

绵阳市高中 2021 级第二次诊断性考试

理科数学

注意事项：

- 答卷前，考生务必将自己的姓名、准考证号填写在答题卡上。
- 回答选择题时，选出每小题答案后，用铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其它答案标号。回答非选择题时，将答案写在答题卡上，写在本试卷上无效。
- 考试结束后，将答题卡交回。

一、选择题：本大题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 若 $iz = 1+i$ ，则复数 $z =$

- A. $1-i$ B. $1+i$ C. $-1+i$ D. $-1-i$

2. 已知 $A = \{x | 2^x < 3\}$ ， $B = \{x | x < 2\}$ ，则 $A \cap B =$

- A. $(-\infty, 2)$ B. $(-\infty, \log_2 3)$ C. $(0, \log_2 3)$ D. $(\log_2 3, 2)$

3. 已知 $\mathbf{a} = (1, 0)$ ， $|\mathbf{b}| = 1$ ， $|\mathbf{a} - \mathbf{b}| = \sqrt{3}$ ，则 \mathbf{a} 与 $\mathbf{a} - \mathbf{b}$ 的夹角为

- A. $\frac{\pi}{6}$ B. $\frac{\pi}{3}$ C. $\frac{2\pi}{3}$ D. $\frac{5\pi}{6}$

4. 若变量 x, y 满足不等式组 $\begin{cases} y \geq 0, \\ 2x + y - 2 \leq 0, \\ x - y + 2 \geq 0, \end{cases}$ 则 $x - y$ 的最小值是

- A. 1 B. -1 C. -2 D. -3

5. 已知变量 x, y 之间的线性回归方程为 $\hat{y} = 2x + 1$ ，且变量 x, y 之间的一组相关数据如表所示，

x	2	4	6	8
y	5	8.2	13	m

则下列说法正确的是

- A. $m = 17$ B. 变量 y 与 x 是负相关关系
C. 该回归直线必过点 $(5, 11)$ D. x 增加 1 个单位， y 一定增加 2 个单位

6. $(\sqrt{x} - \frac{1}{x})^5$ 的展开式中, x 的系数为

A. -5

B. -10

C. 5

D. 10

7. 已知 $x > 0, y > 0$, 则 “ $x + y \geq 1$ ” 是 “ $x^2 + y^2 \geq 1$ ” 的

A. 充分不必要条件

B. 必要不充分条件

C. 充分必要条件

D. 既不充分也不必要条件

8. 函数 $y = f(x-1)$ 关于直线 $x=1$ 对称, 且 $f(x)$ 在区间 $(0, +\infty)$ 上单调递增, 则

A. $f(0.2^{-0.3}) > f(-0.5) > f(\log_3 0.5)$

B. $f(-0.5) > f(\log_3 0.5) > f(0.2^{-0.3})$

C. $f(\log_3 0.5) > f(-0.5) > f(0.2^{-0.3})$

D. $f(0.2^{-0.3}) > f(\log_3 0.5) > f(-0.5)$

9. 已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , 且 $S_n = \frac{3^n - 2}{3^n}$, 则下列说法正确的是

A. $a_n < a_{n+1}$

B. $S_n > S_{n+1}$

C. $2a_n + S_n = 1$

D. $0 < a_n \leq \frac{4}{9}$

10. 在平面直角坐标系 xOy 中, 角 α, β 的终边与单位圆的交点分别于 A, B 两点, 且直线

AB 的斜率为 $-\frac{1}{2}$, 则 $\tan(\alpha + \beta) =$

A. $\frac{4}{3}$

B. $\frac{3}{4}$

C. $-\frac{4}{3}$

D. $-\frac{3}{4}$

11. 已知曲线 $y = x^2 - 2mx + m - 1$ 与 x 轴交于不同的两点 A, B , 与 y 轴交于点 C , 则过 $A,$

B, C (A, B, C 均不重合) 三点的圆的半径不可能为

A. $\frac{\sqrt{5}}{5}$

B. $\frac{2\sqrt{5}}{5}$

C. 1

D. 2

12. 设 F_1, F_2 分别为椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的左, 右焦点, 以 F_1 为圆心且过 F_2

的圆与 x 轴交于另一点 P , 与 y 轴交于点 Q , 线段 QF_2 与 C 交于点 A . 已知 $\triangle APF_2$

与 $\triangle QF_1F_2$ 的面积之比为 3:2, 则该椭圆的离心率为

A. $\frac{2}{3}$

B. $\sqrt{13} - 3$

C. $\sqrt{3} - 1$

D. $\frac{\sqrt{3} + 1}{4}$

二、填空题：本大题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。

13. 已知 α 为钝角， $\sin\alpha = \frac{4}{5}$ ，则 $\sin(\alpha + \frac{\pi}{4}) =$ _____.

