

2024 北京景山学校初三（下）开学考

数 学

2024 年 2 月

本试卷共 8 页，共 100 分。考试时长 120 分钟。考生务必将答案答在答题卡上，在试卷上作答无效。考试结束后，将答题卡交回。

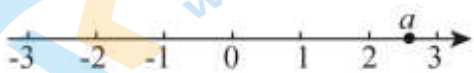
第一部分 选择题

一、选择题（本题共 16 分，每小题 2 分）第 1—8 题均有四个选项，符合题意的选项只有一个。

1. 根据北京市统计局发布的统计数据，2022 年首都的各项事业都取得了新进展，其中 GDP 总量达到 41600 亿元，数字 41600 用科学记数法可表示为（ ）

- A. 4.16×10^4 B. 41.6×10^4 C. 4.16×10^5 D. 0.416×10^5

2. 有理数 a 在数轴上的对应点的位置如图所示，若有理数 b 满足 $b < -a$ ，则 b 的值可能是（ ）



- A. 2 B. -2 C. 0 D. -3

3. 下列图形中，是轴对称图形不是中心对称图形的是（ ）



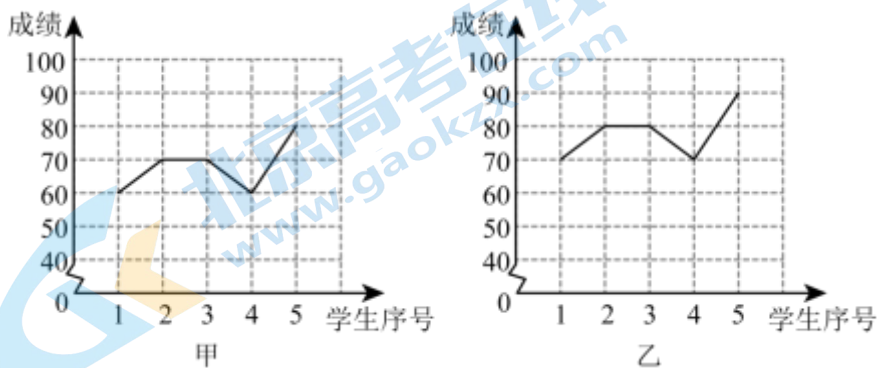
4. 若正多边形的内角和是 540° ，则该正多边形的一个外角为（ ）

- A. 45° B. 60° C. 72° D. 90°

5. 关于 x 的一元二次方程 $x^2 - (k+3)x + 2k+1 = 0$ 根的情况是（ ）

- A. 无实根 B. 有实根
C. 有两个不相等实根 D. 有两个相等实根

6. 为庆祝中国共产主义青年团成立 100 周年，某区举办了团课知识竞赛，甲、乙两所中学各派 5 名学生参加，两队学生的竞赛成绩如图所示，下列关系完全正确的是（ ）



A. $S_{甲}^2 < S_{乙}^2$, $\bar{x}_{甲} = \bar{x}_{乙}$

B. $S_{甲}^2 = S_{乙}^2$, $\bar{x}_{甲} > \bar{x}_{乙}$

C. $S_{甲}^2 > S_{乙}^2$, $\bar{x}_{甲} = \bar{x}_{乙}$

D. $S_{甲}^2 = S_{乙}^2$, $\bar{x}_{甲} < \bar{x}_{乙}$

7. 不透明的袋子中装有两个红球和一个绿球，除颜色外三个小球无其他差别。从中随机摸出一个小球，放回并摇匀，再从中随机摸出一个小球，那么两次都摸到红球的概率是 ()

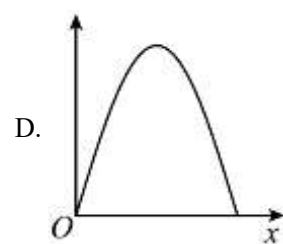
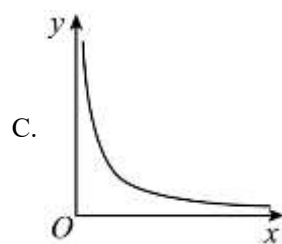
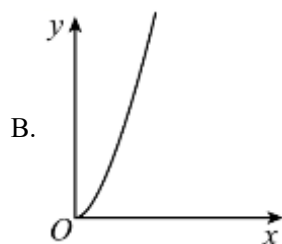
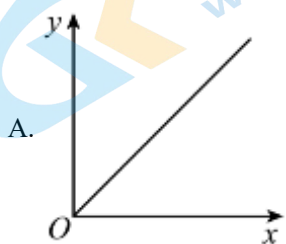
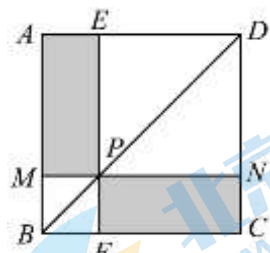
A. $\frac{2}{9}$

B. $\frac{1}{3}$

C. $\frac{4}{9}$

D. $\frac{2}{3}$

8. 已知在正方形 $ABCD$ 中， P 是对角线 BD 上一个动点，过 P 作 CD 、 AD 的平行线分别交正方形 $ABCD$ 的边于 E 、 F 和 M 、 N ，若 $BP = x$ ，图中阴影部分的面积为 y ，则 y 与 x 之间的函数关系图象大致是 ()



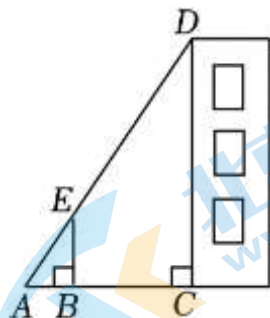
二、填空题 (本题共 16 分，每题 2 分)

9. 方程 $\frac{3x}{4+2x} = 0$ 的解是_____.

10. 分解因式: $4x^2 - 8x + 4 =$ _____.

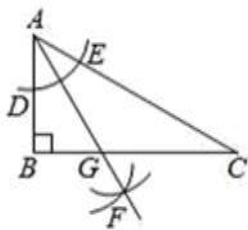
11. 已知点 $A(m-1, y_1)$, $B(m, y_2)$ 都在一次函数 $y = -2x + 1$ 的图象上，那么 y_1 与 y_2 的大小关系是 y_1 _____ y_2 (填 “>”, “=” “<”)

12. 如图 (示意图) 所示，某校数学兴趣小组利用标杆 BE 测量建筑物的高度，已知标杆 BE 的高为 2.4m，测得 $AB = 1.8m$, $BC = 13.2m$ ，则建筑物 CD 的高为_____ m.

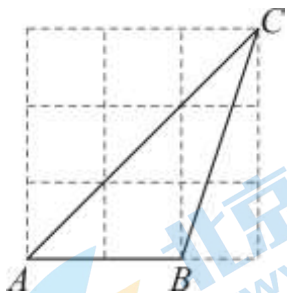


13. 如图，在 $Rt\triangle ABC$ 中， $\angle B = 90^\circ$ ，以点 A 为圆心，适当长为半径画弧，分别交 AB 、 AC 于点 D 、 E ，

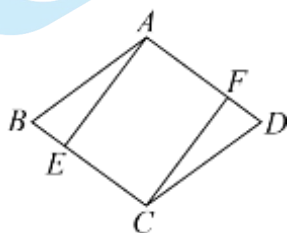
再分别以点 D、E 为圆心，大于 $\frac{1}{2}DE$ 为半径画弧，两弧交于点 F，作射线 AF 交边 BC 于点 G，若 $BG=1$ ， $AC=4$ ，则 $\triangle ACG$ 的面积是_____.



14. 如图， $\triangle ABC$ 的顶点都在正方形网格的格点上，则 $\cos \angle ACB$ 的值为_____.



15. 如图，在菱形 ABCD 中，点 E，F 分别在 BC，AD 上， $BE=DF$ 。只需添加一个条件即可证明四边形 AECF 是矩形，这个条件可以是_____（写出一个即可）。



16. 一次数学考试共有 8 道判断题，每道题 5 分，满分 40 分。规定正确的画 \checkmark ，错误的画 \times 。甲、乙、丙、丁四名同学的解答及得分情况如下表所示，则 m 的值为_____.

题号	1	2	3	4	5	6	7	8	得分
甲	\times	\checkmark	\times	\checkmark	\times	\times	\checkmark	\times	30
乙	\times	\times	\checkmark	\checkmark	\checkmark	\times	\times	\checkmark	25
丙	\checkmark	\times	\times	\times	\checkmark	\checkmark	\checkmark	\times	25
丁	\times	\checkmark	\times	\checkmark	\checkmark	\times	\checkmark	\checkmark	m

第三部分 解答题

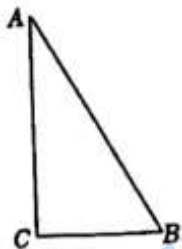
三、解答题（共 68 分，第 17—22 题，每题 5 分，第 23—26 题，每题 6 分，第 27—28 题，每题 7 分）。解答应写出文字说明、演算步骤或证明过程。

17. 计算: $3 \tan 30^\circ - \left(\frac{1}{4}\right)^{-1} - \sqrt{12} + |-\sqrt{3}|$.

