学校________ 班级________ 姓名________ 准考证号________ 考场号________ 座位号________

密封线内不要答题

2023届“皖南八校”高三第二次大联考

数　　学

考生注意：

1. 本试卷分选择题和非选择题两部分。满分150分，考试时间120分钟。
2. 考生作答时，请将答案答在答题卡上。选择题每小题选出答案后，用2B铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑；非选择题请用直径0.5毫米黑色墨水签字笔在答题卡上各题的答题区域内作答，**超出答题区域书写的答案无效，在试题卷、草稿纸上作答无效。**
3. 本卷命题范围：高考范围。

一、选择题：本题共8小题，每小题5分，共40分．在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的．

1. 已知集合 $A=\{-1,0,1,2,3\}$，$B=\{x|(x-2)^2\leqslant 1,x\in\mathbf{R}\}$，则 $A\cap B=$

A. $\{1,2\}$　　B. $\{0,1,2,3\}$　　C. $\{1,2,3\}$　　D. $\{2\}$

2. 若复数 z 满足 $|z-\mathrm{i}|=\bar{z}\mathrm{i}$（i为虚数单位），则 $z=$

A. $-\frac{1}{2}$　　B. $\frac{1}{2}$　　C. $-\frac{1}{2}\mathrm{i}$　　D. $\frac{1}{2}\mathrm{i}$

3. 已知单位向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 满足 $|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=\sqrt{3}$，则 $\boldsymbol{a}$ 在 $\boldsymbol{b}$ 上的投影向量为

A. $\boldsymbol{a}$　　B. $\frac{1}{2}\boldsymbol{a}$　　C. $\frac{1}{2}\boldsymbol{b}$　　D. $\boldsymbol{b}$

4. 已知双曲线 $E:\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 以正方形 $ABCD$ 的两个顶点为焦点，且经过该正方形的另两个顶点，则双曲线 E 的离心率为

A. $\sqrt{2}+1$　　B. $\sqrt{2}-1$　　C. $2\sqrt{2}+2$　　D. $2\sqrt{2}-2$

5. 在三棱锥 $P-ABC$ 中，$PA\perp AB$，$PA=12$，$AB=16$，$PC=10\sqrt{2}$，$\angle PBC=45^\circ$，则三棱锥 $P-ABC$ 外接球的体积为

A. $\frac{4000\pi}{3}$　　B. 400π　　C. 169π　　D. $\frac{169\pi}{3}$

6. 已知圆 C 的方程为 $x^2+y^2-6x+8=0$，若直线 $y=kx+2$ 上至少存在一点，使得以该点为圆心，1为半径的圆与圆 C 有公共点，则实数 k 的最小值是

A. $-\frac{3}{5}$　　B. $-\frac{4}{5}$　　C. $-\frac{6}{5}$　　D. $-\frac{12}{5}$

7. 为落实疫情防控“动态清零”总方针和“四早”要求，有效应对奥密克戎变异株传播风险，确保正常生活和生产秩序，某企业决定于每周的周二、周五各做一次抽检核酸检测．已知该企业组装车间的某小组有6名工人，每次独立、随机的从中抽取3名工人参加核酸检测．设该小组在一周内的两次抽检中共有 ξ 名不同的工人被抽中，下列结论不正确的是

A. 该小组中的工人甲一周内被选中两次的概率为$\frac{1}{4}$

B. $P(\xi=3)<P(\xi=6)$

C. 该小组中的工人甲一周内至少被选中一次的概率为$\frac{3}{4}$

D. $P(\xi=4)=P(\xi=5)$

8. 已知 $f(x)=-x^2-\cos x$，若 $a=f(e^{-\frac{7}{8}})$，$b=f\left(\ln\frac{8}{9}\right)$，$c=f\left(-\frac{1}{8}\right)$，则 a,b,c 大小关系为

A. $c<b<a$　　B. $a<c<b$　　C. $b<c<a$　　D. $c<a<b$

二、选择题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分. 在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求. 全部选对的得 5 分，部分选对的得 2 分，有选错的得 0 分.

9. 随着时代与科技的发展，信号处理以各种方式被广泛应用于医学、声学、密码学、计算机科学、量子力学等各个领域. 而信号处理背后的"功臣"就是正弦型函数，$f(x)=\sum\limits_{i=1}^{4}\frac{\sin[(2i-1)x]}{2i-1}$ 的图象就可以近似的模拟某种信号的波形，则下列说法正确的是

A. 函数 $f(x)$ 的图象关于直线 $x=\frac{\pi}{2}$ 对称

B. 函数 $f(x)$ 的图象关于点 $(0,0)$ 对称

C. 函数 $f(x)$ 为周期函数，且最小正周期为 π

D. 函数 $f(x)$ 的导函数 $f'(x)$ 的最大值为 4

10. 已知抛物线 $C:x^2=2py(p>0)$ 的焦点 F 到准线的距离为 4，过 F 的直线与抛物线交于 A,B 两点，M 为线段 AB 的中点，则下列结论正确的是

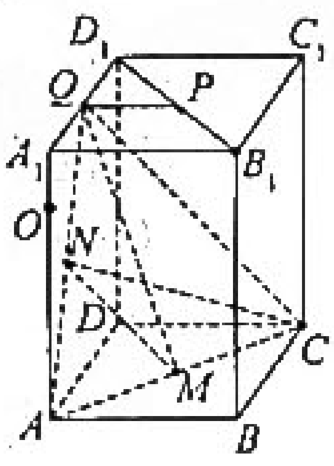
A. 抛物线 C 的准线方程为 $y=-2$

B. 当 $3\overrightarrow{AF}=\overrightarrow{FB}$，则直线 AB 的倾斜角为 $30°$

C. 若 $|AB|=16$，则点 M 到 x 轴的距离为 8

D. $4|AF|+|BF|\geq 18$

11. 在底面边长为 2、高为 4 的正四棱柱 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，O 为棱 A_1A 上一点，且 $A_1O=\frac{1}{4}A_1A$，P、Q 分别为线段 B_1D_1、A_1D_1 上的动点，M 为底面 $ABCD$ 的中心，N 为线段 AQ 的中点，则下列命题正确的是



A. CN 与 QM 共面

B. 三棱锥 $A-DMN$ 的体积为$\frac{4}{3}$

C. $PQ+QO$ 的最小值为$\frac{3\sqrt{2}}{2}$

D. 当$\overrightarrow{D_1Q}=\frac{1}{3}\overrightarrow{D_1A_1}$时，过 A,Q,M 三点的平面截正四棱柱所得截面的周长为$\frac{8(\sqrt{2}+\sqrt{10})}{3}$

12. 已知 $f(x)$，$g(x)$ 都是定义在 R 上的函数，对任意 x,y 满足 $f(x-y)=f(x)g(y)-g(x)f(y)$，且 $f(-2)=f(1)\neq 0$，则下列说法正确的有

A. $g(0)=1$　　B. 函数 $f(2x-1)$ 的图象关于点 $\left(\frac{1}{2},0\right)$ 对称

C. $g(1)+g(-1)=1$　　D. 若 $f(1)=\frac{\sqrt{3}}{2}$，则 $\sum\limits_{n=1}^{2023}f(n)=\frac{\sqrt{3}}{2}$

三、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分.

