2023 北京八中高一（上）期中

数　　学

年级：高一　科目：数学

考试时间 120 分钟.满分 150 分

一、选择题共 10 小题，每小题 4 分，共 40 分.在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项.

1. 已知 $U=\mathbf{R}$，$A=\{x|x^2-4x+3\le 0\}$，$B=\{x||x-3|>1\}$，则 $A\cup \complement_U B=$（　）

A. $\{x|1\le x\le 4\}$　　B. $\{x|2\le x\le 3\}$

C. $\{x|1\le x<2\}$　　D. $\{x|2<x\le 3\}$

2. 设 $f(x)$ 是定义域为 R 的函数，且“$\forall x>0$，$f(x)>0$”为假命题，则下列命题为真的是（　）

A. $\forall x>0$，$f(x)\le 0$　　B. $\exists x\le 0$，$f(x)>0$

C. $\exists x>0$，$f(x)\le 0$　　D. $\forall x\le 0$，$f(x)\le 0$

3. 若函数 $f(x)$ 满足 $f(2x-1)=\frac{1}{x}$，则 $f(3)=$（　）

A. $-\frac{1}{2}$　　B. $\frac{1}{2}$　　C. -1　　D. 1

4. 已知 a,b 都是实数，那么“$a<b<0$”是“$\frac{1}{a}>\frac{1}{b}$”的（　）

A. 充分而不必要条件　　B. 必要而不充分条件

C. 充分必要条件　　D. 既不充分也不必要条件

5. “$|4x-5|<3$”是“$\frac{2x}{x-1}<1$”的（　）

A. 充分而不必要条件　　B. 必要而不充分条件

C. 充分必要条件　　D. 既不充分也不必要条件

6. 已知函数 $f(x)$ 是奇函数，当 $x<0$ 时，$f(x)=-2x^2+x$，则 $f(2)=$

A. -6　　B. 6

C. -10　　D. 10

7. 要制作一个容积为 4 m^3，高为 1 m 的无盖长方体容器．已知该容器的底面造价是每平方米 20 元，侧面造价是每平方米 10 元，则该容器的最低总造价是(　　)

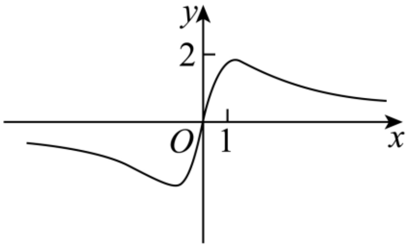
A. 80 元　　B. 120 元

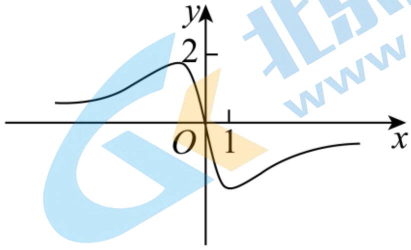
C.160 元　　D. 240 元

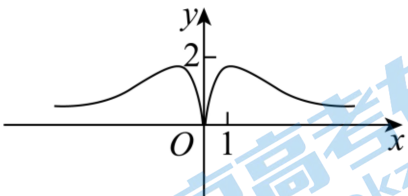
8. 已知函数 $y=-x^2-2x+3$ 在区间 $[a,2]$ 上的最大值为 $\frac{15}{4}$，则 a 等于（　）

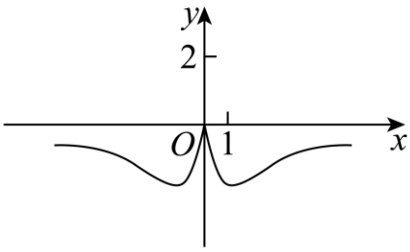
A. $\frac{3}{2}$　　　　B. $\frac{1}{2}$　　　　C. $-\frac{1}{2}$　　　　D. $\frac{1}{2}$或$-\frac{3}{2}$

9. 函数$y=\dfrac{4x}{x^2+1}$的图象大致为（　）

A.


B.


C.


D.