18. 解不等式组:
$$\begin{cases} 2x - 6 < 3x \\ x - 2 + \frac{x-1}{3} \leq 1 \end{cases}$$

19. 已知 $3x^2 - x - 1 = 0$, 求代数式 $(2x+3)(2x-3) - 2x(1-x)$ 的值.

20. 同学们在做题时, 经常用到“在直角三角形中, 30° 角所对的直角边等于斜边的一半”这个定理, 下面是两种添加辅助线的证明方法, 请你选择一种进行证明.



已知在 $\triangle ABC$ 中, $\angle C = 90^\circ, \angle A = 30^\circ$, 求证: $BC = \frac{1}{2} AB$.

法一: 如图 1, 在 AB 上取一点 D , 使得 $BC = BD$, 接 CD .

法二: 如图 2, 延长 BC 到 D , 使得 $BC = CD$, 连接 AD .

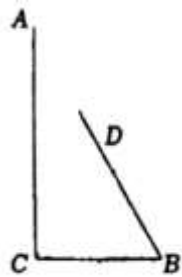


图 1

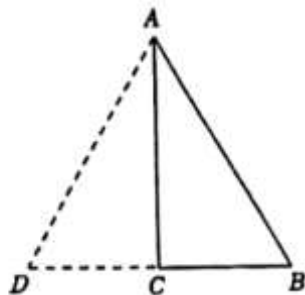
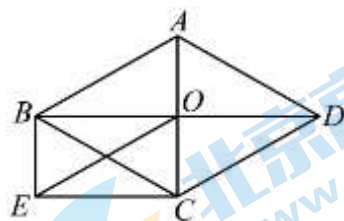


图 2

你选择方法_____

证明:

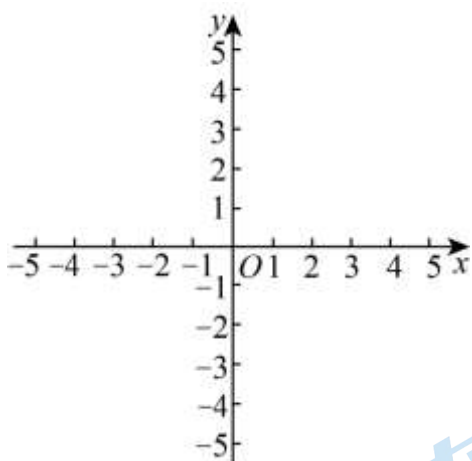
21. 如图, 四边形 $ABCD$ 的对角线 AC, BD 相交于点 O , BC, EO 为矩形 $BECO$ 对角线, $BC \parallel AD, AD = EO$.



(1) 求证: 四边形 $ABCD$ 是菱形;

(2) 连接 DE , 若 $AC = 4, \angle BCD = 120^\circ$, DE 的值.

22. 在平面直角坐标系 xOy 中，直线 $y_1 = -2x + 1$ 与反比例函数 $y_2 = -\frac{k}{x} (k \neq 0)$ 图象的一个交点为点 M 。



(1) 当点 M 的坐标为 $(2, m)$ 时，求 k 的值；

(2) 当 $x < -1$ 时，对于 x 的每一个值，都有 $y_1 > y_2$ ，直接写出 k 的取值范围。

23. 第二十四届冬季奥林匹克运动会于 2022 年 2 月 4 日至 2 月 20 日在北京举行，北京成为历史上第一座既举办夏奥运会又举办冬奥会的城市。北京冬奥会的成功兴办掀起了全民“冬奥热”，某校九年级举行了两次“冬奥知识”竞赛。该校九年级共有学生 480 人参加了竞赛，从中随机抽取 30 名学生的两次竞赛成绩，小明对两次数据（成绩）进行整理、描述和分析。下面给出了部分信息：

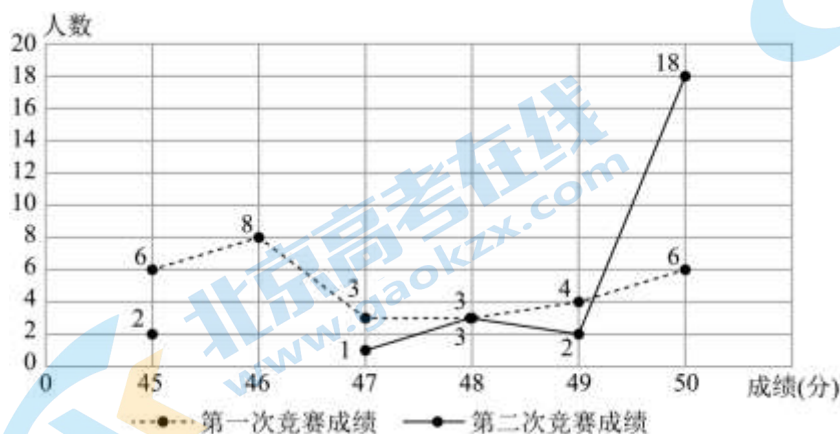
a. 小明在统计第二次竞赛成绩各分数段人数时，不小心污染了统计表：

成绩（分）	$x \leq 45$	45.5	46	46.5	47	47.5	48	48.5	49	49.5	50
人数（人）	2			1	0	2	1	1	1	4	14

注：成绩只能为 0.5 的整数倍。

b. 将竞赛成绩按四舍五入取整后，得出的频数分布折线图如下（数据分组： $x \leq 45$ ， $45 < x \leq 46$ ， $46 < x \leq 47$ ， $47 < x \leq 48$ ， $48 < x \leq 49$ ， $49 < x \leq 50$ ）

某校抽取 30 名学生的两次“冬奥知识”竞赛成绩折线统计图



c. 两次竞赛成绩的平均数、中位数如下：

	平均数	中位数
第一次	46.75	46.75
第二次	48.50	m

根据以上信息，回答下列问题：

- 请补全折线统计图，并标明数据；
- 请完善 c 中的统计表， m 的值是_____.
- 若成绩为 46.5 分及以上为优秀，根据以上信息估计，第二次竞赛九年级约有_____名学生成绩达到优秀；
- 通过观察、分析，小明得出这样的结论“在抽取 30 名学生的第一次竞赛成绩中，众数一定出现在 $45 < x \leq 46$ 这一组”。请你判断小明的说法_____。（填“正确”或“错误”），你的理由是_____.

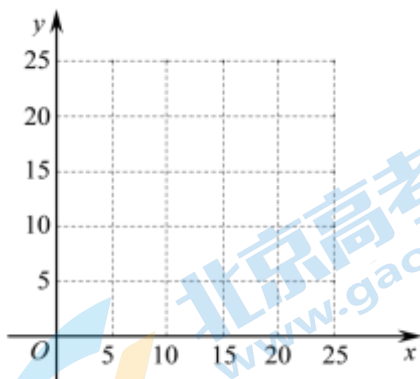
24. 学校组织九年级学生进行跨学科主题学习活动，利用函数的相关知识研究某种化学试剂的挥发情况。在两种不同的场景 A 和场景 B 下做对比实验，设实验过程中，该试剂挥发时间为 x 分钟时，在场景 A, B 中的剩余质量分别为 y_1, y_2 (单位：克)。

下面是某研究小组的探究过程，请补充完整：

记录 y_1, y_2 与 x 的几组对应值如下：

x (分钟)	0	5	10	15	20	...
y_1 (克)	25	23.5	20	14.5	7	...
y_2 (克)	25	20	15	10	5	...

- 在同一平面直角坐标系 xOy 中，描出上表中各组数值所对应的点 $(x, y_1), (x, y_2)$ ，并画出函数 y_1, y_2 的图象；

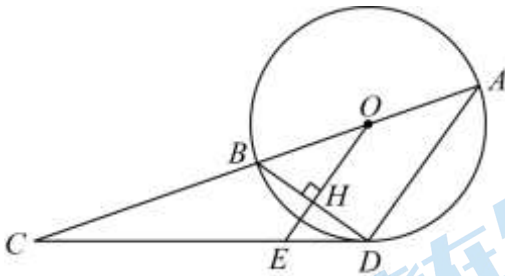


- 进一步探究发现，场景 A 的图象是抛物线的一部分， y_1 与 x 之间近似满足函数关系 $y_1 = -0.04x^2 + bx + c$ 。场景 B 的图象是直线的一部分， y_2 与 x 之间近似满足函数关系

$y_2 = ax + c (a \neq 0)$. 请分别求出场景 A, B 满足的函数关系式;

(3) 查阅文献可知, 该化学试剂的质量不低于 4 克时, 才能发挥作用. 在上述实验中, 记该化学试剂在场景 A, B 中发挥作用的时间分别为 x_A, x_B , 则 x_A _____ x_B (填 “>”, “=” 或 “<”).