13. 国庆节前夕，某市举办以“红心颂党恩、喜迎二十大”为主题的青少年学生演讲比赛，其中 10 人比赛的成绩从低到高依次为：85，86，88，88，89，90，92，93，94，98（单位：分），则这 10 人成绩的第 75 百分位数是________.

14. 在 $\left(x-\frac{1}{x}+y\right)^{11}$ 的展开式中，xy^8 的系数为________.

15. 已知 $\alpha,\beta\in(0,\pi)$，$\tan\left(\alpha+\frac{\pi}{3}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}$，$\cos\left(\beta+\frac{\pi}{6}\right)=\frac{\sqrt{6}}{3}$，则 $\cos(2\alpha-\beta)=$________.

16. 已知 $a<0$，不等式 $x^{a+1}\cdot e^x+a\ln x\geqslant 0$ 对任意的实数 $x>1$ 恒成立，则实数 a 的最小值是________.

四、解答题：本题共 6 小题，共 70 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

17.（10 分）

已知数列 $\{a_n\}$ 的首项 $a_1=\frac{1}{2}$，且满足 $a_{n+1}=\frac{a_n}{2a_n+3}$（$n\in\mathbf{N}^*$）.

(1)求证：数列 $\left\{\frac{1}{a_n}+1\right\}$ 为等比数列；

(2)若 $\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\frac{1}{a_3}+\cdots+\frac{1}{a_n}<121$，求满足条件的最大整数 n.

18.（12 分）

近年来，我国大学生毕业人数呈逐年上升趋势，各省市出台优惠政策鼓励高校毕业生自主创业，以创业带动就业. 某市统计了该市其中四所大学 2021 年的毕业生人数及自主创业人数（单位：千人），得到如下表格：

大学	A 大学	B 大学	C 大学	D 大学
当年毕业人数 x（千人）	3	4	5	6
自主创业人数 y（千人）	0.1	0.2	0.4	0.5

(1)已知 y 与 x 具有较强的线性相关关系，求 y 关于 x 的线性回归方程 $\hat{y}=\hat{a}+\hat{b}x$；

(2)假设该市政府对选择自主创业的大学生每人发放 1 万元的创业补贴.

（ⅰ）若该市 E 大学 2021 年毕业生人数为 7 千人，根据(1)的结论估计该市政府要给 E 大学选择自主创业的毕业生创业补贴的总金额；

（ⅱ）若 A 大学的毕业生中小明、小红选择自主创业的概率分别为 $p,2p-1\left(\frac{1}{2}<p<1\right)$，该市政府对小明、小红两人的自主创业的补贴总金额的期望不超过 1.4 万元，求 p 的取值范围.

参考公式：回归方程 $\hat{y}=\hat{a}+\hat{b}x$ 中斜率和截距的最小二乘法估计公式分别为：

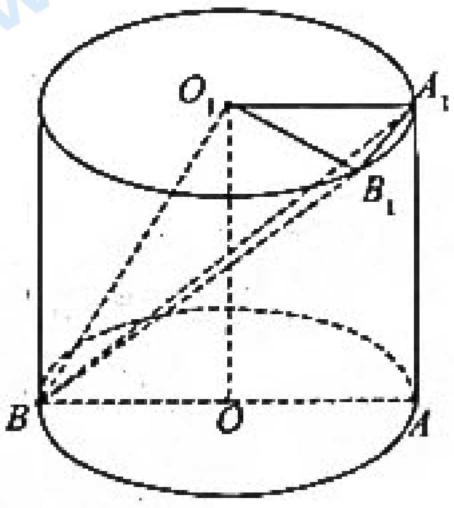
$$\hat{b}=\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})(y_i-\bar{y})}{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2}=\frac{\sum_{i=1}^{n}x_iy_i-n\bar{x}\bar{y}}{\sum_{i=1}^{n}x_i^2-n\bar{x}^2},\hat{a}=\bar{y}-\hat{b}\bar{x}.$$

19.(12分)

如图,将长方形 OAA_1O_1(及其内部)绕 OO_1 旋转一周形成圆柱,其中 $OA=1,O_1O=2$,劣弧 A_1B_1 的长为$\frac{\pi}{6}$,AB 为圆 O 的直径.

(1)在弧 AB 上是否存在点 C(C,B_1 在平面 OAA_1O_1 的同侧),使 $BC\perp AB_1$,若存在,确定其位置,若不存在,说明理由;

(2)求平面 A_1O_1B 与平面 B_1O_1B 夹角的余弦值.

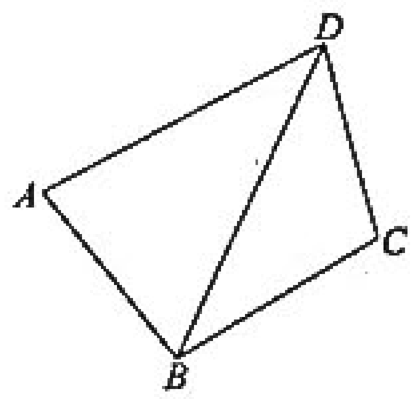


20.(12分)

如图,在平面四边形 $ABCD$ 中,$AB=BC=CD=2,AD=2\sqrt{3}$.

(1)若 DB 平分$\angle ADC$,证明:$A+C=\pi$;

(2)记$\triangle ABD$ 与$\triangle BCD$ 的面积分别为 S_1 和 S_2,求 $S_1^2+S_2^2$ 的最大值.



21.(12分)

已知椭圆 $C:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$经过点$\left(\sqrt{3},\frac{1}{2}\right)$,其右焦点为 $F(\sqrt{3},0)$.

(1)求椭圆 C 的标准方程;

(2)椭圆 C 的右顶点为 A,若点 P,Q 在椭圆 C 上,且满足直线 AP 与 AQ 的斜率之积为$\frac{1}{20}$,求$\triangle APQ$ 面积的最大值.

