

成都市 2018 级高中毕业班第三次诊断性检测

数学(理科)参考答案及评分意见

第 I 卷 (选择题, 共 60 分)

一、选择题:(每小题 5 分, 共 60 分)

1. C; 2. D; 3. A; 4. D; 5. C; 6. B; 7. B; 8. A; 9. C; 10. B; 11. D; 12. C.

第 II 卷 (非选择题, 共 90 分)

二、填空题:(每小题 5 分, 共 20 分)

13.  $\frac{3}{2}$ ; 14.  $\frac{1}{2}$ ; 15.  $2\sqrt{3}$ ; 16. ①②④.

三、解答题:(共 70 分)

17. 解:(I)由题意, 知  $4 + x + 20 + 38 + 30 = 100$ .  $\therefore x = 8$ . ……2 分

在这 100 份作业中, 因大三学生的作业共  $3 + 6 + 15 + y + 12 = 36 + y$  (份),  
则大四学生的作业共  $64 - y$  (份).

$\therefore$  选修该门课程的大三与大四学生的人数之比为  $3 : 2$ ,

$\therefore \frac{36 + y}{64 - y} = \frac{3}{2}$ . 解得  $y = 24$ . ……4 分

故这 100 份作业中大三学生作业共 60 份.

设大三学生作业的平均成绩为  $\bar{x}$ .

则  $\bar{x} = \frac{3}{60} \times 55 + \frac{6}{60} \times 65 + \frac{15}{60} \times 75 + \frac{24}{60} \times 85 + \frac{12}{60} \times 95 = 81$ .

$\therefore$  估计这 100 份作业中大三学生作业的平均成绩为 81 分. ……6 分

(II) 在这 100 份作业的样本中, 成绩在  $[50, 60)$ ,  $[60, 70)$ ,  $[70, 80)$  的大四学生作业份数分别是 1, 2, 5.

故成绩在  $[50, 80)$  的作业有 8 份, 则  $X$  的所有可能取值为 0, 1, 2. ……7 分

$\therefore P(X=0) = \frac{C_2^0 C_6^2}{C_8^2} = \frac{15}{28}$ ,  $P(X=1) = \frac{C_2^1 C_6^1}{C_8^2} = \frac{3}{7}$ ,  $P(X=2) = \frac{C_2^2 C_6^0}{C_8^2} = \frac{1}{28}$ ,

……10 分

$\therefore$  随机变量  $X$  的分布列为

$X$	0	1	2
$P$	$\frac{15}{28}$	$\frac{3}{7}$	$\frac{1}{28}$

$\therefore$  随机变量  $X$  的数学期望  $EX = 0 \times \frac{15}{28} + 1 \times \frac{3}{7} + 2 \times \frac{1}{28} = \frac{1}{2}$ . ……12 分

18. 解:(I)  $\because a_{n+2} + 3a_n - 4a_{n+1}, n \in \mathbf{N}^*$ ,  $\therefore a_{n+2} - a_{n+1} = 3(a_{n+1} - a_n)$ . .....1分

$\because b_n = a_{n+1} - a_n$ ,  $\therefore b_{n+1} = 3b_n$ . .....2分

又  $b_1 = a_2 - a_1 = 2$ ,

$\therefore$  数列  $\{b_n\}$  是以 2 为首项, 3 为公比的等比数列. ....4分

$\therefore b_n = 2 \times 3^{n-1}$ . ....6分

(II)  $\because b_n = a_{n+1} - a_n$ ,

$\therefore a_{n+1} = (a_{n-1} - a_n) + (a_n - a_{n-1}) + \dots + (a_2 - a_1) + a_1$  .....7分

$= b_n + b_{n-1} + \dots + b_1 + a_1 = \frac{2(1-3^n)}{1-3} + 1 = 3^n$ . ....9分

$\therefore c_n = \log_3(a_n + b_n) = \log_3 3^n = n$ . ....10分

$\therefore S_n = 1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$ . ....11分

$\therefore S_{20} = \frac{20 \times 21}{2} = 210$ . ....12分

19. 解:(I) 如图, 设 AC 与 BD 的交点为 O, 连接 EO.