25. 如图, AB 是 $\odot O$ 的直径, C 为 AB 延长线上一点. CD 为 $\odot O$ 切线, D 为切点, $OE \perp BD$ 于点 H , 交 CD 于点 E .



(1) 求证: $\angle BDC = \angle BOE$;

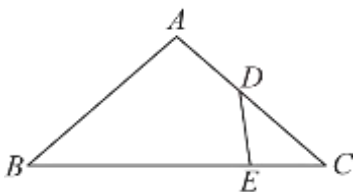
(2) 若 $\sin C = \frac{1}{3}$, $AD = 4$, 求 EH 和半径的长.

26. 在平面直角坐标系 xOy 中, 点 $(x_1, m), (x_2, n)$ 在抛物线 $y = ax^2 + bx + c (a > 0)$ 上, 设抛物线的对称轴为 $x = t$.

(1) 若对于 $x_1 = 1, x_2 = 3$, 有 $m = n$, 求 t 的值;

(2) 若对于 $t - 1 < x_1 < t, 2 < x_2 < 3$, 存在 $m > n$, 求 t 的取值范围.

27. 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, $AB = AC$, 点 D, E 分别在边 AC, BC 上, 连接 DE , $\angle EDC = \angle B$.



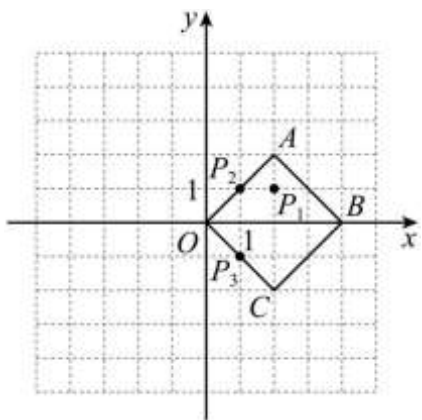
(1) 求证: $ED = EC$;

(2) 连接 BD , 点 F 为 BD 的中点, 连接 AF, EF .

①依题意补全图形;

②若 $AF \perp EF$, 求 $\angle BAC$ 的大小.

28. 在平面直角坐标系 xOy 中, 将中心为 T 的正方形记作正方形 T , 对于正方形 T 和点 P (不与 O 重合) 给出如下定义: 若正方形 T 的边上存在点 Q , 使得直线 OP 与以 TQ 为半径的 $\odot T$ 相切于点 P , 则称点 P 为正方形 T 的 “伴随切点”.



(1) 如图，正方形 T 的顶点分别为点 $O, A(2,2), B(4,0), C(2,-2)$.

①在点 $P_1(2,1), P_2(1,1), P_3(1,-1)$ 中，正方形 T 的“伴随切点”是_____；

②若直线 $y = x + b$ 上存在正方形 T 的“伴随切点”，求 b 的取值范围；

(2) 已知点 $T(t, t+1)$ ，正方形 T 的边长为 2 . 若存在正方形 T 的两个“伴随切点” M, N ，使得 $\triangle OMN$ 为等边三角形，直接写出 t 的取值范围.

参考答案

第一部分 选择题

一、选择题（本题共 16 分，每小题 2 分）第 1—8 题均有四个选项，符合题意的选项只有一个。

1. 【答案】A

【分析】科学记数法的表示形式为 $a \times 10^n$ 的形式，其中 $1 \leq |a| < 10$ ， n 为整数，确定 n 的值时，要看把原数变成 a 时，小数点移动了多少位， n 的绝对值与小数点移动的位数相同，当原数绝对值 > 10 时， n 是正数；当原数的绝对值 < 1 时， n 是负数。

【详解】解：41600 用科学记数法表示为 4.16×10^4 ；

故选：A.

【点睛】此题考查了科学记数法的表示方法，解题的关键要记住科学记数法的表示形式，正确确定 a 的值以及 n 的值。

2. 【答案】D

【分析】根据 a 的范围确定出 b 的范围，进而判断出 b 可能的取值。

【详解】解：根据数轴上的位置得： $2 < a < 3$ ，

$$\therefore -3 < -a < -2,$$

$$\therefore b < -a,$$

$$\therefore b \leq -3,$$

故 b 的值可能为 -3 ，

故选：D.

【点睛】此题考查了数轴，掌握用数轴比较大小是解本题的关键。

3. 【答案】C

【分析】根据轴对称图形和中心对称图形的定义进行逐一判断即可。

【详解】解：A. 不是轴对称图形，是中心对称图形，故选项 A 不符合题意；

B. 不是轴对称图形，也不是中心对称图形，故选项 B 不符合题意；

C. 是轴对称图形，不是中心对称图形，故选项 C 符合题意；

D. 不是轴对称图形，是中心对称图形，故选项 D 不符合题意。

故选：C.

【点睛】本题主要考查了中心对称图形和轴对称图形的定义，如果一个平面图形沿一条直线折叠，直线两旁的部分能够互相重合，这个图形就叫做轴对称图形；中心对称图形的定义：把一个图形绕着某一个点旋转 180° ，如果旋转后的图形能够与原来的图形重合，那么这个图形叫做中心对称图形，这个点就是它的对称中心。

4. 【答案】C

【分析】根据多边形的内角和公式 $(n-2) \cdot 180^\circ$ 求出多边形的边数，再根据多边形的外角和是固定的 360° ，依此可以求出多边形的一个外角。

【详解】 \because 正多边形的内角和是 540° ，

\therefore 多边形的边数为 $540^\circ \div 180^\circ + 2 = 5$ ，

\therefore 多边形的外角和都是 360° ，

\therefore 多边形的每个外角 $= 360 \div 5 = 72^\circ$ 。

故选 C。

【点睛】本题主要考查了多边形的内角和与外角和之间的关系，关键是记住内角和的公式与外角和的特征，难度适中。

5. 【答案】C

【分析】先求出 $b^2 - 4ac$ ，再根据结果判断即可。

【详解】根据题意，得

$$b^2 - 4ac = (k+3)^2 - 4(2k+1) = k^2 + 6k + 9 - 8k - 4 = k^2 - 2k + 5 = (k-1)^2 + 4 \geq 4$$

\therefore 这个方程有两个不相等的实数根。

故选：C。

【点睛】本题主要考查了一元二次方程根的判别式，掌握 $b^2 - 4ac$ 与一元二次方程根之间的关系是解题的关键。即当 $b^2 - 4ac > 0$ 时，一元二次方程 $ax^2 + bx + c = 0 (a \neq 0)$ 有两个不相等的实数根；当

$b^2 - 4ac = 0$ 时，一元二次方程 $ax^2 + bx + c = 0 (a \neq 0)$ 有两个相等的实数根；当 $b^2 - 4ac < 0$ 时，一元二次方程 $ax^2 + bx + c = 0 (a \neq 0)$ 没有实数根。

6. 【答案】D

【分析】本题主要考查了求平均数和方差，分别求出两所中学 5 名学生的成绩的平均数和方差，即可求解。

【详解】解：根据题意得：甲所中学 5 名学生的成绩为 60，70，70，60，80，

乙所中学 5 名学生的成绩为 70，80，80，70，90，

$$\therefore \bar{x}_甲 = \frac{1}{5}(60+70+70+60+80) = 68, \quad \bar{x}_乙 = \frac{1}{5}(70+80+80+70+90) = 78,$$

$$S_甲^2 = \frac{1}{5}[(60-68)^2 + (70-68)^2 + (70-68)^2 + (60-68)^2 + (80-68)^2] = 56,$$

$$S_乙^2 = \frac{1}{5}[(70-78)^2 + (80-78)^2 + (80-78)^2 + (70-78)^2 + (90-78)^2] = 56,$$

$$\therefore S_甲^2 = S_乙^2, \quad \bar{x}_甲 < \bar{x}_乙.$$

故选：D

7. 【答案】C

【分析】画树状图，共有 9 种等可能的结果，其中两次都摸到红球的结果有 4 种，再由概率公式求解即可。

【详解】解：画树状图如下：



共有 9 种等可能的结果，其中两次都摸到红球的结果有 4 种，

∴ 两次都摸到红球的概率为 $\frac{4}{9}$ ，

故选：C.