22.(12分)

已知函数 $f(x)=3x-e^x+1$,其中 $e=2.71828\cdots$是自然对数的底数.

(1)设曲线 $y=f(x)$与 x 轴正半轴相交于点 $P(x_0,0)$,曲线在点 P 处的切线为 l,求证:曲线 $y=f(x)$上的点都不在直线 l 的上方;

(2)若关于 x 的方程 $f(x)=m$(m 为正实数)有两个不等实根 $x_1,x_2(x_1<x_2)$,求证:$x_2-x_1<2-\frac{3}{4}m$.

密 封 线 内 不 要 答 题

2023 届“皖南八校”高三第二次大联考·数学
参考答案、解析及评分细则

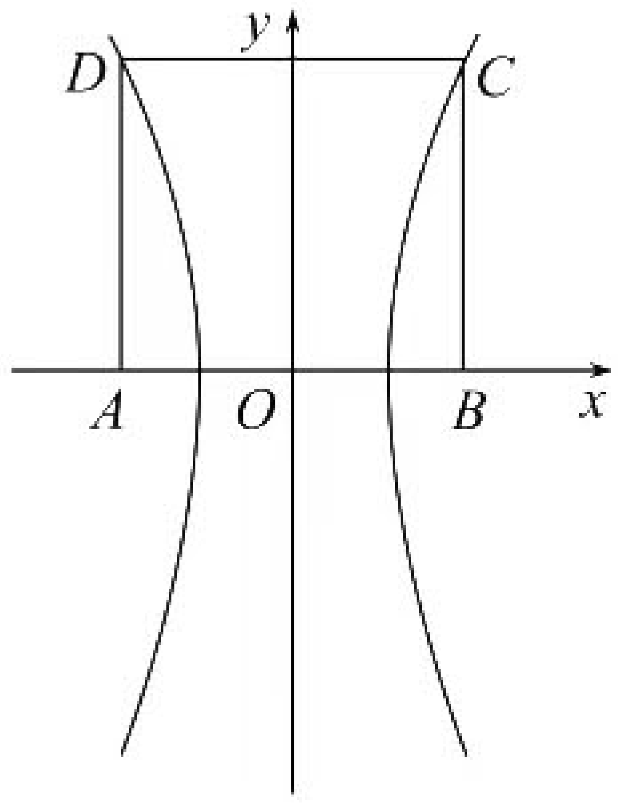
1. C　因为 $A=\{-1,0,1,2,3\}$，$B=\{x|1\leqslant x\leqslant 3,x\in\mathbf{R}\}$，则 $A\cap B=\{1,2,3\}$. 故选 C.

2. D　设 $z=a+bi$，则 $|z-i|=|a+(b-1)i|=\sqrt{a^2+(b-1)^2}$，$\bar{z}\cdot i=(a-bi)i=b+ai$. ∵ $|z-i|=\bar{z}\cdot i$，

∴ $\sqrt{a^2+(b-1)^2}=b-ai$，解得 $\begin{cases}a=0,\\ b=\frac{1}{2},\end{cases}$ 即 $z=\frac{1}{2}i$. 故选 D.

3. C　因为 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 是单位向量，所以 $|\boldsymbol{a}|=1$，$|\boldsymbol{b}|=1$，故 $\boldsymbol{a}^2=|\boldsymbol{a}|^2=1$，$\boldsymbol{b}^2=|\boldsymbol{b}|^2=1$，由 $|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=\sqrt{3}$ 得，$|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|^2=3$，即 $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})^2=3$，解得 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\frac{1}{2}$. 设 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角为 θ，则 $\boldsymbol{a}$ 在 $\boldsymbol{b}$ 上的投影向量为 $|\boldsymbol{a}|\cos\theta\frac{\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{b}|}=\frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{b}|}\cdot\frac{\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{b}|}=\frac{1}{2}\boldsymbol{b}$. 故选 C.

4. A　如图，正方形的顶点 A，B 为双曲线的焦点，顶点 C，D 在双曲线上，则 $A(-c,0)$，$B(c,0)$，故 $C\left(c,\frac{b^2}{a}\right)$. 由正方形 $ABCD$ 得 $AB=BC$，所以 $2c=\frac{b^2}{a}$，则 $2ac=b^2=c^2-a^2$ 即 $c^2-2ac-a^2=0$，两边同除 a^2 得 $e^2-2e-1=0$，解得 $e=\sqrt{2}+1$ 或 $e=-\sqrt{2}+1$（舍）. 故选 A.



5. A　因为 $PA\perp AB$，$PA=12$，$AB=16$，所以 $PB=20$，在 $\triangle PBC$ 中，由正弦定理得 $\frac{PC}{\sin\angle PBC}=\frac{PB}{\sin\angle PCB}$，即 $\frac{10\sqrt{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}}=\frac{20}{\sin\angle PCB}$，所以 $\sin\angle PCB=1$，取 PB 的中点 O，可知 O 为三棱锥 $P-ABC$ 外接球的球心，外接球的半径 $R=\frac{1}{2}PB=10$，所以三棱锥 $P-ABC$ 外接球的体积为 $V=\frac{4\pi}{3}R^3=\frac{4000}{3}\pi$，故选 A.

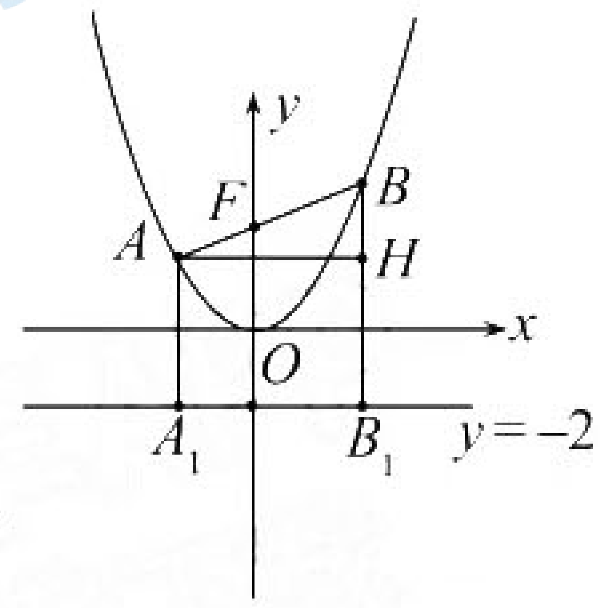
6. D　∵圆 C 的方程为 $x^2+y^2-6x+8=0$，整理得：$(x-3)^2+y^2=1$，∴圆心为 $C(3,0)$，半径 $r=1$，又∵直线 $y=kx+2$ 上至少存在一点，使得以该点为圆心，1 为半径的圆与圆 C 有公共点，∴点 C 到直线 $y=kx+2$ 的距离小于或等于 2，∴ $\frac{|3k-0+2|}{\sqrt{k^2+1}}\leqslant 2$，$5k^2+12k\leqslant 0$，化简得，解得 $-\frac{12}{5}\leqslant k\leqslant 0$，∴ k 的最小值是 $-\frac{12}{5}$. 故选 D.