$\because$  四边形 ABCD 是菱形,  $\therefore AC \perp BD$ , 且 O 为 BD, AC 的中点. ....1分

$\because EB = ED$ ,  $\therefore BD \perp EO$ . ....2分

$\because AC, EO \subset$  平面 ACFE,  $AC \cap EO = O$ ,

$\therefore BD \perp$  平面 ACFE. ....4分

又  $BD \subset$  平面 BDF,

$\therefore$  平面 BDF  $\perp$  平面 ACFE. ....5分

(II)  $\because$  四边形 ABCD 是边长为 2 的菱形,  $\angle DAB = \frac{\pi}{3}$ , 则  $BD = 2$ .

$\therefore OB = OD = 1$ .

又  $AC = 2AO = \sqrt{3}AB = 2\sqrt{3}$ ,  $EF = \frac{1}{4}AC$ ,  $\therefore EF = \frac{\sqrt{3}}{2}$ . ....6分

$\because EF \parallel AC$ ,  $\therefore$  四边形 ACFE 是梯形.

$\because O$  为 AC 的中点,  $EA = EC$ ,  $\therefore EO \perp AC$ .

$\therefore$  梯形 ACFE 的面积  $S = \frac{1}{2} \times (\frac{\sqrt{3}}{2} + 2\sqrt{3}) \cdot OE = \frac{5\sqrt{3}}{4} \cdot OE$ . ....7分

又由(I)知  $BD \perp$  平面 ACFE.

$\therefore V_{ABCDEF} = V_{B-ACFE} + V_{D-ACFE} = 2V_{B-ACFE}$

$$= 2 \times \frac{1}{3} S \cdot OB = 2 \times \frac{1}{3} \times \frac{5\sqrt{3}}{4} \cdot OE \times 1 = \frac{5}{2}.$$

$\therefore OE = \sqrt{3}$ . ....8分

以 O 为坐标原点, 向量  $\vec{OA}$ ,  $\vec{OB}$ ,  $\vec{OE}$  的方向分别为 x 轴, y 轴, z 轴的正方向建立如图所示的空间直角坐标系 Oxyz.

则  $A(\sqrt{3}, 0, 0)$ ,  $B(0, 1, 0)$ ,  $E(0, 0, \sqrt{3})$ ,

$$D(0, -1, 0), F(-\frac{\sqrt{3}}{2}, 0, \sqrt{3}).$$

$$\vec{AB} = (-\sqrt{3}, 1, 0), \vec{AE} = (-\sqrt{3}, 0, \sqrt{3}),$$

$$\vec{BD} = (0, -2, 0), \vec{BF} = (-\frac{\sqrt{3}}{2}, -1, \sqrt{3}).$$

……9分

设平面  $ABE$ , 平面  $BDF$  的法向量分别为  $\mathbf{m} = (x_1, y_1, z_1)$ ,  $\mathbf{n} = (x_2, y_2, z_2)$ .

$$\text{由 } \begin{cases} \vec{AB} \cdot \mathbf{m} = 0 \\ \vec{AE} \cdot \mathbf{m} = 0 \end{cases}, \text{ 得 } \begin{cases} -\sqrt{3}x_1 + y_1 = 0 \\ -\sqrt{3}x_1 + \sqrt{3}z_1 = 0 \end{cases}. \text{ 令 } x_1 = 1, \text{ 得 } \mathbf{m} = (1, \sqrt{3}, 1).$$

……10分

$$\text{由 } \begin{cases} \vec{BD} \cdot \mathbf{n} = 0 \\ \vec{BF} \cdot \mathbf{n} = 0 \end{cases}, \text{ 得 } \begin{cases} -2y_2 = 0 \\ -\frac{\sqrt{3}}{2}x_2 - y_2 + \sqrt{3}z_2 = 0 \end{cases}. \text{ 令 } x_2 = 2, \text{ 得 } \mathbf{n} = (2, 0, 1).$$

……11分

$$\because \cos \langle \mathbf{m}, \mathbf{n} \rangle = \frac{\mathbf{m} \cdot \mathbf{n}}{|\mathbf{m}| |\mathbf{n}|} = \frac{2+1}{\sqrt{5} \times \sqrt{5}} = \frac{3}{5},$$

$\therefore$  平面  $ABE$  与平面  $BDF$  所成锐二面角的余弦值为  $\frac{3}{5}$ .