8. 【答案】D

【分析】设在正方形 $ABCD$ 的边长为 a ，首先可证得四边形 $AMPE$ 、 $FCNP$ 都是矩形，四边形 $BFPM$ 、

$EPND$ 都是正方形，可求得 $BF = FP = PM = BM = \frac{\sqrt{2}}{2} BP = \frac{\sqrt{2}}{2} x$ ，

$EP = PN = ND = DE = a - \frac{\sqrt{2}}{2} x$ ，再由 $S_{\text{阴影}} = S_{\text{正方形}ABCD} - S_{\text{正方形}BFPM} - S_{\text{正方形}EPND}$ ，即可求得则 y 与 x

之间的函数关系，据此即可判定。

【详解】解：设在正方形 $ABCD$ 的边长为 a ，

∵ 四边形 $ABCD$ 是正方形，

∴ $AB = BC$ ， $\angle MBP = \angle FBP = 45^\circ$ ， $AB \parallel CD$ ， $BC \parallel AD$ ，

∴ 过 P 作 CD 、 AD 的平行线分别交正方形 $ABCD$ 的边于 E 、 F 和 M 、 N ，

∴ 四边形 $AMPE$ 、 $FCNP$ 都是矩形，

∴ 四边形 $BFPM$ 、 $EPND$ 都是正方形，

∴ $BF = FP = PM = BM = \frac{\sqrt{2}}{2} BP = \frac{\sqrt{2}}{2} x$ ，

$EP = PN = ND = DE = a - \frac{\sqrt{2}}{2} x$ ，

∴ $S_{\text{阴影}} = S_{\text{正方形}ABCD} - S_{\text{正方形}BFPM} - S_{\text{正方形}EPND}$

$$= a^2 - \left(\frac{\sqrt{2}}{2} x\right)^2 - \left(a - \frac{\sqrt{2}}{2} x\right)^2$$

$$= a^2 - \frac{1}{2} x^2 - a^2 + \sqrt{2} ax - \frac{1}{2} x^2$$

$$= -x^2 + \sqrt{2} ax$$

$$\therefore y = -x^2 + \sqrt{2} ax (x \geq 0, y \geq 0),$$

∴ 该函数的图象是开口向下的抛物线，

故选：D.

【点睛】本题考查了正方形的判定与性质，求函数解析式，几何问题与二次函数，准确求得函数解析式是解决本题的关键.

二、填空题（本题共 16 分，每题 2 分）

9. 【答案】 $x = 0$

【分析】本题考查了解分式方程，根据解分式方程的步骤进行求解，即可.

【详解】解： $\frac{3x}{4+2x} = 0$

$\therefore 3x = 0$

解得： $x = 0$,

经检验， $x = 0$ 是原方程的解，

故答案为： $x = 0$.

10. 【答案】 $4(x-1)^2$.

【分析】先提取公因式 4 后继续应用完全平方公式分解即可.

【详解】解： $4x^2 - 8x + 4 = 4(x^2 - 2x + 1) = 4(x-1)^2$.

故答案为： $4(x-1)^2$.

【点睛】本题考查因式分解，要将一个多项式分解因式的一般步骤是首先看各项有没有公因式，若有公因式，则把它提取出来，之后再观察是否是完全平方公式或平方差公式，若是就考虑用公式法继续分解因式.

11. 【答案】 $>$

【分析】根据一次函数解析式得出 $k = -2 < 0$ ，得出 y 随着 x 的增大而减小，根据 $m-1 < m$ ，即可求解.

【详解】解： $\because y = -2x + 1$, $k = -2 < 0$,

$\therefore y$ 随着 x 的增大而减小，

$\because m - 1 < m$,

$\therefore y_1 > y_2$,

故答案为： $>$.

【点睛】本题考查的是一次函数图象上点的坐标特点，熟知一次函数图象上各点的坐标一定适合此函数的解析式是解答此题的关键.

12. 【答案】 20

【分析】根据正切等于对边比邻边，即可得到答案.

【详解】解：由题意可得，

$$\tan \angle A = \frac{BE}{AB} = \frac{DC}{AC},$$

$$\frac{2.4}{1.8} = \frac{DC}{1.8+13.2},$$

解得 $DC = 20$,

故答案为: 20.

【点睛】本题考查直角三角形正切的定义: 直角三角形中一个锐角的正切等于对边比邻边.

13. 【答案】2

【分析】先作 $GH \perp AC$ 于 H , 由题意可得 $BG = GH$, 再根据面积公式即可得出答案.

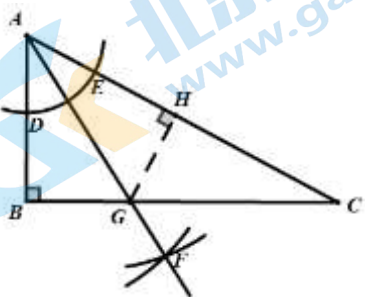
【详解】作 $GH \perp AC$ 于 H

根据题意可得 AG 是 $\angle BAC$ 的角平分线

$\therefore BG = GH = 1$

$$\therefore S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \times GH \times AC = \frac{1}{2} \times 1 \times 4 = 2$$

故答案为 2.

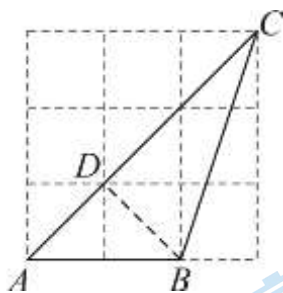


【点睛】本题考查的是角平分线, 需要熟练掌握角平分线的做法.

14. 【答案】 $\frac{2\sqrt{5}}{5}$

【分析】取格点 D , 连接 BD , 根据勾股定理分别求出 $BD = \sqrt{2}$, $CD = 2\sqrt{2}$, $BC = \sqrt{10}$, 即得出 $BD^2 + CD^2 = BC^2$, 说明 $\triangle BCD$ 为直角三角形, 最后根据余弦的定义求解即可.

【详解】解: 如图, 取格点 D , 连接 BD .



$$\therefore BD = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}, \quad CD = \sqrt{2^2 + 2^2} = 2\sqrt{2}, \quad BC = \sqrt{1^2 + 3^2} = \sqrt{10},$$

$$\therefore BD^2 + CD^2 = BC^2,$$

$\therefore \triangle BCD$ 为直角三角形,

$$\therefore \cos \angle ACB = \frac{CD}{BC} = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{10}} = \frac{2\sqrt{5}}{5}.$$

故答案为: $\frac{2\sqrt{5}}{5}$.

【点睛】本题考查勾股定理及其逆定理, 余弦的定义. 正确的连接辅助线是解题关键.

15. 【答案】 $AE \perp BC$ (答案不唯一)

【分析】根据矩形的判定方法即可求解.

【详解】解: 菱形 $ABCD$, $BE = DF$,

$\therefore AD - DF = BC - BE$, 即 $CE = AF$, 且 $AF = CE$,

\therefore 四边形 $AECF$ 是平行四边形, 根据矩形的判定,

① 四边形 $AECF$ 是平行四边形, $AE \perp BC$,

$\therefore \angle AEC = 90^\circ$, 平行四边形 $AECF$ 是矩形;

② 四边形 $AECF$ 是平行四边形, 若 $CF \perp AD$,

$\therefore \angle AFC = 90^\circ$, 平行四边形 $AECF$ 是矩形;

故答案为: $AE \perp BC$ (答案不唯一).

【点睛】本题主要考查矩形, 掌握矩形的判定方法是解题的关键.

16. 【答案】30

【分析】由乙丙的答案和得分可知第 2,5 题答案正确, 进而判断其余 6 道题目的答案, 再根据正确的答案判断丁的得分即可.

【详解】因为乙丙的第 2, 5 题答案相同, 且总分都是 25 分,

所以第 2, 5 两题答案正确.

又因为甲得 30 分, 且第 2, 5 题错误,

可知其余 6 题答案均正确,

可知这 8 道题目的答案为: $\times, \times, \times, \checkmark, \checkmark, \times, \checkmark, \times$,

可知丁的第 2, 8 两题错误,

所以得分为 $6 \times 5 = 30$, 则 $m = 30$.

故答案为: 30.

【点睛】本题主要考查了推理论证, 培养了学生阅读能力和逻辑推理能力, 属于基础题型.

第三部分 解答题

三、解答题 (共 68 分, 第 17—22 题, 每题 5 分, 第 23—26 题, 每题 6 分, 第 27—28 题, 每题 7 分). 解答应写出文字说明、演算步骤或证明过程.

