北京市中关村中学2022—2023学年第二学期期中调研

高二数学

2023.04

本试卷共 4 页，共 150 分。考试时长 120 分钟。考生务必将答案书写在答题卡上，在试卷上作答无效。考试结束后，将答题卡交回。

第一部分

一、选择题（本大题共 10 小题，每小题 4 分，共 40 分。在每题列出的四个选项中，选出最符合题目要求的一项。）

1. 已知等差数列$\{a_n\}$中$a_1=4$，$a_4+a_6=10$，那么$a_2+a_4=$（　　）

A. 9　　　B. 10　　　C. 17　　　D. 24

2. 已知各项均为正数的等比数列$\{a_n\}$满足$a_1a_3=\frac{1}{4}$，$a_2a_4=1$，则$a_6=$（　　）

A. 2　　　B. 4　　　C. 8　　　D. 16

3. 某城市的汽车牌照号码由 2 个英文字母后接 4 个数字组成，其中 4 个数字互不相同的牌照号码共有（　　）

A. $26^2\cdot A_{10}^4$个　　　B. $A_{26}^2 A_{10}^4$个　　　C. $26^2\cdot 10^4$个　　　D. $A_{26}^2 10^4$个

4. 下列给出四个求导运算：

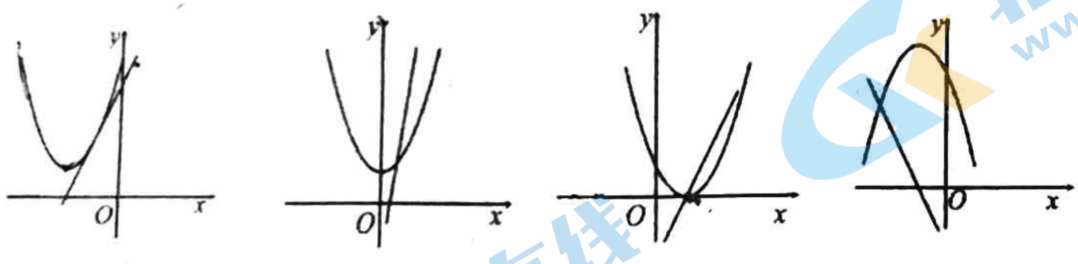
①$(x-\frac{1}{x})'=\frac{x^2-1}{x^2}$；　　　②$(xe^x)'=e^x(x+1)$

③$(\frac{\sin x}{2})'=\frac{\cos x}{4}$　　　④$(x^2-x-\ln x)'=\frac{(x-1)(2x+1)}{x}$

其中运算结果正确的个数是（　　）

A. 1　　　B. 2　　　C. 3　　　D. 4

5. 如果把二次函数$f(x)=ax^2+bx+c$与其导函数$f'(x)$的图象画在同一个坐标系中，则下面四组图中一定错误的是(　　)



A.　　　B.　　　C.　　　D.

6. 已知等差数列$\{a_n\}$，则"$a_2>a_1$"是"数列$\{a_n\}$为单调递增数列"的（　　）

A. 充分而不必要条件　　　B. 必要而不充分条件

C. 充分必要条件　　　D. 既不充分也不必要条件

7. 在各项均为正数的等比数列$\{a_n\}$中，$a_1a_{11}+2a_5a_9+a_3a_{13}=25$，则$a_1a_{13}$的最大值是（　　）

A. 25　　　B. $\frac{25}{4}$　　　C. 5　　　D. $\frac{2}{5}$

8. 大衍数列，来源于中国古代著作《乾坤谱》中对易传"大衍之数五十"的推论。其前10项依次是0、2、4、8、12、18、24、32、40、50.