……12分

20. 解:(I)  $\because$  椭圆  $C$  的四个顶点围成的四边形的面积为  $2\sqrt{5}$ ,

$$\therefore \frac{1}{2} \cdot 2a \cdot 2b = 2\sqrt{5}, \text{ 即 } ab = \sqrt{5}.$$

……1分

$\because$  点  $F_2(c, 0) (c > 0)$  到直线  $x - y + 2 = 0$  的距离为  $\frac{|c+2|}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2}$ ,

$$\therefore c = 2.$$

……2分

$$\text{又 } a^2 = b^2 + c^2, \therefore a^2 = \frac{5}{a^2} + 4, \text{ 即 } a^4 - 4a^2 - 5 = 0.$$

解得  $a^2 = 5$  或  $a^2 = -1$  (舍去).

……3分

$$\therefore b^2 = 1.$$

$$\therefore \text{椭圆 } C \text{ 的方程为 } \frac{x^2}{5} + y^2 = 1.$$

……4分

(II) 由题意, 直线  $l$  的斜率存在且不为 0. 设直线  $l$  的方程为  $x = my - 3$ .

$$\text{由 } \begin{cases} x = my - 3 \\ \frac{x^2}{5} + y^2 = 1 \end{cases}, \text{ 消去 } x, \text{ 得 } (m^2 + 5)y^2 - 6my + 4 = 0.$$

……5分

由  $\Delta = 20(m^2 - 4) > 0$ , 得  $m < -2$  或  $m > 2$ .

……6分

设  $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2), N(x_N, y_N)$ .

$$\text{则 } y_1 + y_2 = \frac{6m}{m^2 + 5}, y_1 y_2 = \frac{4}{m^2 + 5}.$$

……7分

设过点  $F_2$  与直线  $l$  垂直的直线的方程为  $x = -\frac{1}{m}y + 2$ .

$$\text{由 } \begin{cases} x = my - 3, \\ x = -\frac{1}{m}y + 2 \end{cases}, \text{ 解得 } y_N = \frac{5m}{m^2 + 1}. \quad \dots\dots 8 \text{ 分}$$

$\because \triangle AF_2M$  与  $\triangle BF_2N$  面积相等,  $\therefore \frac{1}{2} |MA| \cdot |F_2N| = \frac{1}{2} |BN| \cdot |F_2N|$ ,

$\therefore |MA| = |BN|$ , 即  $MA, BN$  在  $y$  轴上的投影相等.

则  $|y_1 - 0| = |y_N - y_2|$ . \dots\dots 10 \text{ 分}

$\because$  点  $A, B$  在点  $M, N$  之间,  $\therefore y_1 + y_2 = y_N$ , 即  $\frac{6m}{m^2 + 5} = \frac{5m}{m^2 + 1}$ .

解得  $m = \pm\sqrt{19}$ , 满足  $m < -2$  或  $m > 2$ . \dots\dots 11 \text{ 分}

$\therefore$  直线  $l$  的方程为  $x + \sqrt{19}y + 3 = 0$  或  $x - \sqrt{19}y + 3 = 0$ . \dots\dots 12 \text{ 分}

21. 解: (I) 当  $a = -\frac{1}{2}$  时,  $f(x) = \cos x + \frac{1}{2}x^2$ , 则  $f'(x) = -\sin x + x$ . \dots\dots 1 \text{ 分}

设  $g(x) = f'(x)$ , 则  $g'(x) = -\cos x + 1, x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ . 显然  $g'(x) \geq 0$ .

$\therefore g(x)$  在  $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$  上单调递增. \dots\dots 2 \text{ 分}

又  $g(0) = 0$ ,  $\therefore$  当  $x \in [-\frac{\pi}{2}, 0)$  时,  $f'(x) < 0$ ; 当  $x \in (0, \frac{\pi}{2}]$  时,  $f'(x) > 0$ .

$\therefore f(x)$  在  $[-\frac{\pi}{2}, 0)$  上单调递减, 在  $(0, \frac{\pi}{2}]$  上单调递增. \dots\dots 3 \text{ 分}

$\because f(0) = 1, f(\frac{\pi}{2}) = f(-\frac{\pi}{2}) = \frac{\pi^2}{8}$ ,  $\therefore$  函数  $f(x)$  的值域为  $[1, \frac{\pi^2}{8}]$ . \dots\dots 4 \text{ 分}

(II)  $\because f(-x) = \cos(-x) - a(-x)^2 = \cos x - ax^2 = f(x)$ ,

$\therefore f(x)$  是  $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$  上的偶函数.