17. 【答案】-4

【分析】首先根据特殊角的三角函数值、负整数指数幂的运算、二次根式的性质、去绝对值符号法则, 进行运算, 再进行二次根式的混合运算, 即可求解.

【详解】解： $3 \tan 30^\circ - \left(\frac{1}{4}\right)^{-1} - \sqrt{12} + |-\sqrt{3}|$

$$= 3 \times \frac{\sqrt{3}}{3} - 4 - 2\sqrt{3} + \sqrt{3}$$

$$= \sqrt{3} - 4 - 2\sqrt{3} + \sqrt{3}$$

$$= -4$$

【点睛】本题考查了特殊角的三角函数值、负整数指数幂的运算、二次根式的性质、去绝对值符号法则、二次根式的混合运算，熟练掌握和运用各运算法则是解决本题的关键。

18. 【答案】 $-6 < x \leq \frac{5}{2}$

【分析】先求解每个不等式的解集，再求它们的公共部分即为不等式组的解集。

【详解】解：
$$\begin{cases} 2x - 6 < 3x \text{ ①} \\ x - 2 + \frac{x-1}{3} \leq 1 \text{ ②} \end{cases}$$

解不等式①，得： $x > -6$

解不等式②，得： $x \leq \frac{5}{2}$

∴ 不等式组的解集为： $-6 < x \leq \frac{5}{2}$

【点睛】本题考查的是解一元一次不等式组，熟练掌握一元一次不等式组的解法步骤并正确求解是解题关键。

19. 【答案】 -7

【分析】根据 $3x^2 - x - 1 = 0$ ，得出 $3x^2 - x = 1$ ，将 $(2x+3)(2x-3) - 2x(1-x)$ 化为 $2(3x^2 - x) - 9$ ，求出结果即可。

【详解】解： ∵ $3x^2 - x - 1 = 0$ ，

$$\therefore 3x^2 - x = 1,$$

$$\therefore (2x+3)(2x-3) - 2x(1-x)$$

$$= 4x^2 - 9 - 2x + 2x^2$$

$$= 6x^2 - 2x - 9$$

$$= 2(3x^2 - x) - 9$$

$$= 2 \times 1 - 9$$

$$= -7.$$

【点睛】本题主要考查了化简求值，解题的关键是熟练掌握整式混合运算法则，准确计算。

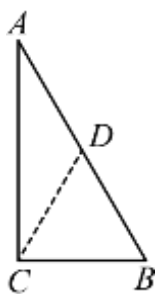
20. 【答案】见解析

【分析】本题考查了等边三角形的判定和性质，线段垂直平分线的判定和性质；

法一：在 AB 上取一点 D ，使得 $BC = CD$ ，连接 CD ，推出 $\triangle BCD$ 是等边三角形，再利用等角对等边证明 $AD = CD$ ，据此即可证明 $BC = \frac{1}{2}AB$ ；

法二：延长 BC 到 D ，使得 $BC = CD$ ，连接 AD ，推出 AC 垂直平分 BD ，证明 $\triangle ABD$ 是等边三角形，据此即可证明 $BC = \frac{1}{2}AB$ 。

【详解】解：法一：在 AB 上取一点 D ，使得 $BC = CD$ ，连接 CD ，



$$\because \angle C = 90^\circ, \angle A = 30^\circ,$$

$$\therefore \angle B = 60^\circ,$$

$\therefore \triangle BCD$ 是等边三角形，

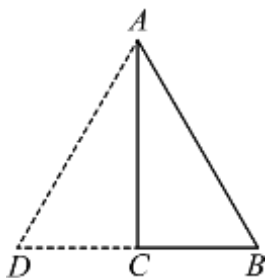
$$\therefore \angle BDC = 60^\circ, CD = BD,$$

$$\therefore \angle DCA = 60^\circ - \angle A = 30^\circ = \angle A,$$

$$\therefore AD = CD = DB = BC,$$

$$\therefore BC = \frac{1}{2}AB;$$

法二：延长 BC 到 D ，使得 $BC = CD$ ，连接 AD ，



$$\because \angle ACB = 90^\circ,$$

$\therefore AC$ 垂直平分 BD ，

$$\therefore AD = AB,$$

\therefore 在 $\triangle ABC$ 中， $\angle ACB = 90^\circ$ ， $\angle BAC = 30^\circ$ ，

$$\therefore \angle B = 60^\circ,$$

$\therefore \triangle ABD$ 是等边三角形，

$$\therefore AB = BD = 2BC,$$

$$\text{即 } BC = \frac{1}{2} AB.$$

21. 【答案】(1) 见解析 (2) $DE = 2\sqrt{13}$

【分析】(1) 由矩形的性质可得 $OE = CB$, $\angle BOC = 90^\circ$, 结合 $AD = EO$ 可得 $AD = CB$, 结合 $BC \parallel AD$, 可证四边形 $ABCD$ 是平行四边形, 再根据 $\angle BOC = 90^\circ$ 可证四边形 $ABCD$ 是菱形;

(2) 先根据已知条件和 (1) 中结论证明 $\triangle ABC$ 是等边三角形, 进而求出 AO , BO , 再利用勾股定理解 $\text{Rt}\triangle DBE$ 即可.

【小问 1 详解】

证明: \because 四边形 $BECO$ 是矩形,

$$\therefore OE = CB, \angle BOC = 90^\circ,$$

$$\therefore AD = EO,$$

$$\therefore AD = CB,$$

$$\therefore AD \parallel BC,$$

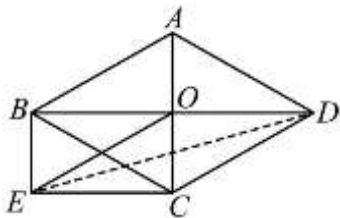
\therefore 四边形 $ABCD$ 是平行四边形.

$$\therefore \angle BOC = 90^\circ,$$

\therefore 平行四边形 $ABCD$ 是菱形.

【小问 2 详解】

解: 如图, 连接 DE ,



\because 四边形 $ABCD$ 是菱形,

$$\therefore AB = BC = CD = AD, AB \parallel CD, AC \perp BD,$$

$$\therefore \angle BCD + \angle ABC = 180^\circ,$$

$$\therefore \angle BCD = 120^\circ,$$

$$\therefore \angle ABC = 180^\circ - \angle BCD = 60^\circ,$$

$\therefore \triangle ABC$ 是等边三角形,

$$\therefore AC \perp BD, AC = 4,$$

$$\therefore AO = OC = \frac{1}{2} AC = 2,$$

$$\therefore BO = \sqrt{AB^2 - AO^2} = \sqrt{4^2 - 2^2} = 2\sqrt{3},$$

$$\therefore BD = 2BO = 4\sqrt{3},$$

\therefore 四边形 $BECO$ 是矩形,

$$\therefore BE = OC = 2, \angle OBE = 90^\circ,$$

$$\therefore DE = \sqrt{BD^2 + BE^2} = \sqrt{(4\sqrt{3})^2 + 2^2} = 2\sqrt{13}.$$

【点睛】本题考查菱形的判定和性质，等边三角形的判定和性质，矩形的性质，勾股定理理解直角三角形等，难度一般，解题的关键是掌握菱形的判定方法。

22. 【答案】(1) $k = 6$

(2) $k < 0$ 或 $0 < k \leq 3$

【分析】本题主要考查一次函数与反比例函数的综合；

(1) 把点 M 的坐标为 $(2, m)$ 代入一次函数，可求出 m 的值，再代入反比例函数即可求解；

(2) 根据题意算出一次函数过 $x = -1$ 时的函数值，再根据当 $x < -1$ 时，对于 x 的每一个值，都有 $y_1 > y_2$ ，分类讨论：①当 $k > 0$ 时；②当 $k < 0$ 时。由此即可求解。

