★启用前注意保密

2023年普通高等学校招生全国统一考试模拟测试（一）

数　学

本试卷共6页，22小题，满分150分。考试用时120分钟。

注意事项：1．答卷前，考生务必将自己所在的市(县、区)、学校、班级、姓名、考场号、座位号和考生号填写在答题卡上，将条形码横贴在每张答题卡右上角"条形码粘贴处"。

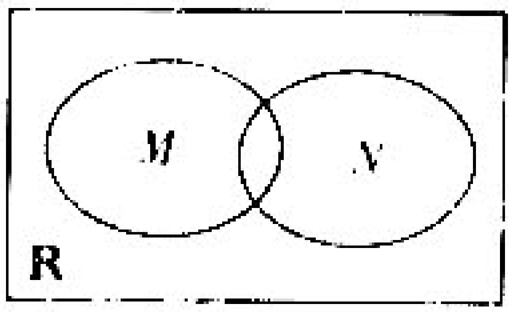
2．作答选择题时，选出每小题答案后，用2B铅笔在答题卡上将对应题目选项的答案信息点涂黑，如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其他答案。答案不能答在试卷上。

3．非选择题必须用黑色字迹的钢笔或签字笔作答，答案必须写在答题卡各题目指定区域内相应位置上；如需改动，先画掉原来的答案，然后再写上新答案；不准使用铅笔和涂改液。不按以上要求作答无效。

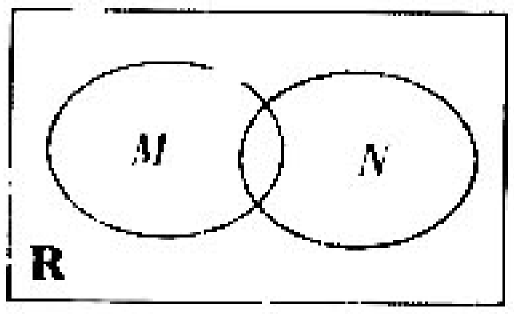
4．考生必须保证答题卡的整洁。考试结束后，将试卷和答题卡一并交回。

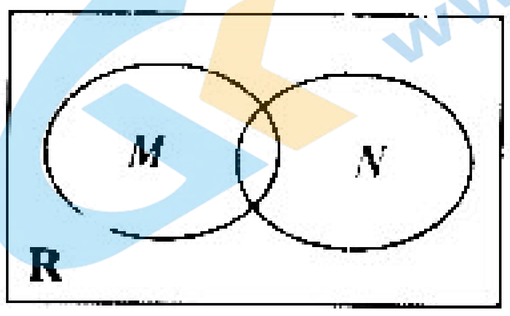
一、选择题：本题共8小题，每小题5分，共40分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1．已知集合 $M=\{x|x(x-2)<0\}$，$N=\{x|x-1<0\}$，则下列Venn图中阴影部分可以表示集合 $\{x|1\leq x<2\}$ 的是

A. 

B. 

C. 

D. 

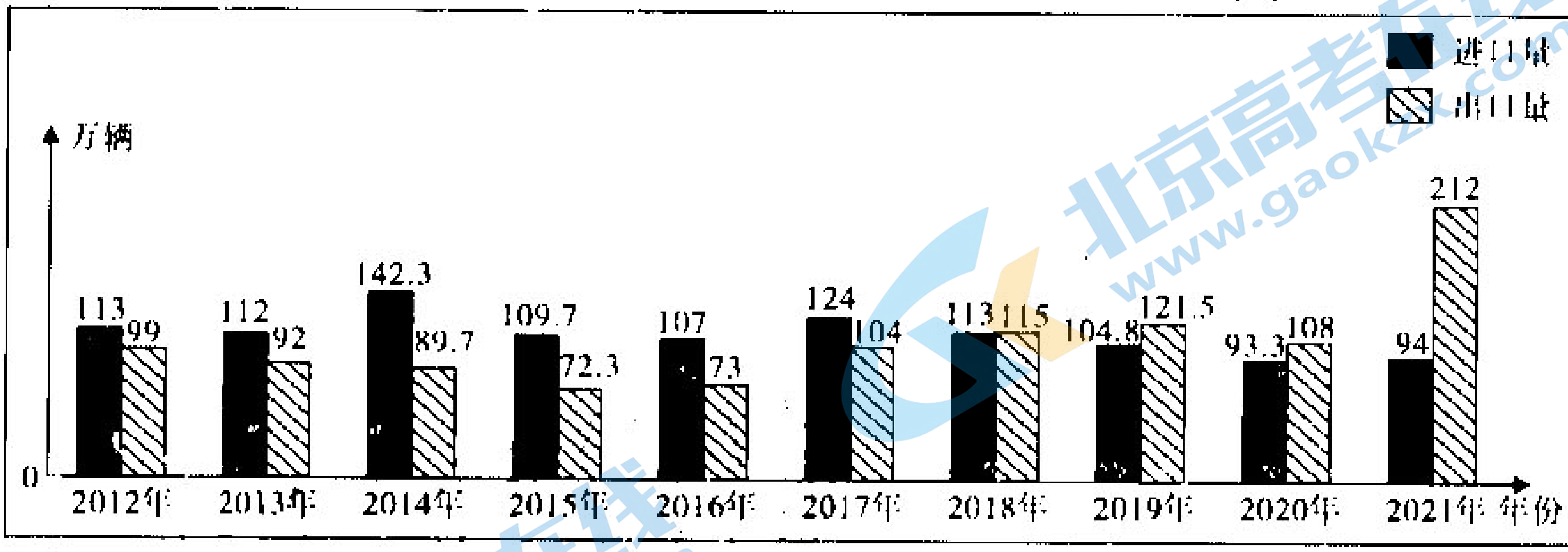
2．已知一个圆锥和圆柱的底面半径和高分别相等，若圆锥的轴截面是等边三角形，则这个圆锥和圆柱的侧面积之比为

