2024届“皖南八校”高三第一次大联考

数　学

考生注意：

1. 本试卷分选择题和非选择题两部分。满分150分，考试时间120分钟。
2. 考生作答时，请将答案答在答题卡上。选择题每小题选出答案后，用2B铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑；非选择题请用直径0.5毫米黑色墨水签字笔在答题卡上各题的答题区域内作答，**超出答题区域书写的答案无效，在试题卷、草稿纸上作答无效。**
3. 本卷命题范围：集合与逻辑、不等式、函数与导数、三角函数、解三角形。

一、选择题：共8小题，每小题5分，共40分. 在每小题给出的四个选项中，只有一个选项是符合题目要求的.

1. 已知集合 $A=\{-1,0,2,m\}$，$B=\{-1,2,m^2\}$，且 $A\cup B=A$，则 m 等于

A. 0或1　　B. 0　　C. 1　　D. -1 或 0

2. “$a\geqslant 5$”是“$\forall x\in[-3,2]$，$x^2-3-a\leqslant 0$”成立的

A. 充分不必要条件　　B. 必要不充分条件

C. 充要条件　　D. 既不充分也不必要条件

3. 已知函数 $f(x+1)$ 为偶函数，且函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,1]$ 上单调递增，则关于 x 的不等式 $f(-2^x)>f(-8)$ 的解集为

A. $(-\infty,1)$　　B. $(-\infty,3)$　　C. $(3,+\infty)$　　D. $(1,+\infty)$

4. 已知 a、b、c 均为实数，且 $\sqrt{a}>\sqrt{b}$，则下列不等式正确的是

A. $ac^2>bc^2$　　B. $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^a>\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^b$

C. $\frac{b}{a}>\frac{a}{b}$　　D. $\frac{b+2}{a+2}>\frac{b}{a}$

5. 杨梅是杨梅科杨梅属常绿乔木植物，自古以来深受人们的喜爱，古诗《咏梅》就这样赞美杨梅：“颗颗黑珠树中藏，此物只在五月有. 游人过此尝一颗，满嘴酸甜不思归.”根据杨梅单果的果型和颜色，可将其依次分为4个等级，其等级 $x(x=1,2,3,4)$ 与其对应等级的市场销售单价 y（单位：元/千克）近似满足函数关系式 $y=e^{ax+b}$. 若花同样的钱买到的2级杨梅比4级杨梅多1倍，且1级杨梅的市场销售单价为4元/千克，则4级杨梅的市场销售单价最接近（$\sqrt{2}\approx 1.414$）

A. 5.66元/千克　　B. 8.48元/千克

C. 11.31元/千克　　D. 16元/千克

6. 已知 $\tan\left(\alpha-\frac{\pi}{4}\right)=2$，则 $\frac{\sin\alpha\cos 2\alpha}{\sqrt{2}\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)}=$

A. $-\frac{6}{5}$　　B. $-\frac{7}{5}$　　C. $\frac{7}{5}$　　D. $\frac{6}{5}$

座位号______ 考场号______ 准考证号______ 姓名______ 班级______ 学校______

密 封 线 内 不 要 答 题

7. 已知$\triangle ABC$的内角A,B,C所对的边分别为a,b,c，且$b=2,\sqrt{3}\sin C=a\sin B$，若$BC$边上的中线$AD=\sqrt{7}$，则$BC$的长为

A. $2\sqrt{3}$　　B. $\sqrt{6}$　　C. $3\sqrt{2}$　　D. $3\sqrt{3}$

8. 已知定义在$\mathbf{R}$上的函数$f(x)$的导函数为$f'(x)$，且$f'(x)-2f(x)<0,f(0.5)=\mathrm{e}$，则不等式$f(\ln(x+1))>(x+1)^2$的解集为

A. $(-1,\sqrt{\mathrm{e}}-1)$　　B. $(-1,\sqrt{\mathrm{e}})$

C. $(-1,\mathrm{e})$　　D. $(\sqrt{\mathrm{e}},\mathrm{e})$

二、选择题：本题共4小题，每小题5分，共20分．在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求．全部选对的得5分，部分选对的得2分，有选错的得0分．

9. 下列命题正确的是

A. 不等式$x^2+(2m+1)x+m^2+m<0$的解集为$(-m-1,-m)$

B. 关于x的方程$x^2-(a^2-1)x+a-2=0$的一根比-1大而另一根比-1小，则a的取值范围是$(-2,-1)$

C. 若$a>b>1$，则$\log_a \mathrm{e}<\log_b \mathrm{e}$

D. 若$x>0,y>0$且满足$x^2+y^2+3xy=1$，则$x^2+y^2\geqslant\frac{2}{5}$

10. 在锐角$\triangle ABC$中，角A,B,C的对边分别为a,b,c，$\triangle ABC$的外接圆半径为2，且$a=2\sqrt{3}$，则