【小问1详解】

解：∵点 M 的坐标为 $(2, m)$ ，且点 M 在直线 $y_1 = -2x + 1$ 的图像上，

$$\therefore -2 \times 2 + 1 = m, \text{ 即 } m = -3,$$

$$\therefore M(2, -3),$$

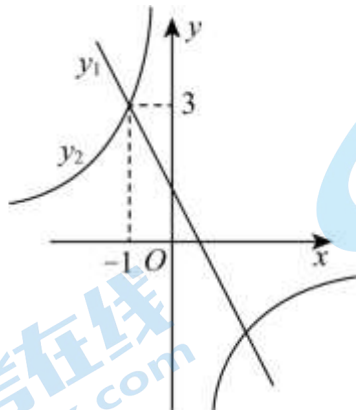
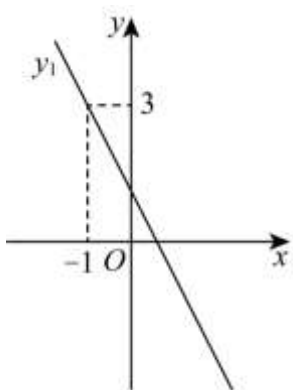
把 $M(2, -3)$ 代入反比例函数得， $-k = xy = 2 \times (-3) = -6$ ，

$$\therefore \text{反比例函数解析式为 } y = -\frac{6}{x},$$

$$\therefore k = 6.$$

【小问2详解】

解：当 $x = -1$ 时， $y_1 = -2x + 1 = -2 \times (-1) + 1 = 3$ ，如图所示，



∴当 $x < -1$ 时， $y_1 > 3$ ，若当 $x < -1$ 时，对于 x 的每一个值，都有 $y_1 > y_2$ ，

∴①当 $k < 0$ 时，反比例函数在第一、三象限，当 $x < -1$ 时，对于 x 的每一个值，都有 $y_1 > y_2$ ；

②当 $k > 0$ 时，反比例函数在第二、四象限，要使 $y_1 > y_2$ ，则当 $x < -1$ 时， $0 < y_2 \leq 3$ ，即 $0 < k \leq 3$ ，

$$\therefore 0 < k \leq 3;$$

综上所述，当 $k < 0$ 或 $0 < k \leq 3$ 时，当 $x < -1$ 时，对于 x 的每一个值，都有 $y_1 > y_2$ 。

23. 【答案】(1) 见解析 (2) $m = 49.5$

(3) 384 (4) 错误, 成绩 $45 < x \leq 46$ 的分数可以是 45.5 或 46 这两个分数, 虽然这一组人数最多, 但也可能出现在 $x \leq 45$ 或 $49 < x \leq 50$ 这两组中

【分析】(1) 计算出成绩为 $45 < x \leq 46$ 的学生人数, 补全折线统计图即可;

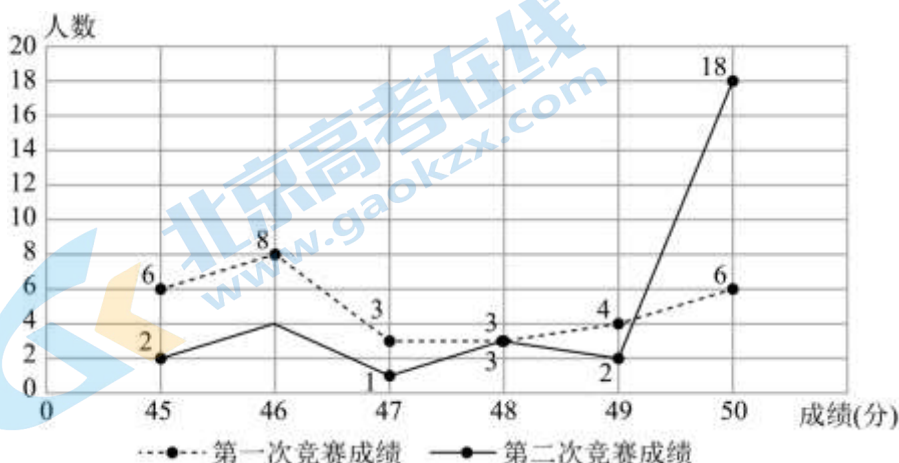
(2) 根据平均数和中位数即可得到结论;

(3) 求出成绩为 26.5 分及以上的人数占调取的 30 名学生的百分数 x 九年级的总人数即可得到结论;

(4) 根据众数的定义即可得到结论.

【小问 1 详解】

成绩为 46 分的学生人数为: $30 - 18 - 2 - 1 - 3 - 2 = 4$; 补全折线统计图如图



【小问 2 详解】

$m = 49.5$;

故答案为: 49.5.

【小问 3 详解】

$$480 \times \frac{1+3+2+18}{30} = 384 \text{ (名)};$$

故答案为: 384.

【小问 4 详解】

错误, 理由: 成绩 $45 < x \leq 46$ 的分数可以是 45.5 或 46 这两个分数, 虽然这一组人数最多, 但也可能出现在 $x \leq 45$ 或 $49 < x \leq 50$ 这两组中.

【点睛】本题考查了频数(率)分布折线图, 平均数, 中位数, 众数, 正确的理解题意是解题的关键.

24. 【答案】(1) 见详解 (2) $y_1 = -0.04x^2 - 0.1x + 25$, $y_2 = -x + 25$

(3) $>$

【分析】本题主要考查了二次函数的应用, 读懂题意是解答本题的关键.

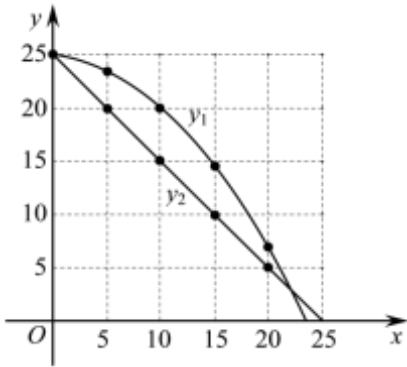
(1) 依据题意, 根据表格数据描点, 连线即可作图得解;

(2) 根据函数图象确定点的坐标, 利用待定系数法解答即可;

(3) 依据题意, 分别求出当 $y = 4$ 时 x 的值, 即可得出答案.

【小问 1 详解】

解：由题意，作图如下。



【小问 2 详解】

解：由题意，场景 A 的图象是抛物线的一部分， y_1 与 x 之间近似满足函数关系 $y_1 = -0.04x^2 + bx + c$ 。

又点 $(0, 25), (10, 20)$ 在函数图象上，

$$\therefore \begin{cases} c = 25 \\ -0.04 \times 10^2 + 10b + c = 20 \end{cases}$$

解得： $\begin{cases} b = -0.1 \\ c = 25 \end{cases}$.

\therefore 场景 A 函数关系式为 $y_1 = -0.04x^2 - 0.1x + 25$.

对于场景 B 的图象是直线的一部分， y_2 与 x 之间近似满足函数关系 $y^2 = ax + c$.

又 $(0, 25), (10, 20)$ 在函数图象上，

$$\therefore \begin{cases} c = 25 \\ 10a + c = 15 \end{cases}$$

解得： $\begin{cases} c = 25 \\ a = -1 \end{cases}$.

\therefore 场景 B 函数关系式为 $y_2 = -x + 25$.

【小问 3 详解】

解：由题意，当 $y = 4$ 时，

场景 A 中， $x_A = 20$ ，

场景 B 中， $4 = -x_B + 25$ ，

解得： $x_B = 21$ ，

$\therefore x_A < x_B$.

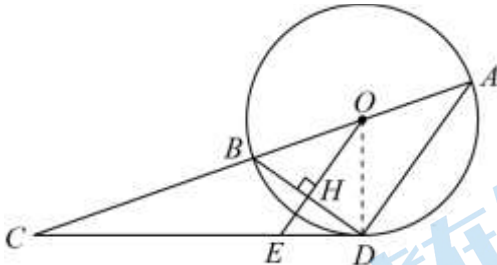
25. 【答案】(1) 见解析 (2) $EH = 1$ ，半径的长为 $\sqrt{6}$

【分析】(1) 连接 OD ，根据圆周角定理得到 $\angle ADB = 90^\circ$ ，根据平行线的判定与性质得到 $\angle BOE = \angle ADO$ ，根据切线的性质得到 $\angle CDO = 90^\circ$ ，通过等量代换即可得到结论；

(2) 根据等腰三角形的性质及三角形中位线定理, 得到 $OH = \frac{1}{2}AD = 2$, 设 $OD = r$, $OC = 3r$, 证明 $\triangle COE \sim \triangle CAD$, 根据相似三角形的性质, 可求得 OE 的长, 即可求得 EH 的长; 再根据相似三角形的判定, 可证得 $\triangle EDH \sim \triangle BOH$, 利用相似三角形的性质及勾股定理, 即可求得半径的长.