10. 我们把定义域为$[0,+\infty)$且同时满足以下两个条件的函数$f(x)$称为“Ω 函数”：①对任意的$x\in[0,+\infty)$，总有$f(x)\geq 0$；②若$x\geq 0$，$y\geq 0$，则有$f(x+y)\geq f(x)+f(y)$成立，给出下列四个结论：（1）若$f(x)$为“Ω 函数”，则$f(0)=0$；（2）若$f(x)$为“Ω 函数”，则$f(x)$在$[0,+\infty)$上为增函数；（3）函数$g(x)=\begin{cases}0, x\in Q\\1, x\notin Q\end{cases}$在$[0,+\infty)$上是“Ω 函数”（$Q$为有理数集）；（4）函数$g(x)=x^2+x$在$[0,+\infty)$上是“Ω 函数”；其中正确结论的个数是（　）

A. 1　　　　B. 2　　　　C. 3　　　　D. 4

二、填空题，共 5 小题，每小题 5 分，共 25 分.

11. 函数$f(x)=\sqrt{x-1}+\dfrac{1}{x-2}$的定义域为______.

12. 函数$y=2x+\dfrac{1}{x-1}(x>1)$的最小值等于____________.

13. 已知函数$y=f(x)(x\in\mathbf{R})$是偶函数，当$x\geq 0$时，$f(x)=x^2-2x$，若函数$f(x)$在区间$[a,a+2]$上具有单调性，则实数a的取值范围是______.

14. 已知函数$f(x)=\begin{cases}ax+a, x\geq 1\\-ax^2+2ax-a+3, x<1\end{cases}$，若函数$f(x)$的值域为$R$，则实数$a$的取值范围是________________.

15. 定义在区间$[1,+\infty)$上的函数$f(x)$的图象是一条连续不断的曲线，$f(x)$在区间$[2k-1,2k]$上单调递增，在区间$[2k,2k+1]$上单调递减，$k=1,2,\cdots$. 给出下列四个结论：

①若$\{f(2k)\}$为递增数列，则$f(x)$存在最大值；

②若$\{f(2k+1)\}$为递增数列，则$f(x)$存在最小值；

③若 $f(2k)f(2k+1)>0$，且 $f(2k)+f(2k+1)$ 存在最小值，则 $|f(x)|$ 存在最小值；

④若 $f(2k)f(2k+1)<0$，且 $f(2k)-f(2k+1)$ 存在最大值，则 $|f(x)|$ 存在最大值.

其中所有错误结论的序号有______.

三、解答题，共 6 小题，共 85 分.解答应写出文字说明，演算步骤或证明过程.

16. 已知集合 $A=\{x|3-a\le x\le 2+a\}$，$B=\{x|x^2-8x+7\ge 0\}$,全集 $U=\mathbf{R}$.

（1）当 $a=3$ 时,求 $A\cap\left(\complement_U B\right)$；

（2）若 $A\cup B=\mathbf{R}$,求实数 a 的取值范围.

17. 自 2020 新冠疫情爆发以来，直播电商迅猛发展，以信息流为代表的各大社交平台也相继入场，平台用短视频和直播的形式，激发起用户情感与场景的共鸣，让用户在大脑中不知不觉间自我说服，然后引起消费行动.某厂家往年不与直播平台合作时，每年都举行多次大型线下促销活动，经测算，只进行线下促销活动时总促销费用为 24 万元.为响应当地政府防疫政策，决定采用线上（直播促销）线下同时进行的促销模式，与某直播平台达成一个为期 4 年的合作协议，直播费用（单位：万元）只与 4 年的总直播时长 x（单位：小时）成正比，比例系数为 0.12.已知与直播平台合作后该厂家每年所需的线下促销费 C（单位：万元）与总直播时长 x（单位：小时）之间的关系为 $C=\dfrac{k}{x+50}$（$x\geqslant 0$，k 为常数）.记该厂家线上促销费用与 4 年线下促销费用之和为 y（单位：万元）.

（1）写出 y 关于 x 的函数关系式；

（2）该厂家直播时长 x 为多少时，可使 y 最小？并求出 y 的最小值.

18. 已知函数 $f(x)=mx^2-(m-2)x+m-2$.

（1）若不等式 $f(x)<1$ 的解集为R，求 m 的取值范围；

（2）解关于 x 的不等式 $f(x)\ge mx$；

19. 已知函数 $f(x)=\dfrac{ax+b}{1+x^2}$ 是定义在 $(-1,1)$ 上的奇函数，且 $f\left(\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{2}{5}$.

