2021 年全国中学生数学奥林匹克竞赛（初赛）
暨 2021 全国高中数学联合竞赛
一试（B 卷）参考答案及评分标准

说明：

1．评阅试卷时，请依据本评分标准．填空题只设 8 分和 0 分两档；其他各题的评阅，请严格按照本评分标准的评分档次给分，不得增加其他中间档次．

2．如果考生的解答方法和本解答不同，只要思路合理、步骤正确，在评卷时可参考本评分标准适当划分档次评分，解答题中第 9 小题 4 分为一个档次，第 10、11 小题 5 分为一个档次，不得增加其他中间档次．

一、填空题：本大题共 8 小题，每小题 8 分，满分 64 分．

1． 等差数列 $\{a_n\}$ 的公差 $d\neq 0$，且 $a_{2021}=a_{20}+a_{21}$，则 $\frac{a_1}{d}$ 的值为__________．

答案： 1981．

解： 由条件知 $a_1+2020d=a_1+19d+a_1+20d$，又 $d\neq 0$，故 $\frac{a_1}{d}=1981$．

2． 设 m 为实数，复数 $z_1=1+2\mathrm{i},\ z_2=m+3\mathrm{i}$（这里 i 为虚数单位），若 $z_1\cdot\overline{z_2}$ 为纯虚数，则 $|z_1+z_2|$ 的值为__________．

答案： $5\sqrt{2}$．

解： 由于 $z_1\cdot\overline{z_2}=(1+2\mathrm{i})(m-3\mathrm{i})=m+6+(2m-3)\mathrm{i}$ 为纯虚数，故 $m=-6$．所以 $|z_1+z_2|=|-5+5\mathrm{i}|=5\sqrt{2}$．

3． 当 $\frac{\pi}{4}\le x\le\frac{\pi}{2}$ 时，$y=\sin^2 x+\sqrt{3}\sin x\cos x$ 的取值范围是__________．

答案： $\left[1,\frac{3}{2}\right]$．

解： $y=\sin^2 x+\sqrt{3}\sin x\cos x=\frac{1-\cos 2x}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\sin 2x=\sin\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)+\frac{1}{2}$．

当 $\frac{\pi}{4}\le x\le\frac{\pi}{2}$ 时，$\frac{\pi}{3}\le 2x-\frac{\pi}{6}\le\frac{5\pi}{6}$，故 $\sin\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)$ 的取值范围是 $\left[\frac{1}{2},1\right]$．所以 y 的取值范围是 $\left[1,\frac{3}{2}\right]$．

4． 设函数 $f(x)$ 的定义域为 $D=(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$，且对任意 $x\in D$，均有 $f(x)=\frac{f(1)\cdot x^2+f(2)\cdot x-1}{x}$，则 $f(x)$ 的所有零点之和为__________．

答案： -4．

解： 令 $x=1,2$，分别得 $f(1)=f(1)+f(2)-1$ 与 $f(2)=2f(1)+f(2)-\frac{1}{2}$，解得 $f(2)=1,\ f(1)=\frac{1}{4}$．从而 $f(x)=\frac{1}{x}\cdot\left(\frac{1}{4}x^2+x-1\right)(x\neq 0)$．

令 $f(x)=0$，得 $x=-2\pm 2\sqrt{2}$，故 $f(x)$ 的所有零点之和为 -4．

5. 设$a,b,c>1$，满足$(a^2b)^{\log_a c}=a\cdot(ac)^{\log_a b}$，则$\log_c(ab)$的值为________.

答案：2.

解：对原式两边取以a为底的对数，得

$$\log_a c\cdot(2+\log_a b)=1+\log_a b\cdot(1+\log_a c),$$

化简得$2\log_a c=1+\log_a b$．所以$c^2=ab$．进而$\log_c(ab)=\log_c c^2=2$.

6. 在ΔABC中，$AB=1,\ AC=2,\ \cos B=2\sin C$，则$BC$的长为________.

答案：$\dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{14}}{2}$.

解：由正弦定理知$\dfrac{\sin B}{\sin C}=\dfrac{AC}{AB}=2$，故$\sin B=2\sin C=\cos B$，即$\tan B=1$，于是$B=\dfrac{\pi}{4}$.

设$BC=a>0$．由余弦定理知$4=1+a^2-2a\cdot\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，故$a=\dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{14}}{2}$.

7. 在平面直角坐标系xOy中，已知抛物线$y=ax^2-3x+3\,(a\neq 0)$的图像与抛物线$y^2=2px\,(p>0)$的图像关于直线$y=x+m$对称，则实数a,p,m的乘积为________.

答案：-3.

解：对抛物线$y=ax^2-3x+3$上任意一点(x_0,y_0)，有

$$y_0=ax_0^2-3x_0+3. \qquad ①$$

设点(x_0,y_0)关于直线$y=x+m$的对称点为(x_1,y_1).