A. $\frac{1}{2}$　　B. $\frac{\sqrt{2}}{2}$　　C. $\frac{\sqrt{3}}{3}$　　D. $\sqrt{3}$

3．已知函数 $f(x)=\begin{cases}2^x, & x\geq 0,\\ -\left(\frac{1}{2}\right)^x, & x<0,\end{cases}$ 若 $f(a)<f(6-a)$，则实数 a 的取值范围是

A. $(-3,+\infty)$　　B. $(-\infty,-3)$　　C. $(3,+\infty)$　　D. $(-\infty,3)$

4. 如图所示是中国2012—2021年汽车进、出口量统计图，则下列结论错误的是



A. 2012—2021年中国汽车进口量和出口量都是有增有减的

B. 从2018年开始，中国汽车的出口量大于进口量

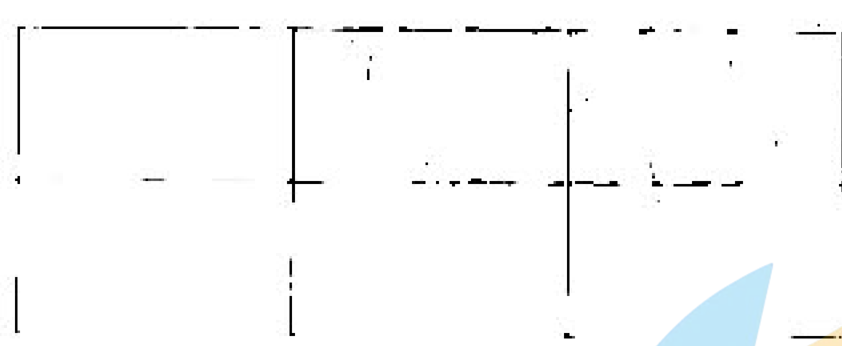
C. 2012—2021年中国汽车出口量的第60百分位数是106万辆

D. 2012—2021年中国汽车进口量的方差大于出口量的方差

5. 在复平面内，已知复数z满足$|z-1|=|z+i|$（i为虚数单位），记$z_0=2+i$对应的点为点Z_0，z对应的点为点Z，则点Z_0与点Z之间距离的最小值为

A. $\frac{\sqrt{2}}{2}$　　B. $\sqrt{2}$　　C. $\frac{3\sqrt{2}}{2}$　　D. $2\sqrt{2}$

6. 如图，在两行三列的网格中放入标有数字1，2，3，4，5，6的六张卡片，每格只放一张卡片，则"只有中间一列两个数字之和为5"的不同的排法有



A. 96种　　B. 64种　　C. 32种　　D. 16种

7. 已知双曲线C：$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0，b>0)$，点$B$的坐标为$(0，b)$，若$C$上的任意一点$P$都满足$|PB|\geq b$，则$C$的离心率取值范围是

A. $\left(1，\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right]$　　B. $\left[\frac{\sqrt{5}+1}{2}，+\infty\right)$

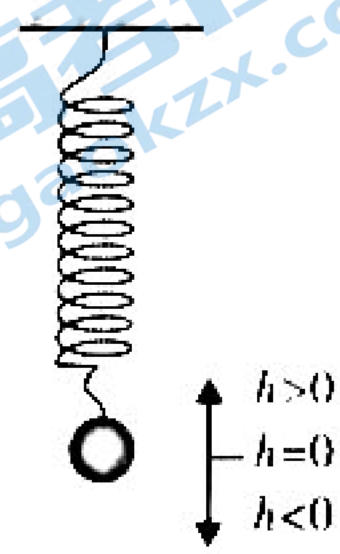
C. $(1，\sqrt{2}]$　　D. $[\sqrt{2}，+\infty)$

8. 水平桌面上放置了4个半径为2的小球，4个小球的球心构成正方形，且相邻的两个小球相切，若用一个半球形的容器罩住四个小球，则半球形容器内壁的半径的最小值为

A. 4　　B. $2\sqrt{2}+2$　　C. $2\sqrt{3}+2$　　D. 6

二、选择题：本题共4小题，每小题5分，共20分．在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求．全部选对的得5分，部分选对的得2分，有选错的得0分．

9．如图，弹簧下端悬挂着的小球做上下运动（忽略小球的大小），它在t(s)时刻相对于平衡位置的高度h(cm)可以由$h=2\sin\left(\frac{\pi}{2}t+\frac{\pi}{4}\right)$确定，则下列说法正确的是



A．小球运动的最高点与最低点的距离为2 cm

B．小球经过4 s往复运动一次

C．$t\in(3,5)$时小球是自下往上运动

D．当$t=6.5$时，小球到达最低点

10．在四棱锥$S-ABCD$中，$SD\perp$平面$ABCD$，四边形$ABCD$是正方形，若$SD=AD$，则

A．$AC\perp SD$　　　　B．AC与SB所成角为60°

C．BD与平面SCD所成角为45°　　　　D．BD与平面SAB所成角的正切值为$\frac{\sqrt{3}}{3}$

11．已知抛物线E：$y^2=8x$的焦点为F，点F与点C关于原点对称，过点C的直线l与抛物线E交于A，B两点（点A和点C在点B的两侧），则下列命题正确的是

A．若BF为$\triangle ACF$的中线，则$|AF|=2|BF|$

B．若BF为$\angle AFC$的角平分线，则$|AF|=6$

C．存在直线l，使得$|AC|=\sqrt{2}|AF|$

D．对于任意直线l，都有$|AF|+|BF|>2|CF|$

12．已知定义在$\mathbf{R}$上的函数$f(x)$，对于给定集合A，若$\forall x_1,x_2\in\mathbf{R}$，当$x_1-x_2\in A$时都有$f(x_1)-f(x_2)\in A$，则称$f(x)$是"$A$封闭"函数．则下列命题正确的是