7. B　依题意每次抽取工人甲被抽到的概率 $P=\frac{C_5^2}{C_6^3}=\frac{1}{2}$，所以工人甲一周内被选中两次的概率为 $\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{4}$，故 A 正确；依题意 ξ 的可能取值为 3、4、5、6，则 $P(\xi=3)=\frac{C_6^3}{C_6^3}\cdot\frac{1}{C_6^3}=\frac{1}{20}$，$P(\xi=6)=\frac{C_6^3}{C_6^3}\cdot\frac{C_3^3}{C_6^3}=\frac{1}{20}$，所以 $P(\xi=3)=P(\xi=6)$，故 B 错误；对于 C，工人甲一周内至少被选中一次的概率为 $1-\left(1-\frac{1}{2}\right)^2=\frac{3}{4}$，故 C 正确；$P(\xi=4)=\frac{C_6^3}{C_6^3}\cdot\frac{C_3^2C_3^1}{C_6^3}=\frac{9}{20}$，$P(\xi=5)=\frac{C_6^3}{C_6^3}\cdot\frac{C_3^1C_3^2}{C_6^3}=\frac{9}{20}$，所以 $P(\xi=4)=P(\xi=5)$，故 D 正确. 故选 B.

8. B　因为 $f(x)=-x^2-\cos x$，$x\in\mathbf{R}$，$f(-x)=-(-x)^2-\cos(-x)=-x^2-\cos x=f(x)$，所以 $f(x)$ 为 $\mathbf{R}$ 上的偶函数. 当 $x\geqslant 0$ 时，$f'(x)=-2x+\sin x$，$f''(x)=-2+\cos x<0$，所以 $f'(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上单调递减，所以 $f'(x)\leqslant f'(0)=0$，所以 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上单调递减，又因为 $f(x)$ 为 $\mathbf{R}$ 上的偶函数，所以 $f(x)$ 在 $(-\infty,0)$ 上单调递增. 因为 $a=f(e^{-\frac{7}{8}})$，$b=f\left(\ln\frac{8}{9}\right)=f\left(\ln\frac{9}{8}\right)$，$c=f\left(-\frac{1}{8}\right)=f\left(\frac{1}{8}\right)$，由 $e^x\geqslant x+1$，得 $e^{-\frac{7}{8}}>$

$-\frac{7}{8}+1=\frac{1}{8}$,所以 $f(e^{-\frac{7}{8}})<f\left(\frac{1}{8}\right)$,由 $\ln x\leqslant x-1$,得 $\ln\frac{9}{8}<\frac{9}{8}-1=\frac{1}{8}$,所以 $f\left(\ln\frac{9}{8}\right)>f\left(\frac{1}{8}\right)$,从而有 $a<c<b$. 故选 B.

9. ABD　函数 $f(x)=\sum_{i=1}^{4}\frac{\sin[(2i-1)x]}{2i-1}=\sin x+\frac{\sin 3x}{3}+\frac{\sin 5x}{5}+\frac{\sin 7x}{7}$,对于 A,可以验证 $f(x+\pi)=f(-x)$,故 A 正确;对于 B,同样可以验证 $f(x)=-f(-x)$,故 B 正确;对于 C,由诱导公式易知 $f(x+\pi)=-f(x)\neq f(x)$,故 C 错误;对于 D,易知 $f'(x)=\cos x+\cos 3x+\cos 5x+\cos 7x\leqslant 4$,故 D 正确. 故选 ABD.



10. AD　对于 A,易知 $p=4$,从而准线方程为 $y=-2$,故 A 正确;对于 B,如图分别过 A,B 两点作准线 $y=-2$ 的垂线,垂足分别为 A_1,B_1,过 A 点作 BB_1 的垂线,垂足为点 H. 由于 $3\overrightarrow{AF}=\overrightarrow{FB}$,不妨设 $|AF|=t$,则 $|BF|=3t$,由抛物线的定义易知:$|AA_1|=t$,$|BB_1|=3t$,$|BH|=2t$,在直角△ABH 中,$\angle BAH=30°$,此时 AB 的倾斜角为 $30°$,根据抛物线的对称性可知,AB 的倾斜角为 $30°$ 或 $150°$,所以 B 错误;对于 C,点 $M\left(\frac{x_1+x_2}{2},\frac{y_1+y_2}{2}\right)$,由抛物线的定义知,$|AF|+|BF|=y_1+2+y_2+2=16$,有 $y_1+y_2=12$,所以 M 到 x 轴距离 $\frac{y_1+y_2}{2}=6$,C 错误;对于 D,由抛物线定义知 $\frac{1}{|AF|}+\frac{1}{|BF|}=\frac{2}{p}=\frac{1}{2}$,所以 $4|AF|+|BF|=2(4|AF|+|BF|)\left(\frac{1}{|AF|}+\frac{1}{|BF|}\right)=2(5+\frac{|BF|}{|AF|}+\frac{4|AF|}{|BF|})\geqslant 18$,当且仅当 $\frac{|BF|}{|AF|}=\frac{4|AF|}{|BF|}$,即 $|BF|=2|AF|$ 时取得等号,所以 D 正确. 故选 AD.

