text{为偶数},\end{cases}$

③式成立.

所以对任意 $n\in\mathbf{N}^*$，①②③式成立.

所以对任意 $n\in\mathbf{N}^*$，有 $a_n>0$，即 $a_n\neq 0$. ....15 分

（Ⅲ）解法二：由（Ⅰ）可得 $a_1=\sqrt{2},a_2=1,a_3=\sqrt{2}-1$，

$a_4=\sqrt{2}(\sqrt{2}-1),a_5=(\sqrt{2}-1)^2,a_6=\sqrt{2}-1,a_7=\sqrt{2}(\sqrt{2}-1)^2$.

下面证明对任意 $n\in\mathbf{N}^*$，有

$a_{3n-2}=\sqrt{2}(\sqrt{2}-1)^{n-1}$，

$a_{3n-1}=\begin{cases}(\sqrt{2}-1)^{n-1}, & n\text{为奇数},\\ (\sqrt{2}-1)^{n}, & n\text{为偶数},\end{cases}$

$a_{3n}=\begin{cases}(\sqrt{2}-1)^{n}, & n\text{为奇数},\\ (\sqrt{2}-1)^{n-1}, & n\text{为偶数}.\end{cases}$

假设存在 $t\in\mathbf{N}^*$，使得 $a_{3t-2}\neq\sqrt{2}(\sqrt{2}-1)^{t-1}$ 或 $a_{3t-1}\neq\begin{cases}(\sqrt{2}-1)^{t-1}, & t\text{为奇数},\\ (\sqrt{2}-1)^{t}, & t\text{为偶数},\end{cases}$

或 $a_{3t}\neq\begin{cases}(\sqrt{2}-1)^{t}, & t\text{为奇数},\\ (\sqrt{2}-1)^{t-1}, & t\text{为偶数}.\end{cases}$

$$\text{设 }T=\left\{t\in\mathbf{N}^*\,\middle|\,\begin{array}{l}a_{3t-2}\neq\sqrt{2}(\sqrt{2}-1)^{t-1},\\ \text{或}a_{3t-1}\neq\begin{cases}(\sqrt{2}-1)^{t-1}, & t\text{为奇数},\\ (\sqrt{2}-1)^{t}, & t\text{为偶数},\end{cases}\\ \text{或}a_{3t}\neq\begin{cases}(\sqrt{2}-1)^{t}, & t\text{为奇数},\\ (\sqrt{2}-1)^{t-1}, & t\text{为偶数}\end{cases}\end{array}\right\}\neq\varnothing.$$

取 $m=\min T$，则 $m>2$.

所以对任意 $1\leqslant k<m$，有

$a_{3k-2}=\sqrt{2}(\sqrt{2}-1)^{k-1}$，

$a_{3k-1}=\begin{cases}(\sqrt{2}-1)^{k-1}, & k\text{为奇数},\\ (\sqrt{2}-1)^{k}, & k\text{为偶数},\end{cases}$

$a_{3k}=\begin{cases}(\sqrt{2}-1)^{k}, & k\text{为奇数},\\ (\sqrt{2}-1)^{k-1}, & k\text{为偶数}.\end{cases}$

所以 $a_{3m-2}=a_{3(m-1)+1}=|a_{3(m-1)}-a_{3(m-1)-1}|=|(\sqrt{2}-1)^{m-1}-(\sqrt{2}-1)^{m-2}|=\sqrt{2}(\sqrt{2}-1)^{m-1}$，

$$a_{3m-1}=a_{3(m-1)+2}=|a_{3(m-1)+1}-a_{3(m-1)}|$$

$$=\begin{cases}|\sqrt{2}(\sqrt{2}-1)^{m-1}-(\sqrt{2}-1)^{m-2}|, & m\text{为奇数},\\ |\sqrt{2}(\sqrt{2}-1)^{m-1}-(\sqrt{2}-1)^{m-1}|, & m\text{为偶数},\end{cases}$$

$$=\begin{cases}(\sqrt{2}-1)^{m-1}, & m\text{为奇数},\\ (\sqrt{2}-1)^{m}, & m\text{为偶数},\end{cases}$$

$$a_{3m}=a_{3(m-1)+3}=|a_{3(m-1)+2}-a_{3(m-1)+1}|$$

$$=\begin{cases}|(\sqrt{2}-1)^{m-1}-\sqrt{2}(\sqrt{2}-1)^{m-1}|, & m\text{为奇数},\\ |(\sqrt{2}-1)^{m}-\sqrt{2}(\sqrt{2}-1)^{m-1}|, & m\text{为偶数},\end{cases}$$

$$=\begin{cases}(\sqrt{2}-1)^{m}, & m\text{为奇数},\\ (\sqrt{2}-1)^{m-1}, & m\text{为偶数}.\end{cases}$$

所以 $m\notin T$，与 $m=\min T$ 矛盾．

所以假设不成立．

所以对任意 $n\in\mathbf{N}^*$，有 $a_n>0$，即 $a_n\neq 0$．……………………………………15 分

（III）解法三：由（I）可得 $a_1=\sqrt{2},a_2=1,a_3=\sqrt{2}-1$，

$a_4=\sqrt{2}(\sqrt{2}-1),a_5=(\sqrt{2}-1)^2,a_6=\sqrt{2}-1,a_7=\sqrt{2}(\sqrt{2}-1)^2$．

依次类推，对任意 $n\in\mathbf{N}^*$，有 $a_{3n-2}=\sqrt{2}(\sqrt{2}-1)^{n-1}$，$a_{3n-1}=\begin{cases}(\sqrt{2}-1)^{n-1}, & n\text{为奇数},\\ (\sqrt{2}-1)^{n}, & n\text{为偶数},\end{cases}$

$$a_{3n}=\begin{cases}(\sqrt{2}-1)^{n}, & n\text{为奇数},\\ (\sqrt{2}-1)^{n-1}, & n\text{为偶数}.\end{cases}$$

所以对任意 $n\in\mathbf{N}^*$，有 $a_n>0$，即 $a_n\neq 0$．

关于我们

北京高考在线创办于 2014 年，隶属于北京太星网络科技有限公司，是北京地区极具影响力的中学升学服务平台。主营业务涵盖：北京新高考、高中生涯规划、志愿填报、强基计划、综合评价招生和学科竞赛等。

北京高考在线旗下拥有网站门户、微信公众平台等全媒体矩阵生态平台。平台活跃用户 40W+，网站年度流量数千万量级。用户群体立足于北京，辐射全国 31 省市。

北京高考在线平台一直秉承 “ 精益求精、专业严谨 ” 的建设理念，不断探索“K12 教育+互联网+大数据”的运营模式，尝试基于大数据理论为广大中学和家长提供新鲜的高考资讯、专业的高考政策解读、科学的升学规划等，为广大高校、中学和教科研单位提供“衔接和桥梁纽带”作用。

平台自创办以来，为众多重点大学发现和推荐优秀生源，和北京近百所中学达成合作关系，累计举办线上线下升学公益讲座数百场，帮助数十万考生顺利通过考入理想大学，在家长、考生、中学和社会各界具有广泛的口碑影响力

未来，北京高考在线平台将立足于北京新高考改革，基于对北京高考政策研究及北京高校资源优势，更好的服务全国高中家长和学生。