$\therefore$  “函数  $f(x)$  在  $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$  上恰有两个极小值点”等价于“函数  $f(x)$  在  $(0, \frac{\pi}{2})$  上恰有一个极小值点”.

因  $f'(x) = -\sin x - 2ax$ , 设  $h(x) = f'(x)$ , 则  $h'(x) = -\cos x - 2a$ . \dots\dots 5 \text{ 分}

① 当  $a \geq 0$  时,  $h'(x) \leq 0$ , 则  $h(x)$  在  $(0, \frac{\pi}{2})$  上单调递减.  $\therefore h(x) \leq h(0) = 0$ .

则  $f'(x) \leq 0$ , 此时  $f(x)$  在  $(0, \frac{\pi}{2})$  上单调递减, 无极小值. \dots\dots 6 \text{ 分}

② 当  $a \leq -\frac{1}{2}$  时,  $h'(x) \geq 0$ , 则  $h(x)$  在  $(0, \frac{\pi}{2})$  上单调递增.  $\therefore h(x) \geq h(0) = 0$ .

则  $f'(x) \geq 0$ , 此时  $f(x)$  在  $(0, \frac{\pi}{2})$  上单调递增, 无极小值. \dots\dots 7 \text{ 分}

③ 当  $-\frac{1}{2} < a < 0$  时, 存在  $x_0 \in (0, \frac{\pi}{2})$ , 使  $h'(x_0) = -\cos x_0 - 2a = 0$ .

当  $x \in (0, x_0)$  时,  $h'(x) < 0$ ; 当  $x \in (x_0, \frac{\pi}{2})$  时,  $h'(x) > 0$ .

$\therefore h(x)$  在  $(0, x_0)$  上单调递减, 在  $(x_0, \frac{\pi}{2})$  上单调递增.

$\because h(0) = 0, \therefore h(x_0) < 0$ . 又  $h(\frac{\pi}{2}) = -1 - a\pi$ ,

(i) 当  $-1 - a\pi \leq 0$ , 即  $-\frac{1}{\pi} \leq a < 0$  时,  $h(\frac{\pi}{2}) \leq 0$ .

$\therefore f'(x) \leq 0$ , 此时  $f(x)$  在  $(0, \frac{\pi}{2})$  上单调递减, 无极小值. ……8分

(ii) 当  $-1 - a\pi > 0$ , 即  $-\frac{1}{2} < a < -\frac{1}{\pi}$  时,  $h(\frac{\pi}{2}) > 0$ .

则存在  $t \in (x_0, \frac{\pi}{2})$ , 使得  $h(t) = -\sin t - 2at = 0$ . ……(\*)

当  $x \in (0, t)$  时,  $f'(x) < 0$ ; 当  $x \in (t, \frac{\pi}{2})$  时,  $f'(x) > 0$ .

$\therefore f(x)$  在  $(0, t)$  上单调递减, 在  $(t, \frac{\pi}{2})$  上单调递增. ……9分

$\therefore$  函数  $f(x)$  在  $(0, \frac{\pi}{2})$  上恰有一个极小值点  $x_2 = t$ . 此时,  $x = 0$  是函数  $f(x)$  的极大值点.

$\therefore$  当函数  $f(x)$  在  $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$  上恰有两个极小值点时,  $a$  的取值范围为  $(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{\pi})$ . ……10分

$\because x_1 + x_2 = 0$ ,

若  $f(x_2 - x_1) = 1 + \frac{1}{9}(x_2 - x_1)^2$ , 则  $\cos 2x_2 - 4ax_2^2 = 1 + \frac{4}{9}x_2^2$ .

由(\*)式, 知  $\sin x_2 = -2ax_2$ .  $\therefore 1 - 8a^2x_2^2 - 4ax_2^2 = 1 + \frac{4}{9}x_2^2$ . ……11分

整理得  $x_2^2(3a + 1)(6a + 1) = 0$ .