A. $A=\frac{\pi}{3}$

B. $2<b<4$

C. $\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}$的取值范围为$(0,6)$

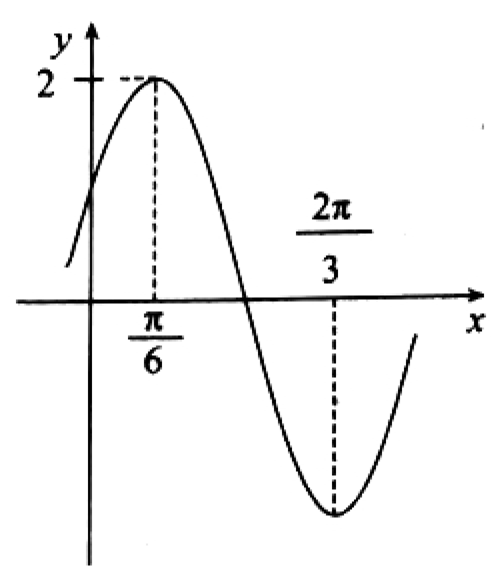
D. $b+c$的最大值为$4\sqrt{3}$

11. 已知函数$f(x)$的定义域为$\mathbf{R}$，$f(x+2)$为偶函数，$f(2+x)=-f(x)$，则

A. $f(x)$的图象关于直线$x=2$对称　　B. 4是$f(x)$的周期

C. $f(2023)=0$　　D. $\sum\limits_{i=0}^{19}f(i)=2$

12. 已知函数$f(x)=A\sin(\omega x+\varphi)$（其中$A>0,\omega>0,|\varphi|<\pi$）的部分图象如图所示，则下列说法正确的是



A. 若$f(x)$在$(-a,a)$单调递增，则$0<a\leqslant\frac{\pi}{6}$

B. $f(x)$在区间$\left[-\frac{\pi}{4},\frac{7\pi}{24}\right]$上单调递增

C. 将$f(x)$沿着x轴向左平移$\frac{\pi}{12}$个单位得到$g(x)$，若$y=g(tx)$ $(t>0)$在$[0,\pi]$上有且仅有两个零点，则$t\in\left[\frac{5}{6},\frac{4}{3}\right)$

D. 直线$y=1$与$y=f(x)\left(-\frac{\pi}{12}\leqslant x\leqslant\frac{23\pi}{12}\right)$图象的所有交点的横坐标之和为$\frac{14\pi}{3}$

三、填空题：共4小题，每小题5分，共20分.

13.《九章算术》是中国古代的数学名著，其中《方田》一章涉及到了弧田面积的计算问题，如图所示，弧田是由弧$\overset{\frown}{AB}$和弦AB所围成的图中阴影部分.若弧田所在扇形的圆心角为$\frac{2}{3}\pi$，扇形的面积为3π，则此弧田的面积为________.

14. 函数$f(x)=k\ln x-x^2+3x(k\neq 0)$在区间$\left(0,\frac{3}{2}\right)$上存在极值，则实数$k$的取值范围为________.

15. 已知$f(x)=\sin\omega x\cos\omega x-\sqrt{3}\cos^2\omega x,(\omega>0)$，$x_1,x_2$是函数$y=f(x)+\frac{2+\sqrt{3}}{2}$的两个零点，且$|x_1-x_2|_{\min}=\pi$，当$x\in\left[0,\frac{7\pi}{12}\right]$时，$f(x)$最小值与最大值之和为________.

16. 已知$\forall x\in[1,+\infty)$，$kx-2\ln(x+1)\geqslant 0$恒成立，则k的最小整数值为________.

四、解答题：共6小题，共70分.解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

17.（10分）

已知集合$A=\left\{x\left|\frac{x-a}{x-3a}<0\right.\right\}(a\neq 0)$，不等式$x^2-5x+6<0$的解集为$B$.

(1)当$a=1$时，求$A\cup B$；

(2)若$x\in A$是$x\in B$的必要不充分条件，求实数a的取值范围.

18.（12分）

已知关于x的不等式$ax^2-2\geqslant 2x-ax(a\in\mathbf{R})$.

(1)若不等式的解集为$\{x|-2\leqslant x\leqslant b\}$，求实数$b$的值；

(2)若$a<0$，解不等式$ax^2-2\geqslant 2x-ax$.

19.（12分）

在$\triangle ABC$中，内角A,B,C所对的边分别为a,b,c，$\triangle ABC$的面积为$S_{\triangle ABC}$.

已知①$\sqrt{3}\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}=2S_{\triangle ABC}$，②$(\sin B+\sin A)(\sin B-\sin A)=\sin C(\sin C+\sin A)$，③$(c+2a)\cos B=-b\cos C$，从这三个条件中任选一个，回答下列问题.

(1)求角B；

(2)若$b=2\sqrt{3}$，求a^2+c^2的取值范围.