（1）确定函数 $f(x)$ 的解析式；

（2）用定义证明 $f(x)$ 在 $(-1,1)$ 上是增函数；

（3）解不等式：$f(t-1)+f(t)<0$.

20. 已知函数 $f(x)=x^2-2ax+5$.

（1）若 $f(x)$ 的定义域和值域均是 $[1，a]$，求实数 a 的值；

（2）若 $a\le 1$，求函数 $y=|f(x)|$ 在 $[0，1]$ 上的最大值.

21. 设函数 $f(x)=\begin{cases}x, x\in P\\ -x, x\in M\end{cases}$ 其中 P，M 是非空数集．记 $f(P)=\{y|y=f(x)，x\in P\}$，$f(M)=\{y|y=f(x)，x\in M\}$.

（I）若 $P=[0,3]$，$M=(-\infty,-1)$，求 $f(P)\cup f(M)$；

（II）若 $P\cap M=\varnothing$，且 $f(x)$是定义在 $\mathbf{R}$ 上的增函数，求集合 P，M；

（III）判断命题"若 $P\cup M\neq R$，则 $f(P)\cup f(M)\neq R$"的真假，并加以证明．

参考答案

一、选择题共 10 小题，每小题 4 分，共 40 分.在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项.

1.【答案】A

【分析】先化简集合 A，B，再利用集合的补集和并集运算求解.

【详解】解：因为 $A=\{x|1\le x\le 3\}$， $B=\{x|x\rangle 4 \text{ 或 } x<2\}$，

所以 $\complement_U B=\{x|2\le x\le 4\}$， $A\cup(\complement_U B)=\{x|1\le x\le 4\}$，

故选：A.

2.【答案】C

【分析】根据含有一个量词的命题的真假关系即可求解.

【详解】因为命题“$\forall x>0, f(x)>0$”为假命题，

所以命题“$\exists x>0, f(x)\le 0$”为真命题，

故选：C.

3.【答案】B

【分析】利用换元法可得函数 $f(x)=\dfrac{2}{x+1}, x\ne -1$，代入即可得解.

【详解】令 $t=2x-1,(x\ne 0)$，则 $t\ne -1$， $x=\dfrac{t+1}{2}$，

所以 $f(t)=\dfrac{2}{t+1}, t\ne -1$，即 $f(x)=\dfrac{2}{x+1}, x\ne -1$，

所以 $f(3)=\dfrac{2}{3+1}=\dfrac{1}{2}$.

故选：B.

【点睛】本题考查了换元法求函数解析式的应用，考查了函数值的求解，属于基础题.

4.【答案】A

【分析】根据不等式的基本性质，结合充分条件、必要条件的判定方法，即可求解.

【详解】由 $\dfrac{1}{a}-\dfrac{1}{b}=\dfrac{b-a}{ab}$，因为 $a<b<0$，可得 $b-a>0, ab>0$，所以 $\dfrac{1}{a}-\dfrac{1}{b}>0$，

所以 $\dfrac{1}{a}>\dfrac{1}{b}$ 成立，即充分性成立；

反之：例如：当 $a=2, b=3$ 时，满足 $\dfrac{1}{a}>\dfrac{1}{b}$，此时 $b>a>0$，即必要性不成立，

所以 $a<b<0$ 是 $\dfrac{1}{a}>\dfrac{1}{b}$ 的充分不必要条件.

故选：A.

5. 【答案】D

【分析】根据绝对值的定义和分式不等式的解法，求得不等式的解集，结合充分条件、必要条件的判定方法，即可求解.

【详解】由不等式$|4x-5|<3$，可得$-3<4x-5<3$，解得$\frac{1}{2}<x<2$，

又由$\frac{2x}{x-1}<1$，可得$\frac{2x}{x-1}-1=\frac{x+1}{x-1}<0$，解得$-1<x<1$，

两个不等式的解集没有包含关系，

所以$|4x-5|<3$是$\frac{2x}{x-1}<1$的既不充分也不必要条件.

故选：D.

6. 【答案】D

【分析】

先求$f(-2)$，再利用奇函数的性质，$f(2)=-f(-2)$求值.

【详解】$\because f(-2)=-2\cdot(-2)^2+(-2)=-10$

$\because f(x)$是奇函数，满足$f(-x)=-f(x)$，

即$f(2)=-f(-2)=10$.