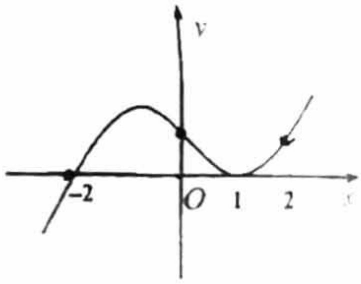
其通项公式为 $a_n=\begin{cases}\dfrac{n^2-1}{2}, & n\text{为奇数}\\ \dfrac{n^2}{2}, & n\text{为偶数}\end{cases}$

0
2　4　8
12　18　24　32　40
50　……

如果把这个数列 $\{a_n\}$ 排成右侧形状，并记 $A(m,n)$ 表示第 m 行中从左向右第 n 个数，则 $A(11,8)$ 的值为（　　）

A. 1984　　B. 2048　　C. 5724　　D. 5832

9. 右图是函数 $y=f(x)$ 的导函数 $y=f'(x)$ 的图象，



给出下列命题：

① -2 是函数 $y=f(x)$ 的极值点；

② 1 是函数 $y=f(x)$ 的极值点；

③ $y=f(x)$ 在 $x=0$ 处切线的斜率小于零；

④ $y=f(x)$ 在区间 $(-2,2)$ 上单调递增.

则正确命题的序号是（　　）

A. ①③　　B. ②③　　C. ①④　　D. ①③④

10. 已知函数 $f(x)=-x$，$g(x)=e^x$，若 $n\in N^*$，且存在 $x_1,x_2,x_3,\cdots,x_{n+1}\in[0,2]$，使得 $f(x_1)+f(x_2)+\cdots+f(x_n)+g(x_{n+1})=g(x_1)+g(x_2)+\cdots+g(x_n)+f(x_{n+1})$ 成立，则 n 的最大值为（　　）（注：e=2.71828…为自然对数的底数）

A. 8　　B. 9　　C. 10　　D. 11

第二部分

二、填空题（本大题共 5 小题，每小题 5 分．共 25 分。请把答案填在答题卡中相应题中横线上。）

11. 用数字 1，2，3，4 组成的无重复数字的三位数的个数为________.（用数字作答）

12. 若函数 $y=ax-\sin x$ 是 R 上的单调增函数，则实数 a 的取值范围是__________

13. 数学家祖冲之曾给出圆周率 π 的两个近似值："约率" $\dfrac{22}{7}$ 与"密率" $\dfrac{355}{113}$．它们可用"调日法"得到：称小于 3.1415926 的近似值为弱率，大于 3.1415927 的近似值为强率．由 $\dfrac{3}{1}<\pi<\dfrac{4}{1}$，取 3 为弱率，4 为强率，得 $a_1=\dfrac{3+4}{1+1}=\dfrac{7}{2}$，故 a_1 为强率，与上一次的弱率 3 计算得 $a_2=\dfrac{3+7}{1+2}=\dfrac{10}{3}$，故 a_2 为强率，继续计算，……．若某次得到的近似值为强率，与上一次的弱率继续计算得到新的近似值；若某次得到的近似值为弱率，与上一次的强率继续计算得到新的近似值，依此类推．已知 $a_m=\dfrac{19}{6}$，则 $m=$______；$a_7=$______.

14. 数列$\{a_n\}$的前 n 项和为$S_n=n^2+n, n\in N^*$，则$a_n=$________；数列$\{\frac{a_n}{n^2+9}\}$中最大项的值为________.

15. 已知$f(x)=\begin{cases}x, & x\geq a,\\ x^3-3x, & x<a.\end{cases}$

① 若$f(x)$有两个零点，则a的取值范围是________.

② 当$a\leq -2$时，则满足$f(x)+f(x-1)>-3$的x的取值范围是________.

三、解答题（本大题共 6 小题，共 85 分。解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤。）

16.（本小题 13 分）

已知数列$\{a_n\}$是等差数列，S_n为其前 n 项和，$a_1=-3, S_2=S_5$。

(1) 求$\{a_n\}$的通项公式；

(2) 设$b_n=2^{a_n-1}$，求数列$\{b_n\}$的前 n 项和。

17.（本小题 15 分）

已知函数$f(x)=x^3+ax^2+bx$，其中$a,b\in R$，从条件①，条件②，条件③这三个条件中选择一个作为已知，求解下列问题.