20.(12分)

已知函数 $f(x)=2\sqrt{3}\sin^2\left(\omega x+\frac{\pi}{4}\right)-2\sin^2\omega x-\sqrt{3}+1(\omega>0)$的最小正周期为 π.

(1)求 $f(x)$的解析式;

(2)将函数 $f(x)$的图象沿着 x 轴向右平移$\frac{\pi}{6}$个单位长度,得到函数 $y=g(x)$的图象,方程 $g(x)=\frac{3}{2}$在$\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$上的两解分别为 $x_1,x_2(x_1<x_2)$,求 $\sin(x_2-x_1)$的值.

21.(12分)

已知 $f(x)=\frac{2^x+a}{2^x+b}$是定义在 $\mathbf{R}$ 上的奇函数.

(1)试判断函数 $f(x)$的单调性;

(2)已知 $g(x)=\frac{1+f(x)}{1-f(x)}$,若对任意 $x\in\mathbf{R}$ 且 $x\neq 0$,不等式 $g(2x)+\frac{1}{g(2x)}\geqslant m\left(g(x)+\frac{1}{g(x)}\right)-18$ 恒成立,求实数 m 的取值范围.

22.(12分)

已知函数 $f(x)=x^2-e^x+2$.

(1)判断函数的单调性;

(2)证明:当 $x>0$ 时,$f(x)-x<\cos x$.

2024 届“皖南八校”高三第一次大联考·数学

参考答案、解析及评分细则

一、选择题：共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分. 在每小题给出的四个选项中，只有一个选项是符合题目要求的.

1. C　由题意集合 $A=\{-1,0,2,m\}$，$B=\{-1,2,m^2\}$，$\because A\cup B=A$，则满足 $m^2=0$ 或 $m=m^2$ 且 $m\neq0$，解得 $m=1$. 故选 C.

2. B　由 $\forall x\in[-3,2]$，$x^2-3-a\leqslant0$ 等价于 $\forall x\in[-3,2]$，$(x^2-3)_{\max}\leqslant a$. 又 $\because x^2-3\in[-3,6]$，$\therefore a\geqslant6$. $\therefore$“$a\geqslant5$”是“$\forall x\in[-3,2]$，$x^2-3-a\leqslant0$”成立的必要不充分条件. 故选 B.

3. B　$\because f(x+1)$为偶函数，$\therefore f(x+1)$的图象关于 y 轴对称，则 $f(x)$的图象关于直线 $x=1$ 对称. $\because f(x)$在$(-\infty,1]$上单调递增，$\therefore f(x)$在$[1,+\infty)$上单调递减，$\therefore f(-2^x)>f(-8)=f(10)$，$\therefore -8<-2^x<10$，解得 $x<3$，即原不等式的解集为$(-\infty,3)$. 故选 B.

4. D　A 选项中，$c=0$ 时不成立，故 A 错误；B 选项中，因为函数 $y=\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^x$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递减且 $a>b$，所以 $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^a<\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^b$，故 B 错误；C 选项中，$\frac{b}{a}>\frac{a}{b}$ 等价于 $b^2>a^2$，由 $a>b\geqslant0$，故有 $b^2<a^2$，故 C 错误；D 选项中，由 $a>b\geqslant0$ 得 $a-b>0$，所以 $\frac{b+2}{a+2}-\frac{b}{a}=\frac{a(b+2)-b(a+2)}{a(a+2)}=\frac{2(a-b)}{a(a+2)}>0$，所以 $\frac{b+2}{a+2}>\frac{b}{a}$，D 正确. 故选 D.

5. C　由题意可知 $\frac{e^{4a+b}}{e^{2a+b}}=e^{2a}=2$，解得 $e^a=\sqrt{2}$. 由 $e^{a+b}=4$，可得 $e^b=2\sqrt{2}$，所以 $e^{4a+b}=8\sqrt{2}\approx11.31$. 故选 C.

6. A　由已知条件 $\tan\left(\alpha-\frac{\pi}{4}\right)=2$，故 $\tan\alpha=\tan\left(\alpha-\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\tan\left(\alpha-\frac{\pi}{4}\right)+\tan\frac{\pi}{4}}{1-\tan\left(\alpha-\frac{\pi}{4}\right)\tan\frac{\pi}{4}}=-3$，且有 $\cos\alpha\neq0$.
所以 $\frac{\sin\alpha\cos2\alpha}{\sqrt{2}\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)}=\frac{\sin\alpha\cos2\alpha}{\sin\alpha+\cos\alpha}=\frac{\sin\alpha}{\sin\alpha+\cos\alpha}\cdot\frac{\cos^2\alpha-\sin^2\alpha}{\sin^2\alpha+\cos^2\alpha}=\frac{\tan\alpha}{\tan\alpha+1}\cdot\frac{1-\tan^2\alpha}{\tan^2\alpha+1}=-\frac{6}{5}$. 故选 A.