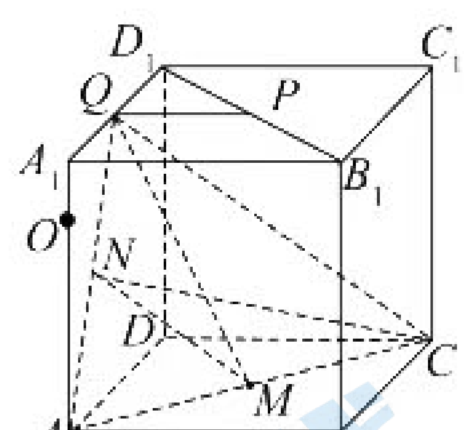


图1

11. ACD　对于 A,如图 1,在△ACQ 中,因为 M,N 为 AC,AQ 的中点,所以 $MN\parallel CQ$,所以 CN 与 QM 共面,所以 A 正确;

对于 B,由 $V_{A-DMN}=V_{N-ADM}$,因为 N 到平面 $ABCD$ 的距离为定值 2,且△ADM 的面积为 1,所以三棱锥 $A-DMN$ 的体积为 $\frac{2}{3}$,所以 B 错误;

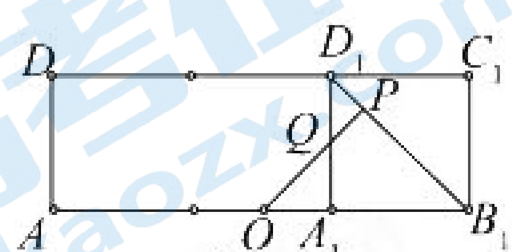


图2

对于 C,如图 2,展开平面 A_1ADD_1,使点 A_1ADD_1 共面,过 O 作 $OP\perp B_1D_1$,交 B_1D_1 与点 P,交 A_1D_1 与点 Q,则此时 $PQ+QO$ 最小,易求 $PQ+QO$ 的最小值为 $\frac{3\sqrt{2}}{2}$,则 C 正确;

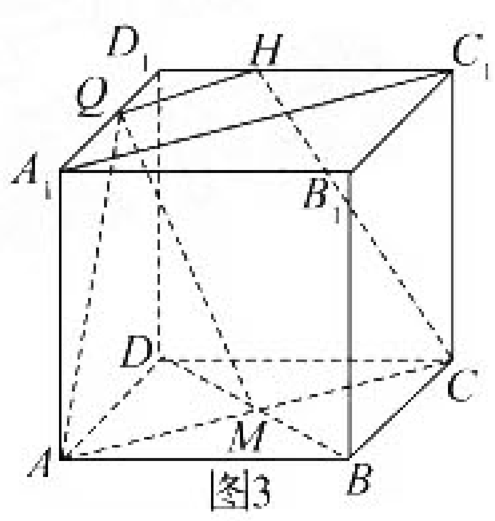


图3

对于 D,如图 3,取 $\overrightarrow{D_1H}=\frac{1}{3}\overrightarrow{D_1C_1}$,连接 HC,则 $HQ\parallel A_1C_1$,又 $AC\parallel A_1C_1$ 所以 $HQ\parallel AC$,所以 A,M,C,H,Q 共面,即过 A,Q,M 三点的正四棱柱的截面为 $ACHQ$,由 $AQ=CH=\sqrt{4^2+\left(\frac{4}{3}\right)^2}=\frac{4\sqrt{10}}{3}$,则 $ACHQ$ 是等腰梯形,且 $QH=\frac{1}{3}A_1C_1=\frac{2\sqrt{2}}{3}$,所以平面截正四棱柱所得截面的周长为 $\frac{8(\sqrt{2}+\sqrt{10})}{3}$,所以 D 正确. 故选 ACD.

12. ABD　对于 A,令 $x=y=0$,代入已知等式得 $f(0)=f(0)g(0)-g(0)f(0)=0$,得 $f(0)=0$,再令 $y=0$,$x=1$,代入已知等式得 $f(1)=f(1)g(0)-g(1)f(0)$,可得 $f(1)[1-g(0)]=-g(1)f(0)=0$,结合 $f(1)\neq 0$ 得 $1-g(0)=0$,$g(0)=1$,故 A 正确;对于 B,再令 $x=0$,代入已知等式得 $f(-y)=f(0)g(y)-g(0)f(y)$,将 $f(0)=0$,$g(0)=1$ 代入上式,得 $f(-y)=-f(y)$,∴函数 $f(x)$ 为奇函数,∴函数 $f(2x-1)$ 关于点 $(\frac{1}{2},0)$ 对称,故 B 正确. 对于 C,再令 $x=1$,$y=-1$ 代入已知等式,得 $f(2)=f(1)g(-1)-g(1)f(-1)$ ∵ $f(-1)=-f(1)$,∴ $f(2)=f(1)[g(-1)+g(1)]$,又∵ $f(2)=-f(-2)=-f(1)$,∴ $-f(1)=f(1)[g(-1)+g(1)]$,即 $f(1)[g(-1)+g(1)+1]=0$,∵ $f(1)\neq 0$,∴ $g(-1)+g(1)+1=0$ 得 $g(1)+g(-1)=-1$,故 C

错误；对于 D，再分别令 $y=-1$ 和 $y=1$ 代入已知等式，得以下两个等式 $f(x+1)=f(x)g(-1)-g(x)f(-1)$，$f(x-1)=f(x)g(1)-g(x)f(1)$，两式相加易得 $f(x+1)+f(x-1)=-f(x)$，所以有 $f(x+2)+f(x)=-f(x+1)$，从而有 $f(x-1)=f(x+2)$，$\therefore f(x)$ 为周期函数，且周期为 3，$\because f(1)=\frac{\sqrt{3}}{2}$，$\therefore f(-2)=\frac{\sqrt{3}}{2}$，$f(2)=-\frac{\sqrt{3}}{2}$，$\therefore f(3)=f(0)=0$，$\therefore \sum_{n=1}^{2\,023} f(n)=\frac{\sqrt{3}}{2}$．故 D 正确．故选 ABD．

13．93　$10\times75\%=7.5$，所以从小到大选取第 8 个数作为第 75 百分位数，即 93．

14．-495　由二项式展开式的定义易知 xy^8 的系数为 $C_{11}^{8}(-C_3^1)=-495$．

15．$\frac{\sqrt{3}}{3}$　因为 $\cos(2\alpha-\beta)=\cos\left[2\left(\alpha+\frac{\pi}{3}\right)-\left(\beta+\frac{\pi}{6}\right)-\frac{\pi}{2}\right]=\sin\left[2\left(\alpha+\frac{\pi}{3}\right)-\left(\beta+\frac{\pi}{6}\right)\right]$