A．$f(x)=x^2$是"$[-1,1]$封闭"函数

B．定义在$\mathbf{R}$上的函数$f(x)$都是"$\{0\}$封闭"函数

C．若$f(x)$是"$\{1\}$封闭"函数，则$f(x)$一定是"$\{k\}$封闭"函数（$k\in\mathbf{N}^*$）

D．若$f(x)$是"$[a,b]$封闭"函数（$a,b\in\mathbf{N}^*$），则$f(x)$不一定是"$\{ab\}$封闭"函数

三、填空题：本大题共4小题，每小题5分，共20分．请把答案填在答题卡的相应位置上．

13．已知向量$\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$满足$|\boldsymbol{a}|=2$，$|\boldsymbol{b}|=4$，$(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a})\cdot\boldsymbol{a}=0$，则$\boldsymbol{a}$与$\boldsymbol{b}$的夹角为________．

14．在平面直角坐标系中，等边三角形ABC的边AB所在直线斜率为$2\sqrt{3}$，则边AC所在直线斜率的一个可能值为________．

15．已知$f(x)$是定义在$\mathbf{R}$上的奇函数，且$f(x)$在$[0,2]$上单调递减，$f(x+2)$为偶函数，若$f(x)=m$在$[0,12]$上恰好有4个不同的实数根x_1，x_2，x_3，x_4，则$x_1+x_2+x_3+x_4=$________．

16. 已知动圆 N 经过点 $A(-6,0)$ 及原点 O，点 P 是圆 N 与圆 M：$x^2+(y-4)^2=4$ 的一个公共点，则当 $\angle OPA$ 最小时，圆 N 的半径为____.

四、解答题：本大题共6小题，共70分．解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤．

17. (10分)

在 $\triangle ABC$ 中，角 A，B，C 的对边分别为 a，b，c，已知 $\cos 2A+\cos 2B-\cos 2C=1-2\sin A\sin B$.

(1)求角 C 的大小；

(2)求 $\sin A+\sin B+\sin C$ 的取值范围.

18. (12分)

已知各项都是正数的数列 $\{a_n\}$，前 n 项和 S_n 满足 $a_n^2=2S_n-a_n\ (n\in \mathbf{N}^*)$.

(1)求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式.

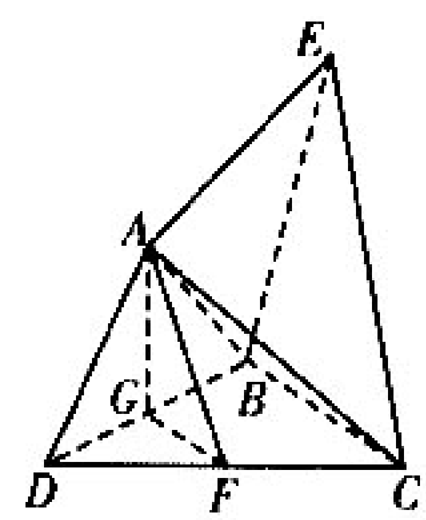
(2)记 P_n 是数列 $\left\{\frac{1}{S_n}\right\}$ 的前 n 项和，Q_n 是数列 $\left\{\frac{1}{a_{2^{n-1}}}\right\}$ 的前 n 项和，当 $n\geqslant 2$ 时，试比较 P_n 与 Q_n 的大小.

19. (12 分)

如图所示的多面体中，$AB=AD$，$EB=EC$，平面 $ABD\perp$ 平面 BCD，平面 $BCE\perp$ 平面 BCD，点 F、G 分别是 CD、BD 中点.

(1) 证明：平面 $AFG\parallel$ 平面 BCE；

(2) 若 $BC\perp BD$，$BC=BD=2$，$AB=\sqrt{2}$，$BE=\sqrt{5}$，求平面 AFG 和平面 ACE 夹角的余弦值.



20. (12 分)

某商场为了回馈广大顾客，设计了一个抽奖活动，在抽奖箱中放 10 个大小相同的小球，其中 5 个为红色，5 个为白色. 抽奖方式为：每名顾客进行两次抽奖，每次抽奖从抽奖箱中一次性摸出两个小球. 如果每次抽奖摸出的两个小球颜色相同即为中奖，两个小球颜色不同即为不中奖.

(1) 若规定第一次抽奖后将球放回抽奖箱，再进行第二次抽奖，求中奖次数 X 的分布列和数学期望.

(2) 若规定第一次抽奖后不将球放回抽奖箱，直接进行第二次抽奖，求中奖次数 Y 的分布列和数学期望.

(3) 如果你是商场老板，如何在上述问两种抽奖方式中进行选择？请写出你的选择及简要理由.

21. (12分)

已知点A、点B和点C为椭圆C: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$上不同的三个点. 当点A、点B和点C为椭圆的顶点时，$\triangle ABC$恰好是边长为2的等边三角形.

(1)求椭圆C的标准方程;

(2)若O为原点，且满足$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=\mathbf{0}$，求$\triangle ABC$的面积.

22. (12分)

已知函数$f(x)=xe^{x+1}$.

(1)求$f(x)$的极值;

(2)当$x>0$时，$f(x)\geqslant(a+1)x+\ln x+2$，求实数$a$的取值范围.

★启用前注意保密

2023 年普通高等学校招生全国统一考试模拟测试（一）

数学参考答案

评分标准：

1. 本解答给出了一种或几种解法供参考，如果考生的解法与本解答不同，可根据试题的主要考查内容比照评分标准制订相应的评分细则。
2. 对计算题，当考生的解答在某一步出现错误时，如果后继部分的解答未改变该题的内容和难度，可视影响的程度决定后继部分的给分，但不得超过该部分正确解答应得分数的一半；如果后继部分的解答有较严重的错误，就不再给分。
3. 解答右端所注分数，表示考生正确做到这一步应得的累加分数.