7. A　在$\triangle ACD$ 中，由余弦定理得：$AD^2=AC^2+CD^2-2AC\cdot CD\cdot\cos\angle ACD$，即 $7=4+\left(\frac{a}{2}\right)^2-2a\cos\angle ACD$. 在$\triangle ABC$ 中，由余弦定理得：$AB^2=AC^2+BC^2-2AC\cdot BC\cdot\cos\angle ACB$，即 $c^2=4+a^2-4a\cos\angle ACD$. 由正弦定理得$\sqrt{3}\sin C=a\sin B\Leftrightarrow\sqrt{3}c=ab=2a$，解得 $c=4$，$a=2\sqrt{3}$. 故选 A.

8. A　令 $g(x)=\frac{f(x)}{e^{2x}}$，则 $g'(x)=\frac{f'(x)-2f(x)}{e^{2x}}<0$. $\because g(x)$在 $\mathbf{R}$ 上递减，且 $g(0.5)=\frac{f(0.5)}{e}=1$，$\therefore f(\ln(x+1))>(x+1)^2\Leftrightarrow g(\ln(x+1))=\frac{f(\ln(x+1))}{e^{2\ln(x+1)}}=\frac{f(\ln(x+1))}{(x+1)^2}>1$，$\therefore\ln(x+1)<\frac{1}{2}$，解得$-1<x<\sqrt{e}-1$. 故选 A.

二、选择题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分. 在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求. 全部选对的得 5 分，部分选对的得 2 分，有选错的得 0 分.

9. ACD　不等式 $x^2+(2m+1)x+m^2+m<0$ 即为$(x+m)(x+m+1)<0$，解得$-m-1<x<-m$，A 正确；关于 x 的方程 $x^2-(a^2-1)x+a-2=0$ 的一根比-1大而另一根比-1小，令 $f(x)=x^2-(a^2-1)x+a-2$，则有 $f(-1)<0$，即 $1+(a^2-1)+a-2<0$，解得$-2<a<1$，B 错误；当 $a>b>1$ 时，则 $\ln a>\ln b>\ln 1=0$，

$\therefore \frac{1}{\ln a}<\frac{1}{\ln b}$，即$\log_a e<\log_b e$，C 正确；由 $x^2+y^2+3xy=1$ 可变形为$(x^2+y^2)-1=-3xy\geqslant-3\times\frac{x^2+y^2}{2}$，解得 $x^2+y^2\geqslant\frac{2}{5}$，当且仅当 $x=y=\frac{\sqrt{5}}{5}$时取等号，D 正确. 故选 ACD.

10. ABD　在锐角$\triangle ABC$中，$a=2\sqrt{3}$，$R=2$，根据正弦定理，$\frac{a}{\sin A}=\frac{2\sqrt{3}}{\sin A}=2R=4$，$\therefore \sin A=\frac{\sqrt{3}}{2}$，$A=\frac{\pi}{3}$，A 正确；根据正弦定理，$b=4\sin B$，$\because A=\frac{\pi}{3}$，$\triangle ABC$ 是锐角三角形，$\therefore C=\frac{2\pi}{3}-B<\frac{\pi}{2}$，$\therefore \frac{\pi}{6}<B<\frac{\pi}{2}$，$\therefore \frac{1}{2}<\sin B<1$，$2<b<4$，B 正确；$\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}=2\sqrt{3}c\cos B$，当 $B=\frac{\pi}{2}$时，$c=4\sin C=2$，$\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}=0$；当 $B=\frac{\pi}{6}$时，$c=4\sin C=4$，$\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}=12$. 在 B 由$\frac{\pi}{2}$逐渐减小到$\frac{\pi}{6}$的过程中，c 与 $\cos B$ 都不断增大，$\therefore \overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}$也不断增大. $\therefore \overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}$的取值范围为$(0,12)$，C 错误；$b+c=4(\sin B+\sin C)=4[\sin B+\sin(\frac{2\pi}{3}-B)]=4(\frac{3}{2}\sin B+\frac{\sqrt{3}}{2}\cos B)=4\sqrt{3}\sin(B+\frac{\pi}{6})$，$\because \frac{\pi}{6}<B<\frac{\pi}{2}$，$\frac{\pi}{3}<B+\frac{\pi}{6}<\frac{2\pi}{3}$，$\therefore B+\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{2}$时，$b+c$ 取最大值 $4\sqrt{3}$，D 正确. 故选 ABD.

11. ABC　$\because f(x)$ 定义域为 $\mathbf{R}$，且 $f(x+2)$ 为偶函数，$\therefore f(2-x)=f(2+x)$，$\therefore f(x)$ 关于直线 $x=2$ 对称，故 A 正确；又 $\because f(2+x)=-f(x)$，则 $f(x+4)=-f(x+2)=f(x)$，$\therefore f(x)$ 的周期为 4，故 B 正确；由 $f(2-x)=f(2+x)$ 可得 $f(3)=f(1)$，由 $f(2+x)=-f(x)$ 可得 $f(3)=-f(1)$，$\therefore f(3)=f(1)=0$，$\therefore f(2023)=f(505\times4+3)=0$，故 C 正确；由 $f(2+x)=-f(x)$ 得 $f(0)+f(2)=0$，$\therefore f(0)+f(1)+f(2)+f(3)=0$，$\therefore \sum_{i=0}^{19}f(i)=0+0+0+0+0=0$，故 D 错误. 故选 ABC.