14. 甲、乙二人用 7 张不同的扑克牌（其中红桃 4 张，方片 3 张）玩游戏。他们将扑克牌洗匀后，背面朝上放在桌面上，甲先抽，乙后抽，抽出的牌不放回，各抽一张。则甲、乙二人抽到花色相同的概率为 _____.

15. 已知 $f(x) = (x+a+b)\ln(1 + \frac{1}{x+b})$ ，若 $f(x)$ 为偶函数，则 $a =$ _____.

16. 已知 $F_1(-c, 0)$ ， $F_2(c, 0)$ 分别是双曲线 $E: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的左、右焦点，过点 F_2 作 E 的渐近线的垂线，垂足为 P . 点 M 在 E 的左支上，当 $PM \parallel x$ 轴时， $|PM| = c$ ，则 E 的渐近线方程为 _____.

三、解答题：共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。第 17~21 题为必考题，每个试题考生都必须作答。第 22、23 题为选考题，考生根据要求作答。

(一) 必考题：共 60 分。

17. (12 分)

已知等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n ，且 $S_5 = 45$ ， $S_6 = 60$ 。

(1) 求 $\{a_n\}$ 的通项公式；

(2) 求数列 $\{\frac{1}{a_n a_{n+1}}\}$ 的前 n 项和 T_n 。

18. (12 分)

绵阳市 37 家 A 级旅游景区，在 2023 年国庆中秋双节期间，接待人数和门票收入大幅增长。绵阳某旅行社随机调查了市区 100 位市民平时外出旅游情况，得到的数据如下表：

(1) 能否有 95% 的把握认为喜欢旅游与性别有关？

(2) 将频率视为概率，从全市男性市民中随机抽取 2 人进行访谈，记这 2 人中喜欢旅游的人数为 ξ ，求 ξ 的分布列与数学期望。

	喜欢旅游	不喜欢旅游	总计
男性	20	30	50
女性	30	20	50
总计	50	50	100

$$\text{附： } K^2 = \frac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$$

$P(K^2 \geq k)$	0.050	0.010	0.001
k	3.841	6.635	10.828

19. (12分)

在 $\triangle ABC$ 中, 内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c , 若 $a(b\cos C - c\cos B) = c^2$.

(1) 求证: $b^2 = 2c^2$;

(2) 若 $\vec{BA} \cdot \vec{BC} = c$, $b\sin A = \sqrt{2}$, 求 b .

20. (12分)

已知直线 $l: y = kx - 2$ 与抛物线 $E: x^2 = 2py (p > 0)$ 交于 A, B 两点, F 为 E 的焦点, 直线 FA, FB 的斜率之和为0.

(1) 求 E 的方程;

(2) 直线 FA, FB 分别交直线 $y = -2$ 于 M, N 两点, 若 $|MN| \geq 16$, 求 k 的取值范围.

21. (12分)

函数 $f(x) = \frac{x^2 + a(x-1)}{e^x}$.

(1) 已知 $f(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上存在零点, 求实数 a 的取值范围;

(2) 若 $f(x)$ 在定义域上是单调函数, x_1, x_2 满足 $f(x_1) + f(x_2) = \frac{2}{e}$, 证明: $x_1 + x_2 \geq 2$.

(二) 选考题: 共10分. 请考生在第22、23题中任选一题作答. 如果多做, 则按所做的第一题记分.

22. [选修4—4: 坐标系与参数方程] (10分)

在平面直角坐标系 xOy 中, 曲线 C 的参数方程为 $\begin{cases} x = 3\sqrt{1-t^2} \\ y = 2t \end{cases}$ (t 为参数), 以坐标原点

O 为极点, 以 x 轴正半轴为极轴, 建立极坐标系.

(1) 求曲线 C 极坐标方程;

(2) 若 A, B 为曲线 C 上的动点, 且 $OA \perp OB$, 求 $\frac{1}{|OA|^2} + \frac{1}{|OB|^2}$ 的值.

23. [选修4—5: 不等式选讲] (10分)

(1) 已知 a, b, x, y 均为正数, 求证: $\frac{(x+y)^2}{ax^2+by^2} \leq \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$, 并指出等号成立的条件;

(2) 利用(1)的结论, 求函数 $f(x) = \frac{4x^2+4x+1}{5x^2+4x+2}$ ($x > 0$) 的最大值, 并指出取最大值

时 x 的值.