一、选择题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

题号	1	2	3	4	5	6	7	8
答案	B	C	D	D	C	B	A	C

二、选择题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分. 在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求，全部选对的得 5 分，部分选对的得 2 分，有选错的得 0 分.

题号	9	10	11	12
答案	BD	ACD	AD	BC

三、填空题：本大题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。请把答案填在答题卡的相应位置上。

13. $\frac{\pi}{3}$　　14. $-\frac{3\sqrt{3}}{5}\left(或\frac{\sqrt{3}}{7}\right)$　　15. 24　　16. 5

四、解答题：本大题共 6 小题，共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17. 解：(1) 因为 $\cos 2A+\cos 2B-\cos 2C=1-2\sin A\sin B$，

所以 $1-2\sin^2 A+1-2\sin^2 B-(1-2\sin^2 C)=1-2\sin A\sin B$，　……………… 1 分

整理得 $\sin^2 A+\sin^2 B-\sin^2 C=\sin A\sin B$，　……………………………… 2 分

由正弦定理得 $a^2+b^2-c^2=ab$，　……………………………………………… 3 分

由余弦定理得 $\cos C=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}=\frac{1}{2}$，　………………………………… 4 分

因为 $C\in(0,\pi)$，所以 $C=\frac{\pi}{3}$.　……………………………………………… 5 分

(2) $\sin A+\sin B+\sin C=\sin A+\sin\left(\frac{2\pi}{3}-A\right)+\frac{\sqrt{3}}{2}$ ………………………………………… 6 分

$=\sin A+\sin\frac{2\pi}{3}\cos A-\cos\frac{2\pi}{3}\sin A+\frac{\sqrt{3}}{2}$

$=\frac{3}{2}\sin A+\frac{\sqrt{3}}{2}\cos A+\frac{\sqrt{3}}{2}$

$=\sqrt{3}\sin\left(A+\frac{\pi}{6}\right)+\frac{\sqrt{3}}{2}$. ………………………………………………………………… 8 分

在$\triangle ABC$中，因为$C=\frac{\pi}{3}$，所以$0<A<\frac{2\pi}{3}$，………………………………………… 9 分

所以$\frac{\pi}{6}<A+\frac{\pi}{6}<\frac{5\pi}{6}$，所以$\frac{1}{2}<\sin\left(A+\frac{\pi}{6}\right)\leqslant 1$，所以$\sqrt{3}<\sqrt{3}\sin\left(A+\frac{\pi}{6}\right)+\frac{\sqrt{3}}{2}\leqslant\frac{3\sqrt{3}}{2}$.

所以$\sin A+\sin B+\sin C$的取值范围为$\left(\sqrt{3},\frac{3\sqrt{3}}{2}\right]$. ……………………………… 10 分

18. 解：(1) 当$n=1$时，$a_1^2=2S_1-a_1=a_1$，所以$a_1=1$或$a_1=0$（舍去），……… 1 分

当$n\geqslant 2$时，有$\begin{cases}a_n^2=2S_n-a_n,\\ a_{n-1}^2=2S_{n-1}-a_{n-1},\end{cases}$ ………………………………………… 2 分

两式相减得$a_n^2-a_{n-1}^2=2a_n-a_n+a_{n-1}=a_n+a_{n-1}$，……………………………………… 3 分

整理得$(a_n+a_{n-1})(a_n-a_{n-1})=a_n+a_{n-1}$，……………………………………………… 4 分

因为$\{a_n\}$的各项都是正数，所以$a_n-a_{n-1}=1$，

所以$\{a_n\}$是首项为1，公差为1的等差数列，………………………………………… 5 分

所以$a_n=1+1\cdot(n-1)=n$. ………………………………………………………………… 6 分

(2) 由(1)得$S_n=\frac{n(n+1)}{2}$，则$\frac{1}{S_n}=\frac{2}{n(n+1)}=2\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)$，……………………… 7 分

所以$P_n=\frac{1}{S_1}+\frac{1}{S_2}+\cdots+\frac{1}{S_n}=2\left(1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)=2\left(1-\frac{1}{n+1}\right)$.

……………………………………………………………………………………………… 8 分

由(1)得$\frac{1}{a_{2^{n-1}}}=\frac{1}{2^{n-1}}$，……………………………………………………………………… 9 分

所以$Q_n=\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\frac{1}{a_{2^2}}+\cdots+\frac{1}{a_{2^{n-1}}}=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{2^{n-1}}=\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n}{1-\frac{1}{2}}=2\left(1-\frac{1}{2^n}\right)$，

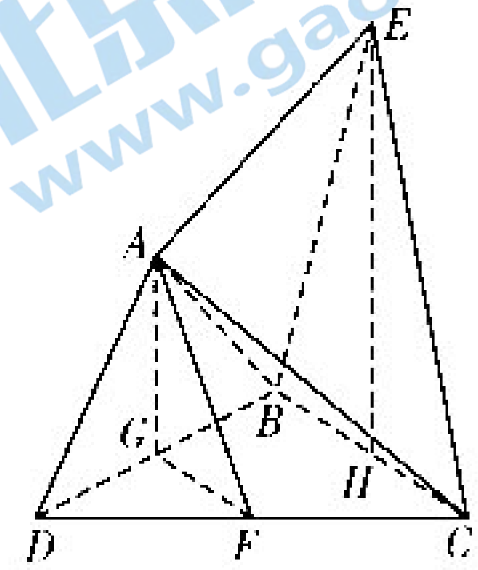
……………………………………………………………………………………………… 10 分