12. AC　由图知 $A=2$，$\frac{T}{2}=\frac{2\pi}{3}-\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{2}$，$\omega=\frac{2\pi}{T}=2$，则 $f(x)=2\sin(2x+\varphi)$，又 $2\times\frac{\pi}{6}+\varphi=\frac{\pi}{2}$，则 $\varphi=\frac{\pi}{6}$，$f(x)=2\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)$. 若 $f(x)$在$(-a,a)$单调递增，$2x+\frac{\pi}{6}\in\left(-2a+\frac{\pi}{6},2a+\frac{\pi}{6}\right)$，则 $2k\pi-\frac{\pi}{2}\leqslant-2a+\frac{\pi}{6}<2a+\frac{\pi}{6}\leqslant2k\pi+\frac{\pi}{2}$，$k\in\mathbf{Z}$，令 $k=0$，求得 $0<a\leqslant\frac{\pi}{6}$，A 正确；$x\in\left[-\frac{\pi}{4},\frac{7\pi}{24}\right]$时，$2x+\frac{\pi}{6}\in\left[-\frac{\pi}{3},\frac{3\pi}{4}\right]$，所以 $f(x)$在区间$\left[-\frac{\pi}{4},\frac{7\pi}{24}\right]$上先增后减，B 错误；将 $f(x)$沿 x 轴向左平移$\frac{\pi}{12}$个单位得到 $g(x)$，则 $g(x)=2\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)$，$g(tx)=2\sin(2tx+\frac{\pi}{3})$，当 $x\in[0,\pi]$时，$2tx+\frac{\pi}{3}\in\left[\frac{\pi}{3},2t\pi+\frac{\pi}{3}\right]$，函数 $y=g(tx)$在$[0,\pi]$上有且仅有两个零点，可得 $2\pi\leqslant2t\pi+\frac{\pi}{3}<3\pi$，解得$\frac{5}{6}\leqslant t<\frac{4}{3}$，C 正确；当$-\frac{\pi}{12}\leqslant x\leqslant\frac{23\pi}{12}$时，$0\leqslant2x+\frac{\pi}{6}\leqslant4\pi$，设直线 $y=1$ 与 $y=f(x)$ 交点的横坐标为 x_1、x_2、x_3、x_4，则 $\left(2x_1+\frac{\pi}{6}\right)+\left(2x_2+\frac{\pi}{6}\right)+\left(2x_3+\frac{\pi}{6}\right)+\left(2x_4+\frac{\pi}{6}\right)=\pi+5\pi=6\pi$，所有交点的横坐标之和为 $x_1+x_2+x_3+x_4=\frac{8\pi}{3}$，D 错误. 故选 AC.

三、填空题：共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分.

13. $3\pi-\frac{9\sqrt{3}}{4}$　设扇形的半径为 R，扇形面积 $S=\frac{1}{3}\times\pi R^2=3\pi$，可得 $R=3$. 故有 $S_{\triangle AOB}=\frac{1}{2}OA\cdot OB\cdot\sin\frac{2\pi}{3}=$

$\frac{9\sqrt{3}}{4}$，弧田的面积为 $S-S_{\triangle AOB}=3\pi-\frac{9\sqrt{3}}{4}$.

14. $\left(-\frac{9}{8},0\right)$　$f'(x)=\frac{k}{x}-2x+3=\frac{-2x^2+3x+k}{x}$，∵ $f(x)$ 在区间 $\left(0,\frac{3}{2}\right)$ 上存在极值，即函数 $g(x)=-2x^2+3x+k$ 在 $\left(0,\frac{3}{2}\right)$ 内存在左右异号零点. $g(x)$ 开口向下，对称轴为直线 $x=\frac{3}{4}$，所以

$\begin{cases} g\left(\frac{3}{4}\right)=\frac{9}{8}+k>0 \\ g(0)=k<0 \end{cases}$，可解得 $-\frac{9}{8}<k<0$.