故选：D

【点睛】本题考查利用奇偶性求函数值，重点考查函数性质的应用，属于简单题型.

7. 【答案】C

【详解】设长方体底面边长分别为x,y，则$y=\frac{4}{x}$，

所以容器总造价为$z=2(x+y)\times10+20xy=20(x+\frac{4}{x})+80$，

由基本不等式得，$z=20(x+\frac{4}{x})+80\geq160$，

当且仅当底面为边长为2的正方形时，总造价最低，选C.

考点：函数的应用，基本不等式的应用.

8. 【答案】C

【分析】求得函数$f(x)$的对称轴，对a分类讨论，结合二次函数的性质，即可求解.

【详解】由函数$f(x)=-x^2-2x+3=-(x+1)^2+4$，对称轴的方程为$x=-1$，

当$a\leq-1$时，则$x=-1$时，函数$f(x)$取得最大值4，不满足题意；

当$-1<a\le 2$时，可函数$f\left(x\right)$在区间$\left[a,2\right]$上单调递减，

所以当$x=a$时，函数$f\left(x\right)$取得最大值，最大值为$f\left(a\right)=-a^2-2a+3=\dfrac{15}{4}$，

解得$a=-\dfrac{1}{2}$或$a=-\dfrac{3}{2}$（舍去）.

故选：C.

9.【答案】A

【分析】由题意首先确定函数的奇偶性，然后考查函数在特殊点的函数值排除错误选项即可确定函数的图象.

【详解】由函数的解析式可得：$f\left(-x\right)=\dfrac{-4x}{x^2+1}=-f\left(x\right)$，则函数$f\left(x\right)$为奇函数，其图象关于坐标原点对称，选项CD错误；

当$x=1$时，$y=\dfrac{4}{1+1}=2>0$，选项B错误.

故选：A.

【点睛】函数图象的识辨可从以下方面入手：(1)从函数的定义域，判断图象的左右位置；从函数的值域，判断图象的上下位置．(2)从函数的单调性，判断图象的变化趋势．(3)从函数的奇偶性，判断图象的对称性．(4)从函数的特征点，排除不合要求的图象．利用上述方法排除、筛选选项．

10.【答案】B

【分析】

利用“Ω函数”的定义依次判断即可，必须同时满足“Ω函数”的两个条件，才是“Ω函数”.

【详解】解：对（1），由①得$f\left(0\right)\ge 0$，

在②中令$x=y=0$，

即$f\left(0\right)=2f\left(0\right)$，

解得：$f\left(0\right)\le 0$，

$\therefore f\left(0\right)=0$，故（1）正确；

对（2），当$f\left(x\right)=0$时，满足①②，但在$\left[0,+\infty\right)$不是增函数，故（2）错误；

对（3），当x，y都为正无理数时，不满足②，故（3）错误；

对（4），$\because g\left(x\right)=x^2+x$，

当$x\in\left[0,+\infty\right)$时，$g(x)_{\min}=g(0)=0\ge 0$，

即满足条件①，

$g(x+y)-g(x)-g(y)=(x+y)^2+x+y-x^2-x-y^2-y=2xy\ge 0$，

即满足条件②，

$\therefore$ 函数 $g(x)=x^2+x$ 在 $[0,+\infty)$ 上是"Ω 函数"，故（4）正确.

故选：B.

【点睛】关键点点睛：本题解题的关键是理解"Ω 函数"的定义，必须同时满足"Ω 函数"的两个条件，才是"Ω 函数".

二、填空题，共 5 小题，每小题 5 分，共 25 分.

11. 【答案】$[1,2)\cup(2,+\infty)$

【分析】根据函数的解析式，列不等式求函数的定义域.

【详解】函数的定义域需满足 $\begin{cases}x-1\geq 0\\ x-2\neq 0\end{cases}$，解得：$x\geq 1$ 且 $x\neq 2$，

所以函数的定义域是 $[1,2)\cup(2,+\infty)$.

故答案为：$[1,2)\cup(2,+\infty)$

12. 【答案】$2\sqrt{2}+2$

【分析】利用基本不等式求解.