条件①：函数$f(x)$在点$(1,f(1))$处的切线方程为$y=-5$；

条件②：函数$f(x)$的单调递减区间为（-3，1）；

条件③：函数$f(x)$的三个零点分别是 0、$\frac{-3+3\sqrt{5}}{2}$、$\frac{-3-3\sqrt{5}}{2}$.

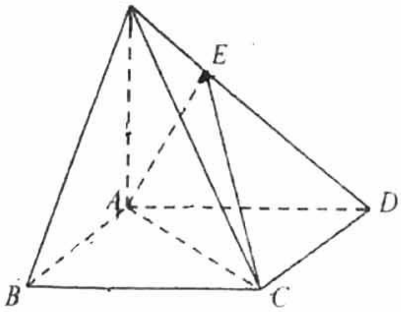
(1) 求$f(x)$的解析式；

(2) 求$f(x)$的极值；

(3) 若函数$f(x)$在区间[-4，c]上的最小值为-5，求 c 的取值范围。

18.（本小题 14 分）

如图：在四棱锥$P-ABCD$中，底面$ABCD$是正方形，$PA=AB=2$，$PB=PD=2\sqrt{2}$，点E在PD上，且$PE=\frac{1}{3}PD$.



(1) 求证：$PA\perp$平面$ABCD$；

(2) 求二面角$E-AC-D$的余弦值；

(3) 证明：在线段BC上存在点F，使PF // 平面EAC，并求线段BF的长.

19.（本小题 14 分）

已知椭圆 E：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的短轴长为2，两个焦点与短轴的一个端点是直角三角形的三个顶点，直线 l：$x+\sqrt{2}y-2=0$ 与椭圆 E 有且只有一个公共点 T.

(1) 求椭圆 E 的方程及点 T 的坐标；

(2) 设 O 是坐标原点，直线 l' 平行于 OT,与椭圆 E 交于不同的两点 A、B，且与直线 l 交于点 P. 证明：存在常数 λ，使得 $|PT|^2=\lambda|PA|\cdot|PB|$，并求 λ 的值.

20.（本小题 15 分）

已知函数 $f(x)=\ln(ax)-(a+1)x$，其中 $a\in R$ 且 $a\neq 0$.

(1) 当 $a=1$ 时，求曲线 $y=f(x)$ 在点 $(1,f(1))$ 处的切线方程；

(2) 求函数 $f(x)$ 的单调区间；

(3) 若函数 $f(x)$ 没有零点，求实数 a 的取值范围.

21.（本小题 14 分）

若无穷数列 $\{a_n\}$ 满足：只要 $a_p=a_q\ (p,q\in \mathrm{N}^*)$，必有 $a_{p+1}=a_{q+1}$，则称 $\{a_n\}$ 具有性质P.

(1) 若 $\{a_n\}$ 具有性质P，且 $a_1=1$，$a_2=2$，$a_4=3$，$a_5=2$，$a_6+a_7+a_8=21$，求 a_3；

(2) 若无穷数列 $\{b_n\}$ 是等差数列，无穷数列 $\{c_n\}$ 是公比为正数的等比数列，$b_1=c_5=1$，$b_5=c_1=81$，$a_n=b_n+c_n$，判断 $\{a_n\}$ 是否具有性质P，并说明理由；

(3) 设 $\{b_n\}$ 是无穷数列，已知 $a_{n+1}=b_n+\sin a_n\ (n\in \mathrm{N}^*)$. 求证："对任意 a_1，$\{a_n\}$ 都具有性质P"的充要条件为"$\{b_n\}$ 是常数列".