15. $\frac{2-3\sqrt{3}}{2}$　由题意可得：$f(x)=\sin\omega x\cos\omega x-\sqrt{3}\cos^2\omega x=\frac{1}{2}\sin2\omega x-\frac{\sqrt{3}}{2}\cos2\omega x-\frac{\sqrt{3}}{2}=\sin\left(2\omega x-\frac{\pi}{3}\right)-\frac{\sqrt{3}}{2}$，

故 $y=f(x)+\frac{2+\sqrt{3}}{2}=0$，即 $\sin\left(2\omega x-\frac{\pi}{3}\right)=-1$，由于 x_1,x_2 是函数 $y=f(x)+\frac{2+\sqrt{3}}{2}$ 的两个零点，所以

$|x_1-x_2|_{\min}$ 为函数 $\sin\left(2\omega x-\frac{\pi}{3}\right)$ 的最小正周期，即 $\frac{2\pi}{2\omega}=\pi$，解得：$\omega=1$，故有：$f(x)=\sin\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)-\frac{\sqrt{3}}{2}$，

当 $0\leqslant x\leqslant\frac{7\pi}{12}$ 时，$-\frac{\pi}{3}\leqslant 2x-\frac{\pi}{3}\leqslant\frac{5\pi}{6}$，可知 $-\frac{\sqrt{3}}{2}\leqslant\sin\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)\leqslant1$，即 $-\sqrt{3}\leqslant\sin\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)-\frac{\sqrt{3}}{2}\leqslant1-\frac{\sqrt{3}}{2}$，

所以 $f(x)$ 最小值与最大值之和为 $\frac{2-3\sqrt{3}}{2}$.

16. 2　令 $f(x)=\frac{\ln(x+1)}{x}(x\geqslant1)$，则 $f'(x)=\frac{x-(x+1)\ln(x+1)}{x^2(x+1)}$，设 $g(x)=x-(x+1)\ln(x+1)(x\geqslant0)$，则 $g'(x)=-\ln(x+1)<0$ 在 $(0,+\infty)$ 上恒成立，所以 $g(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递减. 又 $g(x)<g(0)=0$，所以 $f(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 上单调递减，从而可知函数 $f(x)$ 在 $[1,+\infty)$ 上最大值为：$f(x)_{\max}=f(1)=\ln 2$，故 $k\geqslant 2\ln 2$，k 的最小整数值为 2.

四、解答题：共 6 小题，共 70 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

17. 解：(1) 当 $a=1$ 时，$\frac{x-a}{x-3a}=\frac{x-1}{x-3}<0$，解得 $1<x<3$，所以集合 $A=\{x|1<x<3\}$，……………… 2 分

解不等式 $x^2-5x+6<0$，得 $2<x<3$，所以集合 $B=\{x|2<x<3\}$，……………… 4 分

所以 $A\cup B=\{x|1<x<3\}$ ……………… 5 分

(2) 因为 $x\in A$ 是 $x\in B$ 的必要不充分条件，则 $B\subsetneqq A$，……………… 6 分

由 $\frac{x-a}{x-3a}<0$ 得 $(x-3a)(x-a)<0$，……………… 7 分

当 $a>0$ 时，$A=(a,3a)$，有 $\begin{cases} a\leqslant2 \\ 3a\geqslant3 \end{cases}$ 且等号不同时成立，解得 $1\leqslant a\leqslant2$，……………… 8 分

当 $a<0$ 时，$A=(3a,a)$，显然 $A\cap B=\varnothing$，不合题意. ……………… 9 分

所以实数 a 的取值范围是 $[1,2]$. ……………… 10 分

18. 解：(1) 原不等式化为 $ax^2+(a-2)x-2\geqslant0$，

∵不等式的解集为 $\{x|-2\leqslant x\leqslant b\}$，∴ $-2,b$ 是方程 $ax^2+(a-2)x-2=0$ 的两根，

由根与系数的关系得$\begin{cases}-\dfrac{2}{a}=-2b\\ -\dfrac{a-2}{a}=-2+b\\ a<0\end{cases}$, ………… 4 分

解得$\begin{cases}a=-1\\ b=-1\end{cases}$. 经检验满足 $\Delta>0$. ………… 6 分

(2)当 $a<0$ 时,原不等式化为$(x-\dfrac{2}{a})(x+1)\leqslant 0$,

当$\dfrac{2}{a}>-1$,即 $a<-2$ 时,解得$-1\leqslant x\leqslant\dfrac{2}{a}$; ………… 7 分

当$\dfrac{2}{a}=-1$,即 $a=-2$ 时,解得 $x=-1$; ………… 8 分

当$\dfrac{2}{a}<-1$,即$-2<a<0$ 时,解得$\dfrac{2}{a}\leqslant x\leqslant -1$, ………… 9 分

综上所述,当$-2<a<0$ 时,不等式的解集为$\{x|\dfrac{2}{a}\leqslant x\leqslant -1\}$; ………… 10 分

当 $a=-2$ 时,不等式的解集为$\{-1\}$; ………… 11 分

当 $a<-2$ 时,不等式的解集为$\{x|-1\leqslant x\leqslant\dfrac{2}{a}\}$. ………… 12 分

19. 解:(1)选①,由$\sqrt{3}\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}=2S_{\triangle ABC}$可得:

$-\sqrt{3}ca\cos B=2\cdot\dfrac{1}{2}ac\sin B=ac\sin B$,故有 ………… 3 分

$\tan B=\dfrac{\sin B}{\cos B}=-\sqrt{3}$, ………… 5 分

又$\because B\in(0,\pi)$,$\therefore B=\dfrac{2\pi}{3}$; ………… 6 分

选②,$\because(\sin B+\sin A)(\sin B-\sin A)=\sin C(\sin C+\sin A)$,

由正余弦定理得 $c^2+ac=b^2-a^2$, ………… 2 分

$\therefore\cos B=\dfrac{a^2+c^2-b^2}{2ac}=-\dfrac{1}{2}$, ………… 5 分

又 $B\in(0,\pi)$,$\therefore B=\dfrac{2\pi}{3}$; ………… 6 分

选③,$\because(c+2a)\cos B=-b\cos C$,由正弦定理可得$(\sin C+2\sin A)\cos B=-\sin B\cos C$, ………… 2 分

$\therefore 2\sin A\cos B=-\sin B\cos C-\sin C\cos B=-\sin(C+B)=-\sin A$, ………… 4 分

$\because B\in(0,\pi)$,$\sin A\neq 0$,

$\therefore\cos B=-\dfrac{1}{2}$,$\therefore B=\dfrac{2\pi}{3}$. ………… 6 分

(2)由余弦定理得 $c^2+a^2=b^2+2ac\cos B=12-ac$ ………… 8 分

$\because ac>0$,$\therefore a^2+c^2<12$. ………… 9 分

又有 $12=c^2+a^2+ac\leqslant c^2+a^2+\dfrac{c^2+a^2}{2}$,当且仅当 $a=c=2$ 时取等号,

可得 $c^2+a^2\geqslant 8$. ………………………………………………………… 11 分

即 a^2+c^2 的取值范围是 $[8,12)$. ………………………………………………………… 12 分

20. 解：(1) $f(x)=2\sqrt{3}\sin^2\left(\omega x+\frac{\pi}{4}\right)-2\sin^2\omega x-\sqrt{3}+1$

$=\sqrt{3}\left[2\sin^2\left(\omega x+\frac{\pi}{4}\right)-1\right]+\cos 2\omega x=-\sqrt{3}\cos\left(2\omega x+\frac{\pi}{2}\right)+\cos 2\omega x$

$=\sqrt{3}\sin 2\omega x+\cos 2\omega x=2\sin\left(2\omega x+\frac{\pi}{6}\right)$ ………………………………………………………… 4 分

∵函数 $f(x)$ 的最小正周期为 π，∴$\frac{2\pi}{2\omega}=\pi$，$\omega=1$，

则 $f(x)=2\sin(2x+\frac{\pi}{6})$. ………………………………………………………… 6 分

(2) 由题意得 $g(x)=2\sin\left[2\left(x-\frac{\pi}{6}\right)+\frac{\pi}{6}\right]=2\sin\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)$，

当 $x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ 时，$2x-\frac{\pi}{6}\in\left[-\frac{\pi}{6},\frac{5\pi}{6}\right]$，

∵方程 $g(x)=\frac{3}{2}$ 在 $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ 上的两解分别为 $x_1,x_2(x_1<x_2)$，

则 $\sin\left(2x_1-\frac{\pi}{6}\right)=\sin\left(2x_2-\frac{\pi}{6}\right)=\frac{3}{4}$，则有 $0<2x_1-\frac{\pi}{6}<\frac{\pi}{2}<2x_2-\frac{\pi}{6}<\frac{5\pi}{6}$，

且有 $\left(2x_1-\frac{\pi}{6}\right)+\left(2x_2-\frac{\pi}{6}\right)=\pi$，即 $x_2=\frac{2\pi}{3}-x_1$， ………………………………………………………… 9 分

∴$\sin(x_2-x_1)=\sin\left(\frac{2\pi}{3}-2x_1\right)$

$=\sin\left[\frac{\pi}{2}-\left(2x_1-\frac{\pi}{6}\right)\right]$

$=\cos\left(2x_1-\frac{\pi}{6}\right)=\frac{\sqrt{7}}{4}$. ………………………………………………………… 12 分

21. 解：(1) ∵$f(x)$ 是奇函数，则 $f(x)+f(-x)=\frac{2^x+a}{2^x+b}+\frac{2^{-x}+a}{2^{-x}+b}=0$，

整理得：$(a+b)(2^x+2^{-x})+2ab+2=0$， ………………………………………………………… 2 分

要使上式对任意的 x 成立，则 $\begin{cases}a+b=0\\2ab+2=0\end{cases}$，解得 $\begin{cases}a=1\\b=-1\end{cases}$ 或 $\begin{cases}a=-1\\b=1\end{cases}$，

当 $\begin{cases}a=1\\b=-1\end{cases}$ 时，$f(x)=\frac{2^x+1}{2^x-1}$ 的定义域为 $\{x|x\neq 0\}$，不合题意；