$=\sin[2(\alpha+\frac{\pi}{3})]\cos(\beta+\frac{\pi}{6})-\cos 2(\alpha+\frac{\pi}{3})\sin(\beta+\frac{\pi}{6})$．

$$\sin\left[2\left(\alpha+\frac{\pi}{3}\right)\right]=2\sin(\alpha+\frac{\pi}{3})\cos(\alpha+\frac{\pi}{3})=\frac{2\sin(\alpha+\frac{\pi}{3})\cos(\alpha+\frac{\pi}{3})}{\sin^2(\alpha+\frac{\pi}{3})+\cos^2(\alpha+\frac{\pi}{3})}=\frac{2\tan\left(\alpha+\frac{\pi}{3}\right)}{\tan^2\left(\alpha+\frac{\pi}{3}\right)+1}=\frac{2\sqrt{2}}{3},$$

$$\cos\left[2\left(\alpha+\frac{\pi}{3}\right)\right]=\cos^2(\alpha+\frac{\pi}{3})-\sin^2(\alpha+\frac{\pi}{3})=\frac{\cos^2(\alpha+\frac{\pi}{3})-\sin^2(\alpha+\frac{\pi}{3})}{\cos^2(\alpha+\frac{\pi}{3})+\sin^2(\alpha+\frac{\pi}{3})}=\frac{1-\tan^2\left(\alpha+\frac{\pi}{3}\right)}{\tan^2\left(\alpha+\frac{\pi}{3}\right)+1}=\frac{1}{3};$$

因为 $\cos\left(\beta+\frac{\pi}{6}\right)=\frac{\sqrt{6}}{3}$，$\beta\in(0,\pi)$，所以 $\left(\beta+\frac{\pi}{6}\right)\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$，所以 $\sin\left(\beta+\frac{\pi}{6}\right)=\frac{\sqrt{3}}{3}$，故 $\cos(2\alpha-\beta)=\frac{2\sqrt{2}}{3}\times\frac{\sqrt{6}}{3}-\frac{1}{3}\times\frac{\sqrt{3}}{3}=\frac{\sqrt{3}}{3}$．

16．$-e$　由题意得 $x^{a+1}\cdot e^x+a\ln x\geq0$ 化简得 $xe^x\geq\frac{-a\ln x}{x^a}=\frac{1}{x^a}\ln\frac{1}{x^a}=e^{\ln\frac{1}{x^a}}\ln\frac{1}{x^a}$ 易知函数 $y=xe^x$ 是单调递增的函数，所以 $x\geq\ln\frac{1}{x^a}$ 对 $x>1$ 恒成立，此时 $a\geq\left(-\frac{x}{\ln x}\right)_{\max}$，令 $f(x)=-\frac{x}{\ln x}$，则 $f'(x)=\frac{1-\ln x}{(\ln x)^2}$，当 $x\in(0,e)$ 时，$f'(x)>0$，$f(x)$ 单调递增，当 $x\in(e,+\infty)$ 时，$f'(x)<0$，$f(x)$ 单调递减，当 $x=e$ 时，$f(x)_{\max}=f(e)=-e$，即 a 的最小值为 $-e$．

17．(1)证明：由 $a_{n+1}=\frac{a_n}{2a_n+3}$，可得 $\frac{1}{a_{n+1}}=\frac{2a_n+3}{a_n}=2+\frac{3}{a_n}$，

$\frac{1}{a_{n+1}}+1=\frac{3}{a_n}+3=3\left(\frac{1}{a_n}+1\right)$，又 $\frac{1}{a_1}+1=3\neq0$，…………………………………… 3 分

故数列 $\left\{\frac{1}{a_n}+1\right\}$ 是以 3 为首项，3 为公比的等比数列．…………………………………… 4 分

(2)解：由(1)可知 $\frac{1}{a_n}+1=3\times3^{n-1}=3^n$，故 $\frac{1}{a_n}=3^n-1$．…………………………………… 5 分

$\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\frac{1}{a_3}+\cdots+\frac{1}{a_n}=3-1+3^2-1+3^3-1+\cdots+3^n-1=\frac{3(1-3^n)}{1-3}-n=\frac{3^{n+1}}{2}-\frac{3}{2}-n$．……………… 6 分

令 $f(n)=\frac{3^{n+1}}{2}-\frac{3}{2}-n$，$(n\in\mathbf{N}^*)$

$f(n+1)-f(n)=\frac{3^{n+2}}{2}-\frac{3}{2}-(n+1)-\left(\frac{3^{n+1}}{2}-\frac{3}{2}-n\right)=3^{n+1}-1>0$ 易知 $f(n)$ 随 n 的增大而增大．……

…………………………………………………………………………………………………… 8 分

$f(4)=116<121$，$f(5)=358>121$，故满足 $f(n)<121$ 的最大整数 n 为 4．……………………………… 10 分

18. 解：(1)由题意得 $\overline{x}=\dfrac{3+4+5+6}{4}=4.5$，$\overline{y}=\dfrac{0.1+0.2+0.4+0.5}{4}=0.3$. ………………………………… 2 分

$\sum\limits_{i=1}^{4}x_iy_i=6.1$，$\sum\limits_{i=1}^{4}x_i^2=86$，$\hat{b}=\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{4}x_iy_i-4\overline{x}\,\overline{y}}{\sum\limits_{i=1}^{4}x_i^2-4\overline{x}^2}=\dfrac{6.1-4\times4.5\times0.3}{86-81}=0.14$. ……………………… 3 分

所以 $\hat{a}=\overline{y}-\hat{b}\overline{x}=0.3-0.14\times4.5=-0.33$

故得 y 关于 x 的线性回归方程为 $\hat{y}=0.14x-0.33$. ………………………………………………………… 4 分

(2)(ⅰ)将 $x=7$ 代入 $\hat{y}=0.14x-0.33$，得 $\hat{y}=0.14\times7-0.33=0.65$，

所以估计该市政府需要给 E 大学毕业生选择自主创业的人员发放补贴金总额为 $0.65\times1\ 000\times1=650$(万元). …… 6 分

(ⅱ)设小明、小红两人中选择自主创业的人数为 X，则 X 的所有可能值为 0，1，2. ……………………… 7 分

$P(X=0)=(1-p)(2-2p)=2p^2-4p+2$，

$P(X=1)=(1-p)(2p-1)+p(2-2p)=-4p^2+5p-1$，

$P(X=2)=p(2p-1)=2p^2-p$. ……………………………………………………………………………………… 10 分

$\therefore E(X)=0\times(2p^2-4p+2)+(-4p^2+5p-1)\times1+(2p^2-p)\times2=3p-1$. ………………………… 11 分

$\because 3p-1\leqslant1.4$，$\dfrac{1}{2}<p<1$，$\therefore\dfrac{1}{2}<p\leqslant\dfrac{4}{5}$，故 p 的取值范围为 $\left(\dfrac{1}{2},\dfrac{4}{5}\right]$. ……………………………… 12 分