北京市中关村中学2022—2023学年第二学期期中练习

高二数学试卷参考答案及评分标准　　2023. 04

第一部分

一、选择题（本大题共 10 小题，每小题 4 分，共 40 分）

题号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
答案	A	C	A	B	B	C	B	D	C	B

第二部分

二、填空题（本大题共 5 小题，每小题 5 分，共 25 分）

<table>
<tr><td>题号</td><td colspan="2">11</td><td colspan="2">12</td></tr>
<tr><td>答案</td><td colspan="2">24</td><td colspan="2">$[1,+\infty)$</td></tr>
<tr><td>题号</td><td colspan="2">13</td><td colspan="2">14</td></tr>
<tr><td>答案</td><td>5</td><td>$\frac{25}{8}$</td><td>$a_n=2n$</td><td>$\frac{1}{3}$</td></tr>
<tr><td>题号</td><td colspan="2">15</td><td colspan="2" rowspan="2"></td></tr>
<tr><td>答案</td><td>$(-\sqrt{3},\sqrt{3}]$</td><td>$(-1,+\infty)$</td></tr>
</table>

三、解答题（本大题共 6 小题，共 85 分）

16.（本小题 13 分）

解：（1）因为 $S_2=S_5$，所以 $a_3+a_4+a_5=0$.

所以 $3a_4=0$ 即 $a_4=0$

依题意设数列 $\{a_n\}$ 是公差为 d 的等差数列，$a_1=-3$，

所以 $-3+3d=0, d=1$

所以 $a_n=-3+(n-1)=n-4$

（2）由 $a_n=n-4$ 可得 $a_{n+4}=(n+4)-4=n$，

所以 $b_n=2^{a_{n+4}}=2^n$

从而 $\dfrac{b_{n+1}}{b_n}=\dfrac{2^{n+1}}{2^n}=2$，

可知 $\{b_n\}$ 是首项 $b_1=2$，公比为 2 的等比数列，

所以其前 n 项和为 $\dfrac{2(1-2^n)}{1-2}=2(2^n-1)=2^{n+1}-2$

17.（本小题 15 分）

解：（1）选择条件①：$f'(x)=3x^2+2ax+b$

依题意有$\begin{cases} f'(1)=0 \\ f(1)=-5 \end{cases}$，所以$\begin{cases} 3+2a+b=0 \\ 1+a+b=-5 \end{cases}$，解得$\begin{cases} a=3 \\ b=-9 \end{cases}$

所以 $f(x)=x^3+3x^2-9x$

选择条件②：$f'(x)=3x^2+2ax+b$

依题意，-3 和 1 为方程$3x^2+2ax+b=0$两根，

所以$\begin{cases} -\dfrac{2a}{3}=-3+1 \\ \dfrac{b}{3}=-3\times 1 \end{cases}$，解得$\begin{cases} a=3 \\ b=-9 \end{cases}$

所以 $f(x)=x^3+3x^2-9x$

选择条件③：$f(x)=x(x^2+ax+b)$

依题意，$\dfrac{-3+3\sqrt{5}}{2}$和$\dfrac{-3-3\sqrt{5}}{2}$为方程$x^2+ax+b=0$两根，

所以$\begin{cases} -a=\dfrac{-3+3\sqrt{5}}{2}+\dfrac{-3-3\sqrt{5}}{2} \\ b=\dfrac{-3+3\sqrt{5}}{2}\cdot\dfrac{-3-3\sqrt{5}}{2} \end{cases}$，解得$\begin{cases} a=3 \\ b=-9 \end{cases}$

所以 $f(x)=x^3+3x^2-9x$

（2）$f(x)$ 的定义域是 **R**，且 $f'(x)=3x^2+6x-9$。

令 $f'(x)=0$，得 $x_1=-3$，$x_2=1$。

$f(x)$ 与 $f'(x)$ 在（-∞，+∞）上的情况如下：

x	（+∞,-3）	-3	（-3,1）	1	（1,+∞）
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	↗	极大值	↘	极小值	↗

$f(x)_{极大值}=f(-3)=27$，　$f(x)_{极小值}=f(1)=-5$

（3）由 $f(-4)=20$ 及（2）中结论可知：

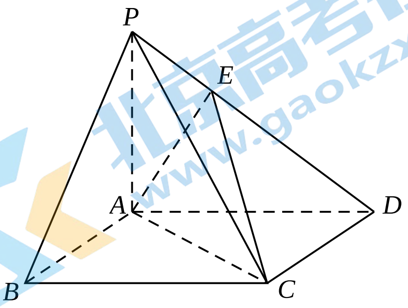
当 $c\geq 1$ 时，函数 $f(x)$ 在区间$[-4，c]$上的最小值为 $f(1)=-5$；