【详解】因为 $x>1$，

所以 $y=2x+\dfrac{1}{x-1}=2(x-1)+\dfrac{1}{x-1}+2\geq 2\sqrt{2(x-1)\cdot\dfrac{1}{x-1}}+2=2\sqrt{2}+2$，

当且仅当 $2(x-1)=\dfrac{1}{x-1}$，即 $x=1+\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ 时，等号成立，

所以函数 $y=2x+\dfrac{1}{x-1}(x>1)$ 的最小值是 $2\sqrt{2}+2$.

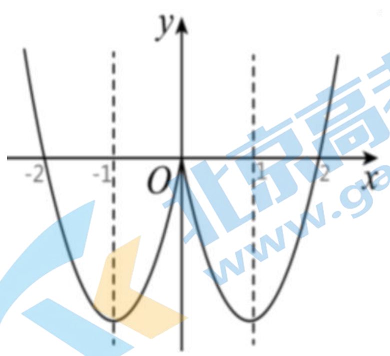
故答案为：$2\sqrt{2}+2$

13. 【答案】$(-\infty,-3]\cup[1,+\infty)$

【分析】先根据奇偶性求函数解析式，进而结合图象即可求解.

【详解】）设 $x<0$，则 $-x>0$，则 $f(-x)=x^2+2x$，因为 $f(x)$ 为偶函数，

所以 $f(x)=f(-x)=x^2+2x$，所以 $f(x)=\begin{cases}x^2+2x, x<0\\ x^2-2x, x\geq 0\end{cases}$，作出 $f(x)$ 的图象如图：



因为函数 $f(x)$ 在区间 $[a,a+2]$ 上具有单调性，

由图可得 $a+2\le -1$ 或 $a\ge 1$，解得 $a\le -3$ 或 $a\ge 1$，

所以实数 a 的取值范围是 $(-\infty,-3]\cup[1,+\infty)$.

故答案为：$(-\infty,-3]\cup[1,+\infty)$.

14.【答案】$\left(0,\dfrac{3}{2}\right]$

【分析】分 $a=0$，$a<0$ 和 $a>0$ 三种情况，再根据一次函数和二次函数的性质分析值域即可

【详解】根据题意，函数 $f(x)=\begin{cases} ax+a, x\ge 1 \\ -ax^2+2ax-a+3, x<1 \end{cases}$，分三种情况讨论：

①若 $a=0$，$f(x)=\begin{cases} 0, x\ge 1 \\ 3, x<1 \end{cases}$，其值域为 $\{0,3\}$，不符合题意；

②若 $a<0$，当 $x\ge 1$ 时，$f(x)=ax+a$，有最大值 $2a$；

当 $x<1$ 时，$f(x)=-ax^2+2ax-a+3=-a(x-1)^2+3>3$，

若函数 $f(x)$ 的值域为 R，则必有 $2a\ge 3$，即 $a\ge\dfrac{3}{2}$，不符合题意；

③若 $a>0$，当 $x\ge 1$ 时，$f(x)=ax+a$，有最小值 $2a$；

当 $x<1$ 时，$f(x)=-ax^2+2ax-a+3=-a(x-1)^2+3<3$，

若函数 $f(x)$ 的值域为 R，则必有 $2a\leqslant 3$，即 $a\le\dfrac{3}{2}$，故有 $0<a\le\dfrac{3}{2}$，即 a 的范围为 $\left(0,\dfrac{3}{2}\right]$

故答案为：$\left(0,\dfrac{3}{2}\right]$

【点睛】对于题中包含参数的一二次函数，求解关于值域的问题，需要分类讨论，根据一次函数的单调性、二次函数的二次项系数进行讨论，属于中档题

15.【答案】①③④

【分析】结合函数的单调性判断最值，即可判断①②，利用取反例，判断③④.

【详解】①由条件可知，函数 $f(x)$ 在区间 $[2k-1,2k]$ 上单调递增，在区间 $[2k,2k+1]$ 上单调递减，$k=1,2,\cdots$.