19. 解：(1)存在，当 B_1C 为圆柱 OO_1 的母线，$BC\perp AB_1$. ………………………………………………………… 2 分

连接 BC，AC，B_1C，因为 B_1C 为圆柱 OO_1 的母线，所以 $B_1C\perp$ 平面 ABC，

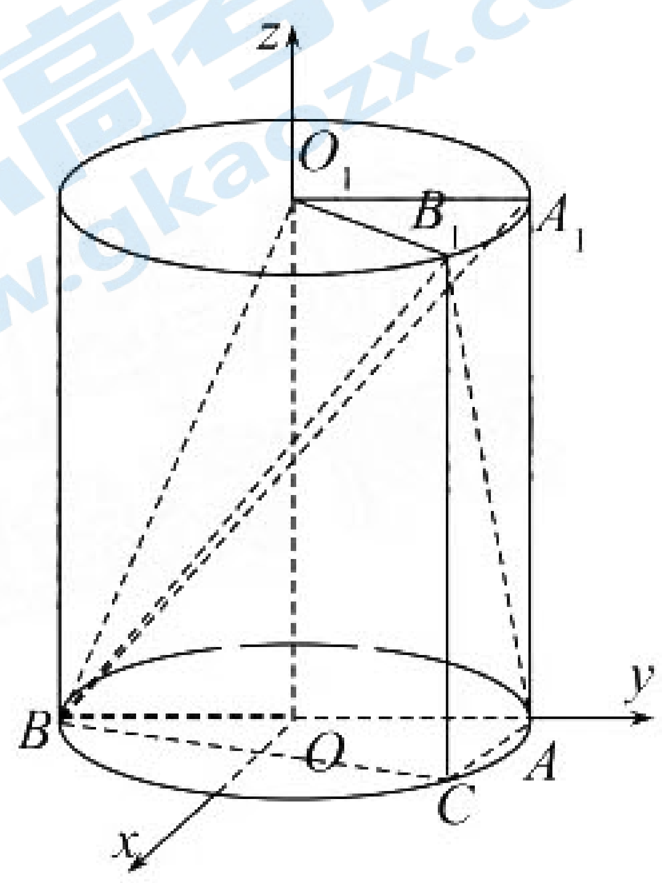
又因为 $BC\subset$ 平面 ABC，所以 $B_1C\perp BC$.

因为 AB 为圆 O 的直径，所以 $BC\perp AC$.

$BC\perp AC$，$B_1C\perp BC$，$AC\cap B_1C=C$，所以 $BC\perp$ 平面 AB_1C，

因为 $AB_1\subset$ 平面 AB_1C，所以 $BC\perp AB_1$. ………………………………………………………………… 6 分

(2)以 O 为原点，OA，OO_1 分别为 y，z 轴，垂直于 y，z 轴直线为 x 轴建立空间直角坐标系，如图所示.



$A_1(0,1,2)$，$O_1(0,0,2)$，$B(0,-1,0)$，

因为 $\overset{\frown}{A_1B_1}$ 的长为 $\dfrac{\pi}{6}$，所以 $\angle A_1O_1B_1=\dfrac{\pi}{6}$，$B_1\left(\dfrac{1}{2},\dfrac{\sqrt{3}}{2},2\right)$，$\overrightarrow{O_1B}=(0,-1,-2)$，

$\overrightarrow{O_1B_1}=\left(\dfrac{1}{2},\dfrac{\sqrt{3}}{2},0\right)$.

设平面 O_1B_1B 的法向量 $\boldsymbol{m}=(x,y,z)$，

$\begin{cases}-y-2z=0,\\ \dfrac{1}{2}x+\dfrac{\sqrt{3}}{2}y=0,\end{cases}$ 令 $x=-3$，解得 $y=\sqrt{3}$，$z=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，所以 $\boldsymbol{m}=\left(-3,\sqrt{3},-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$. ……………………… 8 分

因为 x 轴垂直平面 A_1O_1B，所以设平面 A_1O_1B 的法向量 $\boldsymbol{n}=(1,0,0)$. ………………………………… 9 分

所以 $\cos\langle\boldsymbol{m},\boldsymbol{n}\rangle=\dfrac{-3}{\sqrt{9+3+\dfrac{3}{4}}}=-\dfrac{2\sqrt{51}}{17}$. ………………………………………………………… 10 分

所以平面 A_1O_1B 与平面 B_1O_1B 夹角的余弦值为 $\dfrac{2\sqrt{51}}{17}$. ……………………………………………………… 12 分

20. (1)证明：$\because DB$ 平分 $\angle ADC$，$\therefore\angle ADB=\angle CDB$，则 $\cos\angle ADB=\cos\angle CDB$，

由余弦定理得$\frac{AD^2+BD^2-AB^2}{2AD\cdot BD}=\frac{CD^2+BD^2-BC^2}{2CD\cdot BD}$,

即$\frac{12+BD^2-4}{4\sqrt{3}BD}=\frac{4+BD^2-4}{4BD}$,解得 $BD^2=4(\sqrt{3}+1)$; ………… 2 分

$\because \cos A=\frac{AD^2+AB^2-BD^2}{2AD\cdot AB}=\frac{12+4-4(\sqrt{3}+1)}{8\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}-1}{2}$,

$\cos C=\frac{CD^2+BC^2-BD^2}{2CD\cdot BC}=\frac{4+4-4(\sqrt{3}+1)}{8}=\frac{1-\sqrt{3}}{2}$,

$\therefore \cos A=-\cos C$,又 $A\in(0,\pi)$,$C\in(0,\pi)$,$\therefore A+C=\pi$. ………… 6 分

(注:此问若用正弦定理处理也给 6 分)

(2)解:$\because BD^2=AB^2+AD^2-2AB\cdot AD\cos A=BC^2+CD^2-2BC\cdot CD\cos C$,

$\therefore 16-8\sqrt{3}\cos A=8-8\cos C$,整理可得 $\cos C=\sqrt{3}\cos A-1$; ………… 8 分

$S_1^2+S_2^2=\left(\frac{1}{2}AD\cdot AB\sin A\right)^2+\left(\frac{1}{2}BC\cdot CD\sin C\right)^2=12\sin^2A+4\sin^2C=12-12\cos^2A+4-4\cos^2C=16-$

$12\cos^2A-4(\sqrt{3}\cos A-1)^2=-24\cos^2A+8\sqrt{3}\cos A+12=-24\left(\cos A-\frac{\sqrt{3}}{6}\right)^2+14$,