当$-4<c<1$时，函数 $f(x)$ 在区间$[-4，c]$上的最小值大于-5。

因此，c 的取值范围是$[1，+\infty)$

18.（本小题 14 分）

【解析】（1）证明：$\because PA=AB=2$， $PB=2\sqrt{2}$，



$\therefore PA^2+AB^2=PB^2$

$\therefore PA\perp AB$，同理 $PA\perp AD$

又 $AB\cap AD=A$， $\therefore PA\perp$ 平面 $ABCD$.

（2）以 A 为原点， AB,AD,AP 分别为 x,y,z 轴建立空间直角坐标系，

则 $A(0,0,0),B(2,0,0),C(2,2,0),D(0,2,0),P(0,0,2),E(0,\frac{2}{3},\frac{4}{3})$

平面 ACD 的法向量为 $\overrightarrow{AP}=(0,0,2)$，

设平面 EAC 的法向量为 $\vec{n}=(x,y,z)$

$\because \overrightarrow{AC}=(2,2,0),\overrightarrow{AE}=(0,\frac{2}{3},\frac{4}{3})$， 由 $\begin{cases}\vec{n}\cdot\overrightarrow{AC}=0\\ \vec{n}\cdot\overrightarrow{AE}=0\end{cases}$， $\therefore\begin{cases}x+y=0\\ y+2z=0\end{cases}$，

取 $\begin{cases}x=2\\ y=-2\\ z=1\end{cases}$ $\therefore \vec{n}=(2,-2,1)$，

设二面角 $E-AC-D$ 的平面角为 θ

$\cos\theta=\dfrac{\vec{n}\cdot\overrightarrow{AP}}{|\vec{n}|\cdot|\overrightarrow{AP}|}=\dfrac{1}{3}$， $\therefore$ 二面角 $E-AC-D$ 的余弦值为 $\dfrac{1}{3}$.

（3）假设存在点 $F\in BC$， 使 PF // 平面 EAC，

令 $F(2,a,0)$， $(0\le a\le 2)$

$\therefore \overrightarrow{PF}=(2,a,-2)$ 由 PF // 平面 EAC， $\therefore \overrightarrow{PF}\cdot\vec{n}=0$， 解得 $a=1$

$\therefore$ 存在点 $F(2,1,0)$ 为 BC 的中点，即 $BF=1$.

19.（本小题 14 分）

【解析】（1）依题意有 $\begin{cases}2b=1\\ b=c\\ a^2=b^2+c^2\end{cases}$， 解得 $\begin{cases}a=\sqrt{2}\\ b=1\\ c=1\end{cases}$， 所以椭圆方程为 $\dfrac{x^2}{2}+y^2=1$.

联立 $\begin{cases}x+\sqrt{2}y-2=0\\ \dfrac{x^2}{2}+y^2=1\end{cases}$， 解得 $\begin{cases}x=1\\ y=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\end{cases}$， 所以点 T 的坐标为 $(1,\dfrac{\sqrt{2}}{2})$

（2）直线 OT 的斜率 $k=\dfrac{\frac{\sqrt{2}}{2}-0}{1-0}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，

因为直线 $l'//OT$，所以设直线 l' 的方程为 $y=\dfrac{\sqrt{2}}{2}x+m$

设点 $P(x_0,y_0)$，联立 $\begin{cases} y=\dfrac{\sqrt{2}}{2}x+m \\ x+\sqrt{2}y-2=0 \end{cases}$，解得 $\begin{cases} x_0=1-\dfrac{\sqrt{2}}{2}m \\ y_0=\dfrac{1}{2}m+\dfrac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$，所以 $P(1-\dfrac{\sqrt{2}}{2}m,\dfrac{1}{2}m+\dfrac{\sqrt{2}}{2})$