由$\dfrac{y_1+y_0}{2}=\dfrac{x_1+x_0}{2}+m,\ x_1+y_1=x_0+y_0$，可知$x_1=y_0-m,\ y_1=x_0+m$，因$(x_1,y_1)$在抛物线$y^2=2px$上，故$(x_0+m)^2=2p(y_0-m)$，这等价于

$$y_0=\frac{1}{2p}x_0^2+\frac{m}{p}x_0+\frac{m^2}{2p}+m. \qquad ②$$

由点(x_0,y_0)取法的任意性，比较①、②得$\dfrac{1}{2p}=a,\ \dfrac{m}{p}=-3,\ \dfrac{m^2}{2p}+m=3$．因此有$3=\dfrac{m}{p}\cdot\dfrac{m}{2}+m=-3\cdot\dfrac{m}{2}+m=-\dfrac{m}{2}$，解得$m=-6$，故依次可得$p=2,\ a=\dfrac{1}{4}$（满足$a\neq 0$且$p>0$）．从而$apm=2\cdot\dfrac{1}{4}\cdot(-6)=-3$.

8. 设$a_1,a_2,\cdots,a_{10}$是$1,2,\cdots,10$的一个随机排列，则在$a_1a_2,a_2a_3,\cdots,a_9a_{10}$这9个数中既出现9又出现12的概率为________.

答案：$\dfrac{7}{90}$.

解：一个随机排列满足要求当且仅当该排列中$1,9$两数相邻，且$2,6$与$3,4$中至少有一对数相邻．现计算这样的排列的个数N．设这些排列中$2,6$相邻的排列有N_1个，$3,4$相邻的排列有N_2个，$2,6$与$3,4$两对数都相邻的排列有N_3个.

为计算N_1，先将$1,9$两数“捆绑”，$2,6$两数“捆绑”，并将它们与剩下的6个数进行排列，有$8!$种方式，又考虑到$1,9$的次序与$2,6$的次序，得$N_1=2^2\times 8!$.

类似可知 $N_2=2^2\times 8!$，$N_3=2^3\times 7!$.

由容斥原理，$N=N_1+N_2-N_3=8\times(8!-7!)=7\times 8!$.

因此，所求概率为 $\dfrac{N}{10!}=\dfrac{7}{90}$.

二、解答题：本大题共 3 小题，满分 56 分．解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤．

9.（本题满分 16 分）数列 $\{a_n\}$ 满足：$a_1=a_2=a_3=1$．令

$$b_n=a_n+a_{n+1}+a_{n+2}\ (n\in \mathbf{N}^*).$$

若 $\{b_n\}$ 是公比为 3 的等比数列，求 a_{100} 的值．

解：由条件知 $b_n=b_1\cdot 3^{n-1}=3^n\ (n\in\mathbf{N}^*)$． ……………4 分

因此，$a_{n+3}-a_n=b_{n+1}-b_n=3^{n+1}-3^n=2\cdot 3^n\ (n\in\mathbf{N}^*)$． ……………8 分

于是

$$a_{100}=a_1+\sum_{k=1}^{33}(a_{3k+1}-a_{3k-2})=1+\sum_{k=1}^{33}2\cdot 3^{3k-2}$$

$$=1+6\cdot\frac{27^{33}-1}{27-1}=1+\frac{3}{13}(3^{99}-1)=\frac{3^{100}+10}{13}.$$ ……………16 分

10. （本题满分 20 分）在平面直角坐标系中，函数 $y=\dfrac{1}{|x|}$ 的图像为 Γ．设 Γ 上的两点 P,Q 满足：P 在第一象限，Q 在第二象限，且直线 PQ 与 Γ 位于第二象限的部分相切于点 Q．求 $|PQ|$ 的最小值．

解：当 $x>0$ 时，$y=\dfrac{1}{x}$．当 $x<0$ 时，$y=-\dfrac{1}{x}$，相应的导数为 $y'=\dfrac{1}{x^2}$．

设 $Q\left(-a,\dfrac{1}{a}\right)$，其中 $a>0$．由条件知 PQ 的斜率为 $y'|_{x=-a}=\dfrac{1}{a^2}$．

直线 PQ 的方程为 $y=\dfrac{1}{a^2}(x+a)+\dfrac{1}{a}=\dfrac{x+2a}{a^2}$． ……………10 分

将上述方程与 $y=\dfrac{1}{x}(x>0)$ 联立，得 $x^2+2ax-a^2=0$，从而知点 P 的横坐标 $x_P=(\sqrt{2}-1)a$（负根舍去）．于是

$$|PQ|=\sqrt{1+\left(\frac{1}{a^2}\right)^2}\cdot|x_P-x_Q|=\sqrt{1+\frac{1}{a^4}}\cdot\sqrt{2}a\ge\sqrt{2\sqrt{1\cdot\frac{1}{a^4}}}\cdot\sqrt{2}a=2.$$

……………15 分

当 $a=1$，即 $Q(-1,1)$ 时，$|PQ|$ 取到最小值 2． ……………20 分

11. （本题满分 20 分）在正 $n(n\ge 3)$ 棱锥 $P-A_1A_2\cdots A_n$ 中，O 为底面正 n 边形 $A_1A_2\cdots A_n$ 的中心，B 为棱 A_1A_n 的中点．

(1) 证明：$PO^2\sin^2\dfrac{\pi}{n}+PA_1^2\cos^2\dfrac{\pi}{n}=PB^2$；

(2) 设正 n 棱锥 $P-A_1A_2\cdots A_n$ 的侧棱与底面所成的角为 α，侧面与底面所成

的角为β，试确定$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\cos\angle A_iPB$与$\sin\alpha\cdot\sin\beta$的大小关系，并予以证明.