$\because x_2 \neq 0, a \in (-\frac{1}{2}, -\frac{1}{\pi})$ ,  $\therefore a = -\frac{1}{3}$ .

$\therefore$  存在  $a = -\frac{1}{3}$ , 使得  $f(x_2 - x_1) = 1 + \frac{1}{9}(x_2 - x_1)^2$  成立. ……12分

22. 解: (I) 消去曲线  $C$  的参数方程中的参数  $k$ , 得  $y^2 = 2x$ . ……2分

$\therefore$  曲线  $C$  的普通方程为  $y^2 = 2x$ . ……3分

整理  $\rho \cos(\theta - \frac{\pi}{4}) = 1$ , 可得  $\rho \cos \theta + \rho \sin \theta = \sqrt{2}$ . ……4分

$\because \rho \cos \theta = x, \rho \sin \theta = y$ ,  $\therefore$  直线  $l$  的普通方程为  $x + y - \sqrt{2} = 0$ . ……5分

(II) 将直线  $l$  的普通方程化为参数方程为  $\begin{cases} x = \sqrt{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}t, \\ y = \frac{\sqrt{2}}{2}t \end{cases}$  ( $t$  为参数). ……6分

代入  $y^2 = 2x$ , 整理可得  $t^2 + 2\sqrt{2}t - 4\sqrt{2} = 0$ .  $\dots(*)$

而  $\Delta = (2\sqrt{2})^2 - 4 \times 1 \times (-4\sqrt{2}) = 8 + 16\sqrt{2} > 0$ .  $\dots 7$  分

设  $t_1, t_2$  是方程  $(*)$  的两个实数根.

则  $t_1 + t_2 = -2\sqrt{2}$ ,  $t_1 t_2 = -4\sqrt{2}$ .  $\dots 8$  分

$\therefore |PM|^2 + |QM|^2 = t_1^2 + t_2^2 = (t_1 + t_2)^2 - 2t_1 t_2 = 8 + 8\sqrt{2}$ .  $\dots 10$  分

23. 解: (I) ① 当  $x \leq -2$  时,  $f(x) = x^2 - x - 10$ . 函数  $f(x)$  在  $(-\infty, -2]$  上单调递减, 此时函数  $f(x)$  的值域为  $[-4, +\infty)$ ;  $\dots 1$  分

② 当  $-2 < x < 2$  时,  $f(x) = -x^2 + x + 2$ . 函数  $f(x)$  在  $(-2, \frac{1}{2})$  上单调递增, 在  $(\frac{1}{2}, 2)$  上单调递减, 此时函数  $f(x)$  的值域为  $(-4, \frac{9}{4}]$ ;  $\dots 2$  分

③ 当  $x \geq 2$  时,  $f(x) = x^2 + x - 6$ . 函数  $f(x)$  在  $[2, +\infty)$  上单调递增. 此时函数  $f(x)$  的值域为  $[0, +\infty)$ ;  $\dots 3$  分

由题意, 及函数  $f(x)$  的图象知  $m = -4$ .  $\dots 5$  分

(II)  $\frac{1}{a+3} + \frac{1}{b+5}$  与  $\frac{1}{4}$  的大小关系为:  $\frac{1}{a+3} + \frac{1}{b+5} \geq \frac{1}{4}$ .

证明如下: 由  $a + b + 2m = 0$  及  $m = -4$ , 知  $a + b = 8$ .  $\dots 6$  分

$\because a > 0, b > 0$ ,

$\therefore \frac{1}{a+3} + \frac{1}{b+5} = \frac{1}{16} [(a+3) + (b+5)] (\frac{1}{a+3} + \frac{1}{b+5})$   $\dots 8$  分

$= \frac{1}{16} (2 + \frac{b+5}{a-3} + \frac{a+3}{b-5}) \geq \frac{1}{16} (2 + 2\sqrt{\frac{b+5}{a-3} \cdot \frac{a+3}{b-5}}) = \frac{1}{4}$ .

当且仅当  $\frac{b+5}{a+3} = \frac{a+3}{b+5}$ , 即  $a = 5, b = 3$  时等号成立.  $\dots 9$  分

$\therefore \frac{1}{a+3} + \frac{1}{b+5} \geq \frac{1}{4}$ .  $\dots 10$  分