又因为 $T(1,\dfrac{\sqrt{2}}{2})$，所以 $|PT|^2=(1-\dfrac{\sqrt{2}}{2}m-1)^2+(\dfrac{1}{2}m+\dfrac{\sqrt{2}}{2}-\dfrac{\sqrt{2}}{2})^2=\dfrac{3}{4}m^2$

设 $A(x_1,y_1),B(x_2,y_2)$，联立 $\begin{cases} y=\dfrac{\sqrt{2}}{2}x+m \\ \dfrac{x^2}{2}+y^2=1 \end{cases}$ 得 $x^2+\sqrt{2}mx+m^2-1=0$

依题意 $\Delta=2m^2-4(m^2-1)>0$，解得 $-\sqrt{2}<m<\sqrt{2}$，

此时有 $x_1+x_2=-\sqrt{2}m$，$x_1x_2=m^2-1$

因为 $|PA|=\sqrt{1+k^2}\,|x_0-x_1|$，$|PB|=\sqrt{1+k^2}\,|x_0-x_2|$，

所以 $|PA||PB|=(1+k^2)|(x_0-x_1)(x_0-x_2)|$

$$=[1+(\frac{\sqrt{2}}{2})^2]|x_0{}^2-(x_1+x_2)x_0+x_1x_2|$$

$$=\frac{3}{2}|(1-\frac{\sqrt{2}}{2}m)^2-(-\sqrt{2}m)(1-\frac{\sqrt{2}}{2}m)+m^2-1|$$

$$=\frac{3}{4}m^2$$

所以 $|PT|^2=|PA||PB|=\dfrac{3}{4}m^2$

因此存在 $\lambda=1$，使得 $|PT|^2=\lambda|PA||PB|$ 成立.

20.（本小题 15 分）

【解析】（1）当 $a=1$ 时，$f(x)=\ln x-2x$，所以 $f'(x)=\dfrac{1}{x}-2$

因此切线的斜率 $k=f'(1)=\dfrac{1}{1}-2=-1$

又因为 $f(1)=\ln 1-2=-2$，所以切点为 $(1,-2)$

所以切线方程为 $y-(-2)=-1\cdot(x-1)$ 即 $x+y+1=0$.

（2）①当 $a>0$ 时， $f(x)$ 的定义域为 $(0,+\infty)$，

$$f'(x)=\frac{1}{ax}\cdot(ax)'-(a+1)=\frac{1}{x}-(a+1)=\frac{1-(a+1)x}{x},\quad x>0$$

令 $f'(x)=0$，解得 $x=\dfrac{1}{a+1}$

因为 $a>0$，所以 $\dfrac{1}{a+1}>0$

当 x 变化时， $f'(x)$、 $f(x)$ 变化情况如下表：

x	$(0,\frac{1}{a+1})$	$\frac{1}{a+1}$	$(\frac{1}{a+1},+\infty)$
$f'(x)$	+	0	-
$f(x)$	↗	极大值	↘

所以 $a>0$ 时， $f(x)$ 的单调增区间为（$0,\dfrac{1}{a+1}$），单调减区间为 $(\dfrac{1}{a+1},+\infty)$

②当 $-1\le a<0$ 时， $f(x)$ 的定义域为 $(-\infty,0)$

因为 $\dfrac{1}{x}<0$， $a+1\ge 0$，所以 $f'(x)=\dfrac{1}{x}-(a+1)<0$

所以 $f(x)$ 在定义域（$-\infty$，0）上单调递减，

所以 $-1\le a<0$ 时， $f(x)$ 没有单调增区间，单调减区间为（$-\infty$，0）

③当 $a<-1$ 时， $f(x)$ 的定义域为 $(-\infty,0)$

令 $f'(x)=0$，解得 $x=\dfrac{1}{a+1}$

因为 $a<-1$，所以 $\dfrac{1}{a+1}<0$

当 x 变化时， $f'(x)$、 $f(x)$ 变化情况如下表：

x	$(-\infty,\frac{1}{a+1})$	$\frac{1}{a+1}$	$(\frac{1}{a+1},0)$
$f'(x)$	+	0	-
$f(x)$	↗	极大值	↘