当 $\begin{cases}a=-1\\b=1\end{cases}$，$f(x)=\frac{2^x-1}{2^x+1}$ 的定义域为 $\mathbf{R}$，符合题意. ∴$f(x)=\frac{2^x-1}{2^x+1}$. ………………………………… 4 分

对任意的 $x_1,x_2\in\mathbf{R}$，$(x_1<x_2)$，

有 $f(x_1)-f(x_2)=\frac{2^{x_1}-1}{2^{x_1}+1}-\frac{2^{x_2}-1}{2^{x_2}+1}=\frac{2(2^{x_1}-2^{x_2})}{(2^{x_1}+1)(2^{x_2}+1)}<0$，

∴$f(x_1)<f(x_2)$，

故函数 $f(x)$ 是 $\mathbf{R}$ 上的增函数. …………………………………………………………………………… 6 分

(2) $\because g(x)=\dfrac{1+f(x)}{1-f(x)}=2^x$， …………………………………………………………………………… 7 分

$\therefore g(2x)+\dfrac{1}{g(2x)}\geqslant m\left(g(x)+\dfrac{1}{g(x)}\right)-18$ 恒成立等价为

$(2^x+2^{-x})^2-2\geqslant m(2^x+2^{-x})-18$ 恒成立， …………………………………………………………… 8 分

令 $t=2^x+2^{-x}$，$x\neq0$ 则 $t=2^x+2^{-x}>2\sqrt{2^x\cdot2^{-x}}=2$，则 $t^2-2\geqslant mt-18$，可得 $m\leqslant t+\dfrac{16}{t}$ 在 $t>2$ 时恒成立.

……… 10 分

由基本不等式 $t+\dfrac{16}{t}\geqslant8$，当且仅当 $t=4$ 时，等号成立，

$\therefore m\leqslant8$. …………………………………………………………………………………………… 12 分

22. 解：(1) $f'(x)=2x-e^x$，令 $g(x)=2x-e^x$，则 $g'(x)=2-e^x$，令 $g'(x)=0$，解得 $x=\ln 2$， ……………… 2 分

当 $x<\ln 2$，$g'(x)>0$，$g(x)$ 单调递增，

当 $x>\ln 2$，$g'(x)<0$，$g(x)$ 单调递减，

$\therefore f'(x)\leqslant f'(\ln 2)=2\ln 2-2<0$，

$\therefore f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递减. …………………………………………………………………………… 4 分

(2) 当 $x>0$ 时，要证明不等式 $f(x)-x<\cos x$，

即证 $e^x-x^2+x+\cos x-2>0$，

令 $g(x)=e^x-x^2+x+\cos x-2\,(x\geqslant0)$，则 $g'(x)=e^x-2x+1-\sin x$， ………………………………… 6 分

令 $h(x)=e^x-2x\,(x\geqslant0)$，则 $h'(x)=e^x-2$，

当 $x\in(0,\ln 2)$ 时，$h'(x)<0$；当 $x\in(\ln 2,+\infty)$ 时，$h'(x)>0$；

$h(x)$ 在 $(0,\ln 2)$ 上单调递减，在 $(\ln 2,+\infty)$ 上单调递增，

$\therefore h(x)\geqslant h(\ln 2)=2-2\ln 2>0$， …………………………………………………………………… 9 分

又 $1-\sin x\geqslant0$

$\therefore g'(x)=h(x)+1-\sin x>0$， ……………………………………………………………………………… 11 分

$\therefore g(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，$g(x)>g(0)=0$；

即 $e^x-x^2+x+\cos x-2>0$，原不等式得证. …………………………………………………………… 12 分

关于我们

北京高考在线创办于 2014 年，隶属于北京太星网络科技有限公司，是北京地区极具影响力的中学升学服务平台。主营业务涵盖：北京新高考、高中生涯规划、志愿填报、强基计划、综合评价招生和学科竞赛等。

北京高考在线旗下拥有网站门户、微信公众平台等全媒体矩阵生态平台。平台活跃用户 50W+，网站年度流量数千万量级。用户群体立足于北京，辐射全国 31 省市。

北京高考在线平台一直秉承“精益求精、专业严谨”的建设理念，不断探索“K12 教育+互联网+大数据”的运营模式，尝试基于大数据理论为广大中学和家长提供新鲜的高考资讯、专业的高考政策解读、科学的升学规划等，为广大高校、中学和教科研单位提供“衔接和桥梁纽带”作用。

平台自创办以来，为众多重点大学发现和推荐优秀生源，和北京近百所中学达成合作关系，累计举办线上线下升学公益讲座数千场，帮助数十万考生顺利通过考入理想大学，在家长、考生、中学和社会各界具有广泛的口碑影响力

未来，北京高考在线平台将立足于北京新高考改革，基于对北京高考政策研究及北京高校资源优势，更好的服务全国高中家长和学生。

推荐大家关注北京高考在线网站官方微信公众号：京考一点通，我们会持续为大家整理分享最新的高中升学资讯、政策解读、热门试题答案、招生通知等内容！