因为$2^n=(1+1)^n=1+n+\frac{n(n+1)}{2}+\cdots>1+n>0\ (n\geqslant 2)$，

所以$\frac{1}{2^n}<\frac{1}{1+n}$，故$1-\frac{1}{2^n}>1-\frac{1}{1+n}$，

所以当 $n\geqslant 2$ 时，$P_n<Q_n$. ………………………………………………………… 12 分

19. 解：(1) 如图，取 BC 中点 H，连接 EH，因为 $EB=EC$，所以 $EH\perp BC$， …… 1 分



又因为平面 $BCE\perp$ 平面 BCD，平面 $BCE\cap$ 平面 $BCD=BC$，

$EH\subset$ 平面 BCE，所以 $EH\perp$ 平面 BCD， ………………… 2 分

同理可得 $AG\perp$ 平面 BCD，

所以 $EH/\!/AG$， ………………………………………………… 3 分

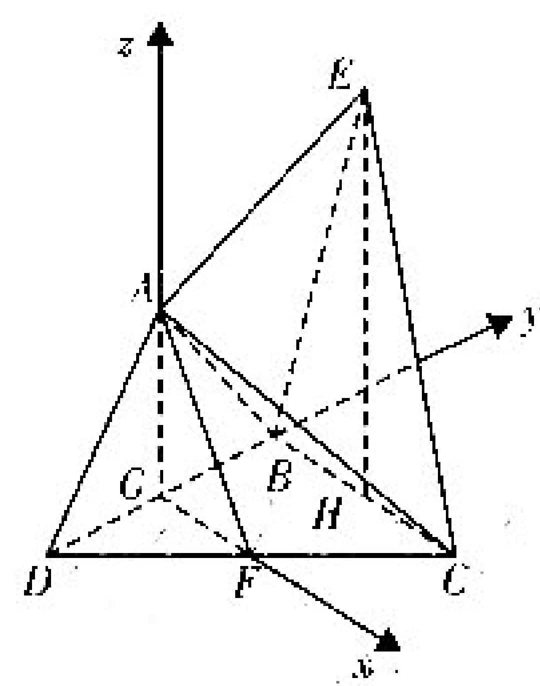
又因为 $AG\not\subset$ 平面 BCE，$EH\subset$ 平面 BCE，所以 $AG/\!/$ 平面 BCE， ……………………………………………………… 4 分

因为点 F，G 分别是 CD，BD 中点，所以 $FG/\!/BC$，

又因为 $FG\not\subset$ 平面 BCE，$BC\subset$ 平面 BCE，所以 $FG/\!/$ 平面 BCE， ……………… 5 分

又因为 $AG\cap FG=G$，AG，$FG\subset$ 平面 AFG，所以平面 $AFG/\!/$ 平面 BCE. …… 6 分

(2) **方法一**：因为 $BC\perp BD$，$BC/\!/FG$，所以 $FG\perp BD$，



由 (1) 知 $AG\perp BD$，$AG\perp$ 平面 BCD，$GF\subset$ 平面 BCD，所以 $AG\perp GF$，

所以 GF，GB，GA 两两相互垂直， ………………… 7 分

如图，以点 G 为坐标原点，GF、GB、GA 分别为 x 轴，y 轴，z 轴建立空间直角坐标系，

因为 $AB=\sqrt{2}$，$BE=\sqrt{5}$，所以 $GA=GB=1$，$EH=2$，$BH=1$，

则 $A(0,0,1)$，$C(2,1,0)$，$E(1,1,2)$， ………… 8 分

平面 AFG 的一个法向量为 $\overrightarrow{DB}=(0,2,0)$， ……… 9 分

设平面 ACE 的法向量为 $\vec{n}=(x,y,z)$，

由 $\overrightarrow{AC}=(2,1,-1)$，$\overrightarrow{CE}=(-1,0,2)$，

得 $\begin{cases}\vec{n}\cdot\overrightarrow{AC}=0,\\ \vec{n}\cdot\overrightarrow{CE}=0,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}2x+y-z=0,\\ -x+2z=0,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}y=-\dfrac{3x}{2},\\ z=\dfrac{x}{2},\end{cases}$ 取 $x=2$，得 $\vec{n}=(2,-3,1)$.

……………………………………………………………………………… 10 分

设平面 AFG 和平面 ACE 的夹角为 θ，

则 $\cos\theta=|\cos<\vec{n},\overrightarrow{DB}>|=\dfrac{|\vec{n}\cdot\overrightarrow{DB}|}{|\vec{n}|\cdot|\overrightarrow{DB}|}=\dfrac{6}{2\times\sqrt{14}}=\dfrac{3\sqrt{14}}{14}$，

所以平面 AFG 和平面 ACE 的夹角的余弦值为 $\dfrac{3\sqrt{14}}{14}$. ……………………… 12 分

方法二：因为平面 $AFG/\!/$ 平面 BCE，所以平面 AFG 和平面 ACE 的夹角即二面角 $A-CE-B$.

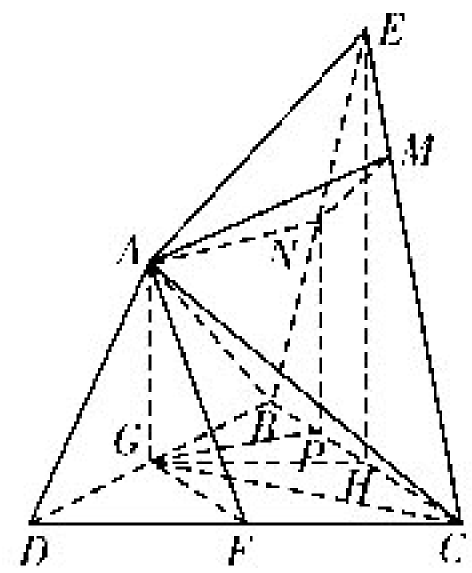
如图，过点 A 作 $AM\perp CE$，垂足为点 M，过点 M 作 $MN\perp EC$ 交 BE 于点 N，则 $\angle AMN$ 为二面角 $A-CE-B$ 所成平面角. ………………………………………… 7 分