那么在区间 $[2k-1,2k+1]$，函数的最大值是 $f(2k)$，若数列 $\{f(2k)\}$ 为递增数列，

则函数 $f(x)$ 不存在最大值，故①错误；

②由条件可知，函数 $f(x)$ 在区间 $[2k-1,2k]$ 上单调递增，在区间 $[2k,2k+1]$ 上单调递减，

若 $\{f(2k+1)\}$ 为递增数列，那么在区间 $[2k-1,2k+1]$ 的最小值是 $f(2k-1)$，且 $\{f(2k+1)\}$ 为递增数列，

所以函数 $f(x)$ 在区间 $[1,+\infty)$ 的最小值是 $f(1)$，故②正确；

③若 $f(2k)f(2k+1)>0$，取 $\begin{cases} f(2k)=2k-\dfrac{1}{k} \\ f(2k+1)=\dfrac{1}{k} \end{cases}, k\in \mathrm{N}^*$，

则 $f(2k)+f(2k+1)=2k$，存在最小值，但此时 $|f(x)|$ 的最小值是 $|f(2k+1)|=\dfrac{1}{k}$ 的最小值，

函数单调递减，无最小值，故③错误；

④若 $f(2k)f(2k+1)<0$，取 $\begin{cases} f(2k)=2-\dfrac{1}{2^k} \\ f(2k+1)=-\dfrac{1}{2^k} \end{cases}$，则 $f(2k)-f(2k+1)=2$ 恒成立，

则 $f(2k)-f(2k+1)$ 有最大值，但 $|f(x)|$ 的最大值是 $|f(2k)|=2-\dfrac{1}{2^k}$ 的最大值，函数单调递增，无最大值，

故④错误.

故答案为：①③④

三、解答题，共 6 小题，共 85 分.解答应写出文字说明，演算步骤或证明过程.

16. 【答案】（1）$(1,5]$；

（2）$a\ge 5$.

【分析】（1）先解不等式得 B，再利用补集、交集的定义求解作答.

（2）利用给定条件可得 $(\complement_U B)\subseteq A$，再利用集合的包含关系求出实数 a 的取值范围.

【小问 1 详解】

依题意，$B=\{x\,|\,x^2-8x+7\ge 0\}=(-\infty,1]\cup[7,+\infty)$，则 $\complement_U B=(1,7)$，当 $a=3$ 时，$A=[0,5]$，

所以 $A\cap(\complement_U B)=[0,5]\cap(1,7)=(1,5]$

【小问 2 详解】

因 $A\cup B=\mathbf{R}$，则有 $(\complement_U B)\subseteq A$，由（1）知 $\complement_U B=(1,7)$，$\begin{cases} 3-a\le 1 \\ 2+a\ge 7 \end{cases}$，解得 $a\ge 5$，

所以实数 a 的取值范围是 $a\ge 5$.

17. 【答案】（1）$y=\dfrac{4800}{x+50}+\dfrac{3x}{25}(x\geqslant 0)$

（2）线上直播 x=150 小时可使 y 最小为 42 万元

【分析】（1）通过 $x=0$ 求出系数 k，即可得结果；

（2）直接根据基本不等式即可得结果

【小问 1 详解】

由题得，当 $x=0$ 时，$C=\dfrac{k}{50}=24$，则 $k=1200$，

故该厂家 4 年促销费用与线上直播费用之和为 $y=4\times\dfrac{1200}{x+50}+0.12x=\dfrac{4800}{x+50}+\dfrac{3x}{25}(x\geqslant 0)$

【小问 2 详解】

由（1）知 $y=\dfrac{4800}{x+50}+\dfrac{3}{25}(x+50)-6\geq 2\sqrt{\dfrac{4800}{x+50}\times\dfrac{3}{25}(x+50)}-6=42$，

当且仅当 $\dfrac{4800}{x+50}=\dfrac{3}{25}(x+50)$，即 $x=150$ 时等号成立，

即线上直播 150 小时可使 y 最小为 42 万元.

18. 【答案】（1）$\left(-\infty,\dfrac{4-2\sqrt{7}}{3}\right)$

（2）答案详见解析

【分析】（1）对 m 进行分类讨论，根据一元二次不等式恒成立列不等式来求得 m 的取值范围.

（2）化简 $f(x)\geq mx$，对 m 进行分类讨论，根据一元二次不等式的知识求得正确答案.

【小问 1 详解】

$f(x)<1$ 的解集为 R，

即 $mx^2-(m-2)x+m-3<0$ 在 R 上恒成立，

当 $m=0$ 时，$2x-3<0$ 不恒成立，

当 $m\neq 0$ 时，需满足 $m<0$ 且一元二次方程 $mx^2-(m-2)x+m-3=0$ 无实根，

则有 $\begin{cases} m<0 \\ \Delta=(m-2)^2-4m(m-3)<0 \end{cases}$，

即 $\begin{cases} m<0 \\ 3m^2-8m-4>0 \end{cases}$，解得 $m<\dfrac{4-2\sqrt{7}}{3}$.