解：(1) 由于$PO\perp$底面$A_1A_2\cdots A_n$，故$\angle POA_1=\angle POB=90^\circ$.

设$OA_1=r$，则$OB=OA_1\cdot\cos\angle A_1OB=r\cos\frac{\pi}{n}$，于是有

$$r^2+PO^2=PA_1^2,\quad r^2\cos^2\frac{\pi}{n}+PO^2=PB^2.$$

消去r^2得$PO^2\left(1-\cos^2\frac{\pi}{n}\right)=PB^2-PA_1^2\cos^2\frac{\pi}{n}$，即

$$PO^2\sin^2\frac{\pi}{n}+PA_1^2\cos^2\frac{\pi}{n}=PB^2.$$ ……………5 分

(2) 由条件知$\overrightarrow{PO}\cdot\overrightarrow{OA_i}=0\ (i=1,2,\cdots,n)$，$\overrightarrow{PO}\cdot\overrightarrow{OB}=0$.

设正n棱锥的侧棱长为l，则

$$l\cdot|PB|\cdot\sum_{i=1}^{n}\cos\angle A_iPB=\sum_{i=1}^{n}|PA_i|\cdot|PB|\cdot\cos\angle A_iPB$$

$$=\sum_{i=1}^{n}\overrightarrow{PA_i}\cdot\overrightarrow{PB}=\sum_{i=1}^{n}\left(\overrightarrow{PO}+\overrightarrow{OA_i}\right)\cdot\left(\overrightarrow{PO}+\overrightarrow{OB}\right)=\sum_{i=1}^{n}\left(\overrightarrow{PO}^2+\overrightarrow{OA_i}\cdot\overrightarrow{OB}\right)$$

$$=n\overrightarrow{PO}^2+\overrightarrow{OB}\cdot\sum_{i=1}^{n}\overrightarrow{OA_i}=n\cdot|PO|^2,$$

最后一步用到了$\vec{s}=\sum_{i=1}^{n}\overrightarrow{OA_i}=\vec{0}$（这是因为，$O$为正$n$边形$A_1A_2\cdots A_n$的中心，各$\overrightarrow{OA_i}\ (i=1,2,\cdots,n)$在逆时针旋转$\frac{2\pi}{n}$后仍为这些向量的排列，故它们的和向量$\vec{s}$逆时针旋转$\frac{2\pi}{n}$后仍为$\vec{s}$，所以$\vec{s}$只能为零向量）. 于是

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\cos\angle A_iPB=\frac{|PO|^2}{l\cdot|PB|}=\frac{PO}{l}\cdot\frac{PO}{PB}=\sin\angle PA_1O\cdot\sin\angle PBO.\quad ①$$

……………15 分

易知$\angle PA_1O$是侧棱与底面所成的角，又由$OB\perp A_1A_n$，$PB\perp A_1A_n$知$\angle PBO$是侧面与底面所成的角. 于是$\angle PA_1O=\alpha$，$\angle PBO=\beta$.

从而由①得$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\cos\angle A_iPB$与$\sin\alpha\cdot\sin\beta$相等. ……………20 分

关于我们

北京高考在线创办于 2014 年，隶属于北京太星网络科技有限公司，是北京地区极具影响力的中学升学服务平台。主营业务涵盖：北京新高考、高中生涯规划、志愿填报、强基计划、综合评价招生和学科竞赛等。

北京高考在线旗下拥有网站门户、微信公众平台等全媒体矩阵生态平台。平台活跃用户 40W+，网站年度流量数千万量级。用户群体立足于北京，辐射全国 31 省市。

北京高考在线平台一直秉承 〞精益求精、专业严谨 〞的建设理念，不断探索“K12 教育+互联网+大数据”的运营模式，尝试基于大数据理论为广大中学和家长提供新鲜的高考资讯、专业的高考政策解读、科学的升学规划等，为广大高校、中学和教科研单位提供“衔接和桥梁纽带”作用。

平台自创办以来，为众多重点大学发现和推荐优秀生源，和北京近百所中学达成合作关系，累计举办线上线下升学公益讲座数百场，帮助数十万考生顺利通过考入理想大学，在家长、考生、中学和社会各界具有广泛的口碑影响力

未来，北京高考在线平台将立足于北京新高考改革，基于对北京高考政策研究及北京高校资源优势，更好的服务全国高中家长和学生。