在 $Rt\triangle BCG$ 中，$GC=\sqrt{BG^2+BC^2}=\sqrt{5}$，

在 $Rt\triangle ACG$ 中，$AC=\sqrt{AG^2+GC^2}=\sqrt{6}$，

在直角梯形 $AGHE$ 中，$\because\begin{cases}AG// EH,\\ CD=\sqrt{DB^2+CB^2}=2\sqrt{2},\end{cases}\therefore GH=\frac{1}{2}DC=\sqrt{2}$，

所以 $AE=\sqrt{(2-1)^2+(\sqrt{2})^2}=\sqrt{3}$，…………………………………………………… 8 分



在 $\triangle ACE$ 中，$\cos\angle ACE=\frac{AC^2+CE^2-AE^2}{2\cdot AC\cdot CE}=\frac{4}{\sqrt{30}}$，

所以 $\sin\angle ACE=\sqrt{1-\frac{16}{30}}=\sqrt{\frac{14}{30}}$，

利用三角形等面积可得 $S_{\triangle ACE}=\frac{1}{2}\cdot AC\cdot CE\cdot\sin\angle ACE=$ $\frac{1}{2}\times\sqrt{6}\times\sqrt{5}\times\sqrt{\frac{14}{30}}=\frac{1}{2}\cdot AM\cdot CE=\frac{1}{2}\times\sqrt{5}\cdot AM$，所以 $AM=$ $\frac{\sqrt{14}}{\sqrt{5}}$，$EM=\sqrt{3-\frac{14}{5}}=\frac{\sqrt{5}}{5}$，…………………………………………………… 9 分

因为 $\cos\angle BEC=2\cos^2\angle BEH-1=\frac{3}{5}$，所以 $EN=\frac{\sqrt{5}}{3}$，$MN=\frac{4\sqrt{5}}{15}$，………… 10 分

过点 N 作 $NP\perp BC$ 于 P，$\frac{BN}{BE}=1-\frac{EN}{BE}=\frac{2}{3}$，则 $BN=\frac{2\sqrt{5}}{3}$，$BP=\frac{2}{3}BH=\frac{2}{3}$，$NP=$ $\frac{4}{3}EH=\frac{4}{3}$，$GP=\sqrt{GB^2+BP^2}=\frac{\sqrt{13}}{3}$，所以 $AN=\sqrt{\left(\frac{4}{3}-1\right)^2+\left(\frac{\sqrt{13}}{3}\right)^2}=\frac{\sqrt{14}}{3}$，

…………………………………………………………………………………… 11 分

在 $\triangle AMN$ 中，$AN=\frac{\sqrt{14}}{3}$，$AM=\frac{\sqrt{14}}{\sqrt{5}}$，$MN=\frac{4\sqrt{5}}{15}$，所以 $\cos\angle AMN=\dfrac{\frac{14}{5}+\frac{16}{45}-\frac{14}{9}}{2\times\frac{\sqrt{14}}{\sqrt{5}}\times\frac{4\sqrt{5}}{15}}$ $=\frac{3\sqrt{14}}{14}$，所以平面 AFG 和平面 ACE 夹角的余弦值为 $\frac{3\sqrt{14}}{14}$. ……………… 12 分

20. 解：(Ⅰ)若第一次抽奖后将球放回抽奖箱，再进行第二次抽奖，则每次中奖的概率为 $\frac{C_5^2+C_5^2}{C_{10}^2}=\frac{4}{9}$，…………………………………………………………………… 1 分

因为两次抽奖相互独立，所以中奖次数 X 服从二项分布，即 $X\sim B\left(2,\frac{4}{9}\right)$，…… 2 分

所以 X 的所有可能取值为 0，1，2，则

$P(X=0)=C_2^0\cdot\left(\frac{4}{9}\right)^0\times\left(\frac{5}{9}\right)^2=\frac{25}{81}$，

$P(X=1)=C_2^1\cdot\left(\frac{4}{9}\right)^1\times\left(\frac{5}{9}\right)^1=\frac{40}{81}$,

$P(X=2)=C_2^2\cdot\left(\frac{4}{9}\right)^2\times\left(\frac{5}{9}\right)^0=\frac{16}{81}$,

所以 X 的分布列为

X	0	1	2
P	$\frac{25}{81}$	$\frac{40}{81}$	$\frac{16}{81}$

………………………………………………………………………… 4 分

所以 X 的数学期望为 $E(X)=2\times\frac{4}{9}=\frac{8}{9}$. ………………………… 5 分

(2)若第一次抽奖后不将球放回抽奖箱，直接进行第二次抽奖，中奖次数 Y 的所有可能取值为 0，1，2. ………………………………………… 6 分

则 $P(Y=0)=\frac{C_5^1C_5^1}{C_{10}^2}\cdot\frac{C_4^1C_4^1}{C_8^2}=\frac{20}{63}$,

$P(Y=1)=\frac{C_5^2+C_5^2}{C_{10}^2}\cdot\frac{C_3^1C_5^1}{C_8^2}+\frac{C_5^1C_5^1}{C_{10}^2}\cdot\frac{C_4^2+C_4^2}{C_8^2}=\frac{15}{63}+\frac{15}{63}=\frac{30}{63}=\frac{10}{21}$,

$P(Y=2)=\frac{C_5^2+C_5^2}{C_{10}^2}\cdot\frac{C_3^2+C_5^2}{C_8^2}=\frac{13}{63}$,

所以 Y 的分布列为

Y	0	1	2
P	$\frac{20}{63}$	$\frac{10}{21}$	$\frac{13}{63}$

………………………………………………………………………… 9 分

所以 Y 的数学期望为 $E(Y)=1\times\frac{10}{21}+2\times\frac{13}{63}=\frac{8}{9}$. ………………………… 10 分

(3)(答案不唯一，选择符合商场老板的预期即可)

因为(1)(2)两问的数学期望相等，第(1)问中两次奖的概率比第(2)问的大，即 $\frac{16}{81}<\frac{13}{63}$，第(1)不中奖的概率比第(2)问小，即 $\frac{25}{81}<\frac{20}{63}$，

回答一：若商场老板希望中两次奖的顾客多，产生宣传效应，则选择按第(2)问方式进行抽. ………………………………………… 12 分

回答二：若商场老板希望中奖的顾客多，则选择按第(1)问方式进行抽奖.