综上，m 的取值范围为 $\left(-\infty,\dfrac{4-2\sqrt{7}}{3}\right)$.

【小问 2 详解】

$f(x)\geq mx$，即 $mx^2-(2m-2)x+m-2\geq 0$，

即 $[mx-(m-2)](x-1)\geq 0$，

①当 $m=0$ 时，解集为 $\{x|\ x\geq 1\}$；

②当 $m>0$ 时，$\left(x-\dfrac{m-2}{m}\right)(x-1)\geq 0$，

$\because \dfrac{m-2}{m}=1-\dfrac{2}{m}<1$，

$\therefore$解集为$\left\{x\mid m\geq 1\text{或}x\leq \dfrac{m-2}{m}\right\}$；

③当$m<0$时，$\left(x-\dfrac{m-2}{m}\right)(x-1)\leq 0$，

$\because \dfrac{m-2}{m}=1-\dfrac{2}{m}>1$，

$\therefore$解集为$\left\{x\middle|1\leq x\leq \dfrac{m-2}{m}\right\}$.

19.【答案】（1）$f(x)=\dfrac{x}{1+x^2}$

（2）证明见解析　（3）$\left\{t\middle|0<t<\dfrac{1}{2}\right\}$

【分析】（1）由$\begin{cases}f(0)=0\\ f\left(\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{2}{5}\end{cases}$解出$a,b$，可确定函数$f(x)$的解析式；

（2）用定义证明函数的单调性；

（3）利用奇偶性和单调性解不等式.

【小问1详解】

由题意，得$\begin{cases}f(0)=b=0\\ f\left(\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{\dfrac{a}{2}+b}{1+\dfrac{1}{4}}=\dfrac{2}{5}\end{cases}$，

$\therefore \begin{cases}a=1\\ b=0\end{cases}$（经检验符合题意），故$f(x)=\dfrac{x}{1+x^2}$.

【小问2详解】

证明　任取$x_1,x_2\in(-1,1)$，且$x_1<x_2$，

则$f(x_1)-f(x_2)=\dfrac{x_1}{1+x_1^2}-\dfrac{x_2}{1+x_2^2}=\dfrac{(x_1-x_2)(1-x_1x_2)}{(1+x_1^2)(1+x_2^2)}$.

$\because -1<x_1<x_2<1$，$\therefore x_1-x_2<0$，$1+x_1^2>0$，$1+x_2^2>0$.

又$-1<x_1x_2<1$，$\therefore 1-x_1x_2>0$．$\therefore \dfrac{(x_1-x_2)(1-x_1x_2)}{(1+x_1^2)(1+x_2^2)}<0$，即$f(x_1)<f(x_2)$，

$\therefore f(x)$在$(-1,1)$上是增函数.

【小问 3 详解】

由（2）知 $f(x)$ 在 $(-1,1)$ 上是增函数，又 $f(x)$ 在 $(-1,1)$ 上为奇函数，

$f(t-1)+f(t)<0$，$\therefore f(t-1)<-f(t)=f(-t)$，$\therefore \begin{cases}-1<-t<1\\-1<t-1<1\\t-1<-t\end{cases}$，

解得 $0<t<\dfrac{1}{2}$． $\therefore$不等式的解集为 $\left\{t\middle|0<t<\dfrac{1}{2}\right\}$．

20.【答案】(1) $a=2$．(2) $y_{max}=\begin{cases}6-2a,\ a<\dfrac{1}{2}\\5,\dfrac{1}{2}\le a\le 1\end{cases}$．

【分析】(1) 利用二次函数的图象，求出二次函数的最值，列出不等式组，即可解出 a 的值．

(2) 对对称轴的位置分类讨论，结合二次函数的图象，求出函数的最大值．

【详解】(1) 函数 $f(x)=x^2-2ax+5=(x-a)^2+5-a^2$，且 $a>1$，

$\therefore f(x)$ 在 $[1,a]$ 上是减函数，又定义域和值域均是 $[1,a]$，

$\therefore \begin{cases}f(1)=a\\f(a)=1\end{cases}$，即 $\begin{cases}1-2a+5=a\\a^2-2a^2+5=1\end{cases}$，解得 $a=2$．