所以 $a<-1$ 时， $f(x)$ 的单调增区间为 $(-\infty,\dfrac{1}{a+1})$，单调减区间为 $(\dfrac{1}{a+1},0)$

综上所述，$a<-1$时，$f(x)$的单调增区间为$(-\infty,\dfrac{1}{a+1})$，单调减区间为$(\dfrac{1}{a+1},0)$

$-1\le a<0$时，$f(x)$没有单调增区间，单调减区间为$(-\infty，0)$

$a>0$时，$f(x)$的单调增区间为$(0,\dfrac{1}{a+1})$，单调减区间为$(\dfrac{1}{a+1},+\infty)$

（3）由第（2）问的结论知，

①当$a>0$时，$f(x)$在区间$(0,\dfrac{1}{a+1})$上单调递增，在区间$(\dfrac{1}{a+1},+\infty)$上单调递减，

所以 $f(x)_{\max}=f(\dfrac{1}{a+1})=\ln\dfrac{a}{a+1}-1$

因为$a>0$，所以$0<\dfrac{a}{a+1}<1$，所以$\ln\dfrac{a}{a+1}<0$，因此 $f(x)_{\max}=\ln\dfrac{a}{a+1}-1<0$

所以当$a>0$时，函数$f(x)$没有零点，符合题意

②当$-1\le a<0$时，$f(x)$在定义域$(-\infty，0)$上单调递减，

$f(\dfrac{1}{a})=\ln 1-\dfrac{a+1}{a}=-\dfrac{a+1}{a}>0$，　　$f(-1)=\ln(-a)+(a+1)$，下面证明$f(-1)\le 0$：

构造函数$g(x)=\ln(-x)+(x+1)$，　$x\in[-1,0)$，因为$g'(x)=\dfrac{1}{-x}(-x)'+1=\dfrac{1}{x}+1$

当$-1\le x<0$时$\dfrac{1}{x}\le -1$，　$g'(x)=\dfrac{1}{x}+1\le 0$

所以$g(x)$在$[-1,0)$上单调递减，所以$g(a)\le g(-1)=\ln 1+(-1)+1=0$，即$\ln(-a)+(a+1)\le 0$

因为$f(x)$在定义域$(-\infty，0)$上单调递减，$f(\dfrac{1}{a})>0$，$f(-1)\le 0$

因此当$-1\le a<0$时，函数$f(x)$恰好有 1 个零点，不符合题意.

③当$a<-1$时，$f(x)$在区间$(-\infty,\dfrac{1}{a+1})$上单调递增，在区间$(\dfrac{1}{a+1},0)$上单调递减，

所以 $f(x)_{\max}=f(\dfrac{1}{a+1})=\ln\dfrac{a}{a+1}-1$，注意到$f(\dfrac{1}{a})=-\dfrac{a+1}{a}<0$且$\dfrac{1}{a}\in(\dfrac{1}{a+1},0)$，

所以要使函数$f(x)$没有零点，必须有$f(x)_{\max}=\ln\dfrac{a}{a+1}-1<0$，解得$a<-\dfrac{e}{e-1}$

又因为$a<-1$，所以$a<-\dfrac{e}{e-1}$

即：当$a<-\dfrac{e}{e-1}$时，$f(x)$在区间$(-\infty,\dfrac{1}{a+1})$上单调递增，在区间$(\dfrac{1}{a+1},0)$上单调递减，

$f(x)_{\max}=f(\dfrac{1}{a+1})<0$，故函数$f(x)$没有零点，符合题意

综上所述，实数a的取值范围为$(-\infty,-\dfrac{e}{e-1})\cup(0,+\infty)$

21.（本小题 14 分）

【解析】（1）由已知$a_2=a_5=2$，根据新定义“只要$a_p=a_q(p,q\in N^*)$，必有$a_{p+1}=a_{q+1}$，则称$\{a_n\}$具有性质 P”，得$a_3=a_6$，$a_4=a_7=3$，$a_5=a_8=2$，所以，$a_6=21-a_7-a_8=16$，即$a_3=16$；