………………………………………………………………………… 12 分

21. 解:

(1)当点 A，点 B 和点 C 为椭圆的顶点时，$\triangle ABC$ 恰好构成边长为 2 的等边三角形，

①当点 A，点 B 和点 C 中有两个点为上顶点和下顶点，一个点为左顶点或右顶点时，不妨设点 A，点 B 为上顶点和下顶点，点 C 为右顶点，此时，$a=\sqrt{3}$，$b=1$，
………………………………………………………………………………………… 2 分

②当点 A，点 B 和点 C 中有一个点为上顶点或下顶点，两个点为左顶点和右顶点，不妨设点 A，点 B 为左顶点和右顶点，点 C 为上顶点，此时，$a=1$，$b=\sqrt{3}$(舍去)，
………………………………………………………………………………………… 3 分

所以椭圆的标准方程为 $\frac{x^2}{3}+y^2=1$. ………………………………………… 4 分

(2) 设 $A(p,q)$，$B(x_1,y_1)$，$C(x_2,y_2)$，

因为 $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=0$，所以 $p+x_1+x_2=0$，$q+y_1+y_2=0$，

①当直线 BC 斜率不存在时，即 $x_1=x_2$，$y_1=-y_2$，则 $A(-2x_1,0)$，

因为点 A 在椭圆上，所以 $x_1^2=\frac{3}{4}$，则有 $y_1^2=\frac{3}{4}$，

所以 $|BC|=\sqrt{3}$，点 A 到 BC 的距离为 $|3x_1|=\frac{3\sqrt{3}}{2}$，

此时 $S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}\times\sqrt{3}\times\frac{3\sqrt{3}}{2}=\frac{9}{4}$. ………………………………………… 5 分

②当直线 BC 斜率存在时，设直线 BC 方程为 $y=kx+m$，

联立得 $\begin{cases} y=kx+m, \\ \frac{x^2}{3}+y^2=1, \end{cases}$ 消去 y 整理得 $(1+3k^2)x^2+6kmx+3m^2-3=0$，

满足 $\Delta=(6km)^2-12(1+3k^2)(m^2-1)=12(3k^2+1-m^2)>0$，

由韦达定理得 $x_1+x_2=\frac{-6km}{1+3k^2}$，$x_1x_2=\frac{3(m^2-1)}{1+3k^2}$， ………………………… 6 分

所以 $y_1+y_2=k(x_1+x_2)+2m=\frac{2m}{1+3k^2}$，

所以 $p=-(x_1+x_2)=\frac{6km}{1+3k^2}$，$q=-(y_1+y_2)=-\frac{2m}{1+3k^2}$， ………………………… 7 分

又因为点 $A(p,q)$ 在椭圆 $\frac{x^2}{3}+y^2=1$ 上，所以 $\left(\frac{6km}{1+3k^2}\right)^2+3\left(\frac{-2m}{1+3k^2}\right)^2=3$，

化简得 $4m^2=1+3k^2$， ……………………………………………………………… 8 分

所以 $|BC|=\sqrt{1+k^2}\cdot|x_1-x_2|=\sqrt{1+k^2}\cdot\sqrt{\left(\frac{-6km}{1+3k^2}\right)^2-4\cdot\frac{3(m^2-1)}{1+3k^2}}$

$=\sqrt{1+k^2}\cdot\frac{2\sqrt{3}\cdot\sqrt{3k^2+1-m^2}}{1+3k^2}=\sqrt{1+k^2}\cdot\frac{2\sqrt{3}\cdot\sqrt{4m^2-m^2}}{1+3k^2}$

$=\sqrt{1+k^2}\cdot\frac{6|m|}{1+3k^2}=\sqrt{1+k^2}\cdot\frac{6|m|}{4m^2}=\frac{3\sqrt{1+k^2}}{2|m|}$， ………………………… 10 分

所以点 A 到直线 BC 的距离 $d=\frac{|pk-q+m|}{\sqrt{1+k^2}}=\frac{\left|\frac{6km}{1+3k^2}k+\frac{2m}{1+3k^2}+m\right|}{\sqrt{1+k^2}}=\frac{|3m|}{\sqrt{1+k^2}}$，

…………………………………………………………………………………………………… 11 分

所以 $S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}\cdot|BC|\cdot d=\frac{1}{2}\cdot\frac{3\sqrt{1+k^2}}{2|m|}\cdot\frac{|3m|}{\sqrt{1+k^2}}$

$=\frac{9m^2}{1+3k^2}=\frac{9|m|^2}{4m^2}=\frac{9}{4}$.