【小问 1 详解】

证明: 如图: 连 OD ,



$\because OA = OD$,
 $\therefore \angle A = \angle ADO$
 $\because AB$ 为直径,
 $\therefore \angle ADB = 90^\circ$,
 $\therefore AD \perp BD$, $\angle ADO + \angle ODB = 90^\circ$
 $\because OE \perp BD$
 $\therefore OE \parallel AD$,
 $\therefore \angle BOE = \angle A$,
 $\therefore \angle BOE = \angle ADO$
 $\because CD$ 为 $\odot O$ 切线,
 $\therefore OD \perp CD$, $\angle ODE = 90^\circ$,
 $\therefore \angle BDC + \angle ODB = 90^\circ$,
 $\therefore \angle BDC = \angle ADO$,
 $\therefore \angle BDC = \angle BOE$;

【小问 2 详解】

解: $\because OE \perp BD$, $OB = OD$,

\therefore 点 H 是 BD 的中点,

$\because OE \parallel AD$, 点 O 是 AB 的中点,

$\therefore OH$ 是 $\triangle ABD$ 的中位线,

$\therefore OH = \frac{1}{2}AD = 2$, $BH = DH$,

$\because \sin C = \frac{OD}{OC} = \frac{1}{3}$,

\therefore 设 $OD = r$, 则 $OC = 3r$,

$$\therefore AC = 3r + r = 4r,$$

$$\therefore OE \parallel AD,$$

$$\therefore \triangle COE \sim \triangle CAD,$$

$$\therefore \frac{CO}{CA} = \frac{OE}{AD},$$

$$\therefore \frac{3r}{4r} = \frac{OE}{4},$$

解得 $OE = 3$,

$$\therefore EH = OE - OH = 3 - 2 = 1,$$

$$\therefore \angle EHD = \angle BHO, \quad \angle EDH = \angle BOH$$

$$\therefore \triangle EDH \sim \triangle BOH,$$

$$\therefore \frac{EH}{BH} = \frac{DH}{OH}, \quad BH \cdot DH = EH \cdot OH,$$

$\therefore H$ 为 BD 的中点,

$$\therefore BH = DH,$$

$$\therefore DH^2 = EH \cdot OH = 1 \times 2 = 2$$

$$\therefore \text{在 Rt}\triangle ODH \text{ 中, } OD = \sqrt{OH^2 + DH^2} = \sqrt{2^2 + 2} = \sqrt{6},$$

$\therefore \odot O$ 的半径为 $\sqrt{6}$.

【点睛】 本题考查了切线的性质，相似三角形的判定和性质，三角形的中位线定理，平行线的判定和性质，圆周角定理，勾股定理，正确的作出辅助线是解题的关键。

26. **【答案】** (1) $t = 2$

(2) t 的取值范围是 $1 < t < 4$

【分析】 本题考查了二次函数的性质，熟练掌握二次函数的对称性是解题的关键。

(1) 根据二次函数的性质求的对称轴即可求解。

(2) 根据题意可得当 $x \geq t$ 时， y 随 x 的增大而增大；当 $x \leq t$ 时， y 随 x 的增大而减小，设抛物线上的四个点的坐标为 $A(t-1, m_A)$ ， $B(t, m_B)$ ， $C(2, n_C)$ ， $D(3, n_D)$ 可得 $m_A > m_B$ ，分情况讨论是否存在 $m > n$ 即可解答。

【小问 1 详解】

解：由题意知， $a + b + c = 9a + 3b + c$ 。

$$\therefore b = -4a.$$

$$\therefore t = -\frac{b}{2a} = 2.$$

【小问 2 详解】

$$\therefore a > 0,$$

\therefore 当 $x \geq t$ 时， y 随 x 的增大而增大；当 $x \leq t$ 时， y 随 x 的增大而减小。

设抛物线上的四个点的坐标为 $A(t-1, m_A)$, $B(t, m_B)$, $C(2, n_C)$, $D(3, n_D)$.

\therefore 点 A 关于对称轴 $x=t$ 的对称点为 $A'(t+1, m_A)$.

\therefore 抛物线开口向上, 点 B 是抛物线顶点,

$\therefore m_A > m_B$.

i. 当 $t \leq 1$ 时, $n_C < n_D$.

$\therefore t+1 \leq 2$.

$\therefore m_A \leq n_C$.

\therefore 不存在 $m > n$, 不符合题意.

ii. 当 $1 < t \leq 2$ 时, $n_C < n_D$.

$\therefore 2 < t+1 \leq 3$.

$\therefore m_A > n_C$.

\therefore 存在 $m > n$, 符合题意.

iii. 当 $2 < t \leq 3$ 时,

$\therefore n$ 的最小值为 m_B .

$\therefore m_A > m_B$,

\therefore 存在 $m > n$, 符合题意.

iv. 当 $3 < t < 4$ 时, $n_D < n_C$.

$\therefore 2 < t-1 < 3$.

$\therefore m_A > n_D$.

\therefore 存在 $m > n$, 符合题意.

v. 当 $t \geq 4$ 时, $n_D < n_C$.

$\therefore t-1 \geq 3$.

$\therefore m_A \leq n_D$.

\therefore 不存在 $m > n$, 不符合题意.

综上所述, t 的取值范围是 $1 < t < 4$.

27. 【答案】(1) 见解析 (2) ①见解析 ② $\angle BAC = 90^\circ$

【分析】本题考查等腰三角形的判定和性质, 全等三角形的判定和性质, 平行四边形的判定和性质, 作辅助线构造全等三角形是解题的关键.

(1) 根据等边对等角得到 $\angle B = \angle C$, 进而得到 $\angle EDC = \angle C$, 再根据等角对等边即可得到结论;

(2) ①根据题意补图即可;

②延长 EF 至点 G , 使 $GF = EF$, 连接 AG, BG, DG, AE , 则四边形 $BEDG$ 是平行四边形, 然后推导 $\triangle ABG \cong \triangle ACE$, 得到 $\angle ABG = \angle ACE$, 然后得到 $\angle BAC = \angle BED = \angle CED$,

$\angle BED + \angle CED = 180^\circ$ 即可得到结论.

【小问 1 详解】

证明: $\because AB = AC$,

$$\therefore \angle B = \angle C,$$

又 $\because \angle EDC = \angle B$,

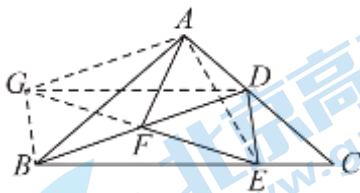
$$\therefore \angle EDC = \angle C,$$

$$\therefore ED = EC;$$

【小问 2 详解】

①如图所示,

②延长 EF 至点 G , 使 $GF = EF$, 连接 AG, BG, DG, AE ,



\because 点 F 为 BD 的中点,

\therefore 四边形 $BEDG$ 是平行四边形,

$$\therefore BG = DE, \quad BG \parallel DE,$$

$$\because GF = EF, \quad AF \perp EF,$$

$\therefore AF$ 垂直平分 EG ,

$$\therefore AG = AE,$$

由 (1) 得: $DE = CE$,

$$\text{又} \because BG = DE,$$

$$\therefore BG = CE,$$

$$\therefore \triangle ABG \cong \triangle ACE,$$

$$\therefore \angle ABG = \angle ACE,$$

$$\text{又} \because \angle ACE + \angle ABE + \angle BAC = 180^\circ,$$

$$\therefore \angle ABG + \angle ABE + \angle BAC = 180^\circ,$$

$$\therefore \angle EBG + \angle BAC = 180^\circ,$$

$$\therefore \angle EBG + \angle BAC = 180^\circ,$$

$$\therefore BG \parallel DE,$$

$$\therefore \angle EBG + \angle BED = 180^\circ,$$

$$\text{又} \because \angle EBG + \angle BAC = 180^\circ,$$

$$\therefore \angle BAC = \angle BED,$$

$$\therefore \angle BAC + \angle ABC + \angle C = 180^\circ, \quad \angle CED + \angle EDC + \angle C = 180^\circ, \quad \angle EDC = \angle ABC,$$

$$\therefore \angle BAC = \angle CED,$$

$$\text{又} \because \angle BAC = \angle BED,$$

$$\therefore \angle BAC = \angle BED = \angle CED,$$

$$\therefore \angle BED + \angle CED = 180^\circ,$$

$$\therefore 2\angle BAC = 180^\circ,$$

$$\therefore \angle BAC = 90^\circ.$$

28. 【答案】(1) ① P_2, P_3 ; ② $-4 \leq b \leq -2\sqrt{2} - 2$ 或 $0 \leq b \leq 2\sqrt{2} - 2$

$$(2) \frac{-1-\sqrt{11}}{2} \leq t \leq \frac{-1-\sqrt{5}}{2} \text{ 或 } \frac{-1+\sqrt{5}}{2} \leq t \leq \frac{-1+\sqrt{11}}{2}$$

【分析】(1) ①根据新定义, 即可求解;

②分 $b \geq 0$, $b \leq 0$ 时, 分别讨论, 设直线 $y = x + b$ 与坐标轴分别交于点 D, E , 作 $EF \perp DE$ 交 x 轴于点 F , 过点 T 作 $TQ \perp DE$ 于点 Q , 则 $\triangle DEF \sim \triangle DQT$, 根据 $\sqrt{2} \leq TQ \leq 2$, 即可得出 b 的范围;

(2) 依题意, $1 \leq TQ \leq \sqrt{2}$, 进而得出 $\sqrt{3} \leq OT \leq \sqrt{6}$, 即 $OT^2 = t^2 + (t+1)^2$, 解一元二次方程, 结合图形, 即可求解.