（2）设$\{b_n\}$的公差为d，$\{c_n\}$的公比为q，则$q>0$，

由$b_5-b_1=4d=80$，得$d=20$，则$b_n=20n-19$；

又由$\frac{c_5}{c_1}=q^4=\frac{1}{81}$，以及$q>0$，得$q=\frac{1}{3}$，则$c_n=(\frac{1}{3})^{n-5}$；

所以，$a_n=b_n+c_n=20n-19+(\frac{1}{3})^{n-5}$，

又因为$a_1=a_5=82$，而$a_2=21+27=48$，$a_6=101+\frac{1}{3}=\frac{304}{3}$，即$a_2\neq a_6$，

故$\{a_n\}$不具有性质 P；

（3）充分性：若$\{b_n\}$为常数列，不妨设$b_n=C$（C为常数），则$a_{n+1}=C+\sin a_n$，

对任意给定的a_1，只要$a_p=a_q$，则由$C+\sin a_p=C+\sin a_q$，必有$a_{p+1}=a_{q+1}$，

故$\{a_n\}$具有性质 P，充分性得证；

必要性：（用反证法证明）假设$\{b_n\}$不是常数列，则存在$k\in N^*$，

使得$b_1=b_2=\cdots=b_k=b$（b为常数），而$b_{k+1}\neq b$，

下面证明存在满足$a_{n+1}=b_n+\sin a_n$的$\{a_n\}$，使得$a_1=a_2=\cdots=a_{k+1}$，但$a_{k+2}\neq a_{k+1}$，

不妨设$f(x)=x-\sin x-b$，取$m\in N^*$，使得$m\pi>|b|$，

则$f(m\pi)=m\pi-b>0$，$f(-m\pi)=-m\pi-b<0$，故存在c使得$f(c)=0$；

取$a_1=c$，因为$a_{n+1}=b+\sin a_n\ (1\le n\le k)$，所以$a_2=b+\sin c=c=a_1$，

依此类推，得$a_1=a_2=\cdots=a_{k+1}=c$，

但$a_{k+2}=b_{k+1}+\sin a_{k+1}=b_{k+1}+\sin c\neq b+\sin c$，即$a_{k+2}\neq a_{k+1}$，所以$\{a_n\}$不具有性质 P，矛盾，必要性得证；

综上，“对任意a_1，$\{a_n\}$都具有性质 P”的充要条件为“$\{b_n\}$是常数列”；

关于我们

北京高考在线创办于 2014 年，隶属于北京太星网络科技有限公司，是北京地区极具影响力的中学升学服务平台。主营业务涵盖：北京新高考、高中生涯规划、志愿填报、强基计划、综合评价招生和学科竞赛等。

北京高考在线旗下拥有网站门户、微信公众平台等全媒体矩阵生态平台。平台活跃用户 40W+，网站年度流量数千万量级。用户群体立足于北京，辐射全国 31 省市。

北京高考在线平台一直秉承 ＂精益求精、专业严谨＂ 的建设理念，不断探索“K12 教育+互联网+大数据”的运营模式，尝试基于大数据理论为广大中学和家长提供新鲜的高考资讯、专业的高考政策解读、科学的升学规划等，为广大高校、中学和教科研单位提供“衔接和桥梁纽带”作用。

平台自创办以来，为众多重点大学发现和推荐优秀生源，和北京近百所中学达成合作关系，累计举办线上线下升学公益讲座数百场，帮助数十万考生顺利通过考入理想大学，在家长、考生、中学和社会各界具有广泛的口碑影响力

未来，北京高考在线平台将立足于北京新高考改革，基于对北京高考政策研究及北京高校资源优势，更好的服务全国高中家长和学生。