综上所述，$\triangle ABC$ 的面积为 $\frac{9}{4}$. ………………………………………………………… 12 分

22. 解：(1) 求导得 $f'(x)=(x+1)e^{x+1}$， ……………………………………………… 1 分

所以当 $f'(x)>0$ 时，$x>-1$；当 $f'(x)<0$ 时，$x<-1$，

所以 $f(x)$ 在 $(-\infty,-1)$ 上单调递减，在 $(-1,+\infty)$ 上单调递增， ………… 3 分

所以 $f(x)$ 有极小值 $f(-1)=-1$，无极大值. ……………………………………… 4 分

(2) **方法一：** 由题知不等式 $xe^{x+1}\geqslant(a+1)x+\ln x+2$ 在 $x\in(0,+\infty)$ 上恒成立，

则原问题等价于不等式 $xe^{x+1}-\ln x-x-2\geqslant ax$ 在 $x\in(0,+\infty)$ 上恒成立，

…………………………………………………………………………………………………… 5 分

记 $g(x)=xe^{x+1}-\ln x-x-2$，则 $g'(x)=(x+1)e^{x+1}-\frac{1}{x}-1=(x+1)\left(e^{x+1}-\frac{1}{x}\right)$，

…………………………………………………………………………………………………… 6 分

记 $h(x)=e^{x+1}-\frac{1}{x}$，则 $h'(x)=e^{x+1}+\frac{1}{x^2}>0$ 恒成立，

所以 $h(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，又 $h\left(\frac{1}{e^2}\right)=e^{1+\frac{1}{e^2}}-e^2<0$，$h(1)=e^2-1>0$，

所以存在 $x_0\in\left(\frac{1}{e^2},1\right)$，使得 $h(x_0)=0$， ……………………………………… 7 分

即当 $x<x_0$ 时，$h(x)<0$，此时 $g'(x)<0$；当 $x>x_0$ 时，$h(x)>0$，此时 $g'(x)>0$，

所以 $g(x)$ 在 $(0,x_0)$ 上单调递减，在 $(x_0,+\infty)$ 上单调递增， ………………… 8 分

由 $h(x_0)=e^{x_0+1}-\frac{1}{x_0}=0$，得 $e^{x_0+1}=\frac{1}{x_0}$，即 $x_0=\frac{1}{e^{x_0+1}}$，$\ln x_0=-x_0-1$，

所以 $g(x)\geqslant g(x_0)=x_0e^{x_0+1}-\ln x_0-x_0-2=x_0\cdot\frac{1}{x_0}+x_0+1-x_0-2=0$， …… 9 分

①当 $a\leqslant0$ 时，

因为 $g(x)=xe^{x+1}-\ln x-x-2\geqslant0$，$ax\leqslant0$，所以不等式恒成立，

所以 $a\leqslant0$； ……………………………………………………………………………… 10 分

②当 $a>0$ 时，

因为存在 $x_0\in\left(\frac{1}{e^2},1\right)$，使得 $g(x_0)=0$，而 $ax_0>0$，此时不满足 $xe^{x+1}-\ln x-x-2$

$\geqslant ax$,

所以 a 无解. …………………………………………………………………… 11 分

综上所述，$a\leqslant 0$. …………………………………………………………………… 12 分

(2)**方法二**：由题知不等式 $xe^{x-1}\geqslant(a+1)x+\ln x+2$ 在 $x\in(0,+\infty)$ 上恒成立，

原问题等价于不等式 $xe^{x+1}-\ln x-x-2\geqslant ax$ 在 $x\in(0,+\infty)$ 上恒成立， …… 5 分

即 $e^{\ln x+x+1}-(\ln x+x+1)-1\geqslant ax$ 在 $x\in(0,+\infty)$ 上恒成立.

记 $g(x)=e^x-x-1$，则 $g'(x)=e^x-1$，当 $x\in(-\infty,0)$，$g'(x)<0$，$g(x)$ 单调递减，$x\in(0,+\infty)$，$g'(x)>0$，$g(x)$ 单调递增，$g(x)\geqslant g(0)=0$

因为 $\ln x+x+1\in\mathbf{R}$，$g(\ln x+x+1)\geqslant 0$ 即 $e^{\ln x+x+1}-(\ln x+x+1)-1\geqslant 0$，

$xe^{x+1}-\ln x-x-2\geqslant 0$ …………………………………………………………………… 9 分

①当 $a\leqslant 0$ 时，

因为 $xe^{x+1}-\ln x-x-2\geqslant 0$，$ax\leqslant 0$，所以不等式恒成立，

所以 $a\leqslant 0$； …………………………………………………………………… 10 分

②当 $a>0$ 时，令 $h(x)=\ln x+x+1$，显然 $h(x)$ 单调递增，且 $h\left(\frac{1}{e^2}\right)=\frac{1}{e^2}-1<0$，

$h(1)=2>0$

故存在 $x_0\in\left(\frac{1}{e^2},1\right)$，使得 $h(x_0)=0$，即 $xe^{x+1}-\ln x-x-2=0$，而 $ax_0>0$，此时不满足 $xe^{x+1}-\ln x-x-2\geqslant ax$，所以 a 无解. …………………………………… 11 分

综上所述，$a\leqslant 0$. …………………………………………………………………… 12 分

关于我们

北京高考在线创办于 2014 年，隶属于北京太星网络科技有限公司，是北京地区极具影响力的中学升学服务平台。主营业务涵盖：北京新高考、高中生涯规划、志愿填报、强基计划、综合评价招生和学科竞赛等。

北京高考在线旗下拥有网站门户、微信公众平台等全媒体矩阵生态平台。平台活跃用户 40W+，网站年度流量数千万量级。用户群体立足于北京，辐射全国 31 省市。

北京高考在线平台一直秉承 ‘’ 精益求精、专业严谨 ‘’ 的建设理念，不断探索“K12 教育+互联网+大数据”的运营模式，尝试基于大数据理论为广大中学和家长提供新鲜的高考资讯、专业的高考政策解读、科学的升学规划等，为广大高校、中学和教科研单位提供“衔接和桥梁纽带”作用。

平台自创办以来，为众多重点大学发现和推荐优秀生源，和北京近百所中学达成合作关系，累计举办线上线下升学公益讲座数百场，帮助数十万考生顺利通过考入理想大学，在家长、考生、中学和社会各界具有广泛的口碑影响力

未来，北京高考在线平台将立足于北京新高考改革，基于对北京高考政策研究及北京高校资源优势，更好的服务全国高中家长和学生。