【小问1详解】

解: ①正方形 T 的顶点分别为点 O , $A(2,2)$, $B(4,0)$, $C(2,-2)$

$$\therefore T(2,0),$$

则正方形 T 的边长为 $\frac{\sqrt{2}}{2} \times 4 = 2\sqrt{2}$, 对角线长为 4

$$\therefore \sqrt{2} \leq TQ \leq 2,$$

$$\therefore TP_2 = TP_3 = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}, \text{ 即 } T \text{ 到 } OP_2, OP_3 \text{ 的距离为 } \sqrt{2},$$

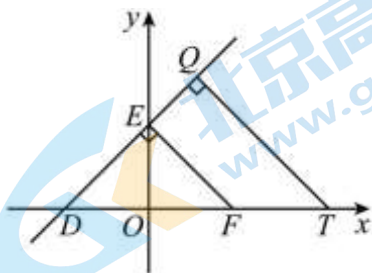
而 T 到 OP_1 的距离小于 $\sqrt{2}$,

\therefore 在点 $P_1(2,1)$, $P_2(1,1)$, $P_3(1,-1)$ 中, 正方形 T 的“伴随切点”是 $P_2(1,1)$, $P_3(1,-1)$

故答案为: P_2, P_3 .

②解: 由①可得 $\sqrt{2} \leq TQ \leq 2$,

如图所示, 当 $b \geq 0$ 时



设直线 $y = x + b$ 与坐标轴分别交于点 D, E ，作 $EF \perp DE$ 交 x 轴于点 F ，过点 T 作 $TQ \perp DE$ 于点 Q

$$\therefore OE = OD = b, DE = EF = \sqrt{2}DO = \sqrt{2}b, DF = 2b$$

$\therefore EF \parallel QT$,

$$\therefore \triangle DEF \sim \triangle DQT$$

$$\therefore \frac{EF}{QT} = \frac{DF}{DT}$$

当 $TQ = 2$ 时,

$$\therefore \frac{\sqrt{2}b}{2} = \frac{2b}{2+b}$$

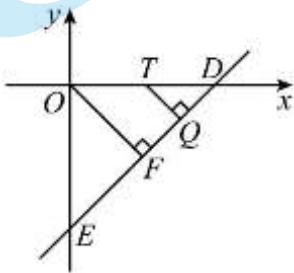
解得: $b = 2\sqrt{2} - 2$ 或 $b = 0$ (舍去)

当 $TQ = \sqrt{2}$ 时, 则 $\frac{\sqrt{2}b}{\sqrt{2}} = \frac{2b}{2+b}$, 解得: $b = 0$,

$$\therefore \sqrt{2} \leq TQ \leq 2$$

$$\therefore 0 \leq b \leq 2\sqrt{2} - 2$$

当 $b \leq 0$ 时, 如图所示, 过点 O 作 $OF \perp DE$ 于点 F ,



$\therefore OF \parallel TQ$,

$$\therefore \triangle DTQ \sim \triangle DOF$$

$$\therefore \frac{TQ}{OF} = \frac{TD}{OD}$$

当 $TQ = 2$ 时,

$$\therefore \frac{2}{-\frac{\sqrt{2}}{2}b} = \frac{-b-2}{-b}$$

解得: $b = -2\sqrt{2} - 2$

当 $TQ = \sqrt{2}$ 时, 则 $\frac{\sqrt{2}}{-\frac{\sqrt{2}}{2}b} = \frac{-b-2}{-b}$,

解得: $b = -4$,

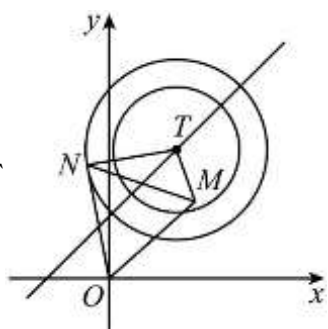
$$\therefore -4 \leq b \leq -2\sqrt{2} - 2;$$

综上所述， $-4 \leq b \leq -2\sqrt{2} - 2$ 或 $0 \leq b \leq 2\sqrt{2} - 2$ ；

【小问 2 详解】

解：∵ 点 $T(t, t+1)$ ，正方形 T 的边长为 2.

$$\therefore 1 \leq TQ \leq \sqrt{2}$$



∴ $2 \leq MN \leq 2\sqrt{2}$ ，当点 T 在 MN 上时取得等于号，

∵ $\triangle OMN$ 为等边三角形， T 为正方形的中心，则 $TM = TN$

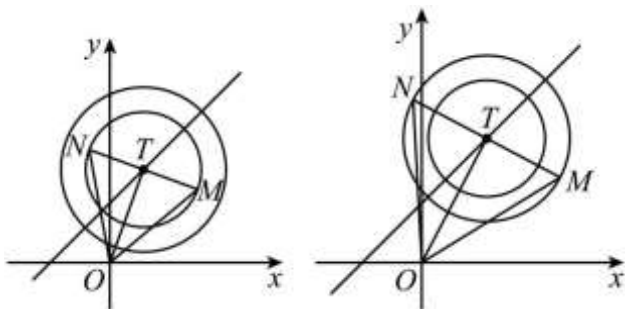
∴ $OT \perp MN$

$$\therefore TM = \frac{1}{2}OM, \text{ 则 } OT = \sqrt{OM^2 - TM^2} = \sqrt{3}TM$$

$$\therefore \sqrt{3} \leq OT \leq \sqrt{6}$$

$$\therefore OT^2 = t^2 + (t+1)^2, \text{ 即 } 3 \leq t^2 + (t+1)^2 \leq 6$$

$$\therefore \text{当 } t^2 + (t+1)^2 = (\sqrt{3})^2, \text{ 解得: } t = \frac{-\sqrt{5}-1}{2} \text{ 或 } t = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$$



$$\text{当 } t^2 + (t+1)^2 = (\sqrt{6})^2,$$

$$\text{解得: } t = \frac{-\sqrt{11}-1}{2} \text{ 或 } t = \frac{\sqrt{11}-1}{2}$$

$$\therefore 3 \leq t^2 + (t+1)^2 \leq 6 \text{ 的解集为: } \frac{-1-\sqrt{11}}{2} \leq t \leq \frac{-1-\sqrt{5}}{2} \text{ 或 } \frac{-1+\sqrt{5}}{2} \leq t \leq \frac{-1+\sqrt{11}}{2}.$$

$$\therefore \frac{-1-\sqrt{11}}{2} \leq t \leq \frac{-1-\sqrt{5}}{2} \text{ 或 } \frac{-1+\sqrt{5}}{2} \leq t \leq \frac{-1+\sqrt{11}}{2}.$$

【点睛】 本题考查了新定义，相似三角形的性质与判定，切线的性质，正方形的性质，勾股定理，解一元

二次方程，理解新定义是解题的关键.



关注北京高考在线官方微信：[京考一点通](#)（微信号:bjgkzx），获取更多试题资料及排名分析信息。

关于我们

北京高考在线创办于 2014 年，隶属于北京太星网络科技有限公司，是北京地区极具影响力的中学升学服务平台。主营业务涵盖：北京新高考、高中生涯规划、志愿填报、强基计划、综合评价招生和学科竞赛等。

北京高考在线旗下拥有网站门户、微信公众平台等全媒体矩阵生态平台。平台活跃用户 50W+，网站年度流量数千万量级。用户群体立足于北京，辐射全国 31 省市。

北京高考在线平台一直秉承“精益求精、专业严谨”的建设理念，不断探索“K12 教育+互联网+大数据”的运营模式，尝试基于大数据理论为广大中学和家长提供新鲜的高考资讯、专业的高考政策解读、科学的升学规划等，为广大高校、中学和教科研单位提供“衔接和桥梁纽带”作用。

平台自创办以来，为众多重点大学发现和推荐优秀生源，和北京近百所中学达成合作关系，累计举办线上线下升学公益讲座数千场，帮助数十万考生顺利通过考入理想大学，在家长、考生、中学和社会各界具有广泛的口碑影响力

未来，北京高考在线平台将立足于北京新高考改革，基于对北京高考政策研究及北京高校资源优势，更好的服务全国高中家长和学生。

推荐大家关注北京高考在线网站官方微信公众号：**京考一点通**，我们会持续为大家整理分享最新的高中升学资讯、政策解读、热门试题答案、招生通知等内容！