(2) ①当 $a\le 0$ 时，函数 $y=|f(x)|$ 在 $[0,1]$ 上单调递增，

故 $y_{max}=f(1)=6-2a$，

②当 $0<a\le 1$ 时，此时 $\triangle=4a^2-5<0$，且 $f(x)$ 图象开口向上，对称轴在 $(0,1)$ 内，

故 $y_{max}=\max\{f(0),f(1)\}=\max\{5,6-2a\}=\begin{cases}6-2a,0<a<\dfrac{1}{2}\\5,\dfrac{1}{2}\le a\le 1\end{cases}$，

综上所求：$y_{max}=\begin{cases}6-2a,\ a<\dfrac{1}{2}\\5,\dfrac{1}{2}\le a\le 1\end{cases}$．

【点睛】本题考查了二次函数的图象和性质，考查了利用二次函数图象求最值的方法，考查分类讨论思想，是中档题．

21.【答案】(I) $[0,+\infty)$；(II) $P=(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$，$M=\{0\}$；(III) 真命题，证明见解析

【分析】

(I)求出 $f(P)=[0,3]$，$f(M)=(1,+\infty)$，由此能过求出 $f(P)\cup f(M)$．

(II)由 $f(x)$ 是定义在 $\boldsymbol{R}$ 上的增函数，且 $f(0)=0$，得到当 $x<0$ 时，$f(x)<0$，$(-\infty,0)\subseteq P$． 同理可证 $(0,+\infty)\subseteq P$． 由此能求出 P，M．

(III)假设存在非空数集 P，M，且 $P\cup M\neq R$，但 $f(P)\cup f(M)=R$．证明 $0\in P\cup M$．推导出 $f(-x_0)=-x_0$，且

$f(-x_0)=-(-x_0)=x_0$，由此能证明命题"若 $P\cup M\neq R$，则 $f(P)\cup f(M)\neq R$"是真命题．

【详解】(I)因为 $P=[0,3]$，$M=(-\infty,-1)$，

所以 $f(P)=[0,3]$，$f(M)=(1,+\infty)$，

所以 $f(P)\cup f(M)=[0,+\infty)$．

(II)因为 $f(x)$是定义在 $\boldsymbol{R}$ 上的增函数，且 $f(0)=0$，

所以当 $x<0$ 时，$f(x)<0$，

所以$(-\infty,0)\subseteq P$． 同理可证$(0,+\infty)\subseteq P$．

因为 $P\cap M=\varnothing$，

所以 $P=(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$，$M=\{0\}$．

(III)该命题为真命题．证明如下：

假设存在非空数集 P，M，且 $P\cup M\neq R$，但 $f(P)\cup f(M)=R$．

首先证明 $0\in P\cup M$．否则，若 $0\notin P\cup M$，则 $0\notin P$，且 $0\notin M$，

则 $0\notin f(P)$，且 $0\notin f(M)$，

即 $0\notin f(P)\cup f(M)$，这与 $f(P)\cup f(M)=R$ 矛盾．

若$\exists x_0\notin P\cup M$，且 $x_0\neq 0$，则 $x_0\notin P$，且 $x_0\notin M$，

所以 $x_0\notin f(P)$，且 $-x_0\notin f(M)$．

因为 $f(P)\cup f(M)=R$，

所以 $-x_0\in f(P)$，且 $x_0\in f(M)$．

所以 $-x_0\in P$，且 $-x_0\in M$．

所以 $f(-x_0)=-x_0$，且 $f(-x_0)=-(-x_0)=x_0$，

根据函数的定义，必有 $-x_0=x_0$，即 $x_0=0$，这与 $x_0\neq 0$ 矛盾．

综上，该命题为真命题．

【点睛】本题考查函数新定义问题，考查学生的创新意识，考查命题真假的判断与证明，考查并集定义等基础知识，考查运算求解能力，是中档题．

北京高一高二高三期中试题下载

京考一点通团队整理了【**2023 年 10-11 月北京各区各年级期中试题&答案汇总**】专题，及时更新最新试题及答案。

通过【**京考一点通**】公众号，对话框回复【**期中**】或者点击公众号底部栏目<**试题专区**>，进入各年级汇总专题，查看并下载电子版试题及答案！