$\because A\in(0,\pi)$,$\therefore$当 $\cos A=\frac{\sqrt{3}}{6}$时,$S_1^2+S_2^2$ 取得最大值,最大值为 14. ………… 12 分

21. 解:(1)依题可得$\begin{cases}c=\sqrt{3},\\ \frac{3}{a^2}+\frac{1}{4b^2}=1,\\ a^2=b^2+c^2,\end{cases}$解得$\begin{cases}a=2,\\ b=1,\\ c=\sqrt{3},\end{cases}$ ………… 2 分

所以椭圆 C 的方程为$\frac{x^2}{4}+y^2=1$. ………… 3 分

(2)易知直线 AP 与 AQ 的斜率同号,所以直线 PQ 不垂直于 x 轴,

故可设 PQ:$y=kx+m$,$P(x_1,y_1)$,$Q(x_2,y_2)$,

由$\begin{cases}\frac{x^2}{4}+y^2=1,\\ y=kx+m\end{cases}$可得,$(1+4k^2)x^2+8mkx+4m^2-4=0$,

所以 $x_1+x_2=\frac{-8mk}{1+4k^2}$,$x_1x_2=\frac{4m^2-4}{1+4k^2}$,$\Delta=16(4k^2+1-m^2)>0$,即 $4k^2+1>m^2$, ………… 5 分

而 $k_{AP}k_{AQ}=\frac{1}{20}$,即$\frac{y_1}{x_1-2}\cdot\frac{y_2}{x_2-2}=\frac{1}{20}$,

化简可得 $20(kx_1+m)(kx_2+m)=(x_1-2)(x_2-2)$,

$20k^2x_1x_2+20km(x_1+x_2)+20m^2=x_1x_2-2(x_1+x_2)+4$,

$20k^2\cdot\frac{4m^2-4}{1+4k^2}+20km\cdot\frac{-8mk}{1+4k^2}+20m^2=\frac{4m^2-4}{1+4k^2}-2\times\frac{-8mk}{1+4k^2}+4$

化简得 $6k^2+mk-m^2=0$,

所以 $m=-2k$ 或 $m=3k$,

所以直线 PQ:$y=k(x-2)$或 $y=k(x+3)$,

因为直线 PQ 不经过点 A,

所以直线 PQ 经过定点$(-3,0)$. ………… 8 分

所以直线 PQ 的方程为 $y=k(x+3)$,易知 $k\neq0$,

设定点 $B(-3,0)$，$S_{\triangle APQ}=|S_{\triangle ABP}-S_{\triangle ABQ}|=\frac{1}{2}|AB||y_1-y_2|=\frac{5}{2}|k||x_1-x_2|$

$=\frac{5}{2}|k|\sqrt{(x_1+x_2)^2-4x_1x_2}$

$=\frac{5}{2}|k|\sqrt{\left(\frac{-8km}{1+4k^2}\right)^2-4\times\frac{4m^2-4}{1+4k^2}}$

$=\frac{5|k|}{2}\frac{\sqrt{16(4k^2+1-m^2)}}{1+4k^2}=\frac{10\sqrt{(1-5k^2)k^2}}{1+4k^2}$，

因为 $\Delta>0$，且 $m=3k$，

所以 $1-5k^2>0$，所以 $0<k^2<\frac{1}{5}$，…………………………………………………… 10 分

设 $t=4k^2+1\in\left(1,\frac{9}{5}\right)$，

所以 $S_{\triangle APQ}=\frac{5}{2}\sqrt{\frac{-5t^2+14t-9}{t^2}}=\frac{5}{2}\sqrt{-9\left(\frac{1}{t}-\frac{7}{9}\right)^2+\frac{4}{9}}\leqslant\frac{5}{3}$，

当且仅当 $t=\frac{9}{7}$，即 $k^2=\frac{1}{14}$ 时取等号，即△APQ 面积的最大值为 $\frac{5}{3}$．…………………… 12 分

22. 证明：(1)由题意可得：$3x_0-e^{x_0}+1=0$，$e^{x_0}=3x_0+1$，

$f'(x)=3-e^x$，$f'(x_0)=3-e^{x_0}=3-3x_0-1=2-3x_0$，

可得曲线在点 P 处的切线为 $l: y=(2-3x_0)(x-x_0)$．…………………………………… 3 分

令 $g(x)=(2-3x_0)(x-x_0)-(3x-e^x+1)$，$g(x_0)=0$，

$g'(x)=2-3x_0-3+e^x=-1-3x_0+e^x$，$g'(x_0)=-3x_0+e^{x_0}-1=0$，可得函数 $g(x)$ 在 $(-\infty,x_0)$ 上单调递减，在 $(x_0,+\infty)$ 上单调递增，$\therefore g(x)\geqslant g(x_0)=0$，$\therefore$ 曲线 $y=f(x)$ 上的点都不在直线 l 的上方．…… 6 分

(2)由(1)可得 $f'(x)=3-e^x=0$，解得 $x=\ln 3$，$f(\ln 3)=3\ln 3-3+1=3\ln 3-2$，$\therefore 0<m<3\ln 3-2$，

曲线在点 P 处的切线为 $l: y=(2-3x_0)(x-x_0)$，

$\because e^{x_0}=3x_0+1$，由零点的存在性定理知 $x_0\in(1,2)$，

同理可得曲线 $y=f(x)$ 在点 $(0,0)$ 处的切线为 $y=2x$，

$y=m$ 与 $y=2x$，$y=(2-3x_0)(x-x_0)$ 的交点的横坐标分别为 x_3，x_4 则 $x_3=\frac{m}{2}$，$x_4=x_0+\frac{m}{2-3x_0}$，

$\therefore |x_2-x_1|<x_4-x_3=x_0+\frac{m}{2-3x_0}-\frac{m}{2}$．…………………………………………… 8 分

下面证明：$x_0+\frac{m}{2-3x_0}-\frac{m}{2}<2-\frac{3m}{4}$．

$\because 2-\frac{m}{4}-x_0-\frac{m}{2-3x_0}=2-x_0-m\cdot\frac{3(2-x_0)}{4(2-3x_0)}=(2-x_0)\cdot\frac{12x_0+3m-8}{4(3x_0-2)}$，

$\because x_0\in(1,2)$，$\therefore 2-x_0>0$，$3x_0-2>1$，且 $12x_0-8+3m>4+3m>0$，

$\therefore 2-\frac{m}{4}-x_0-\frac{m}{2-3x_0}>0$，

$\therefore x_0+\frac{m}{2-3x_0}-\frac{m}{2}<2-\frac{3m}{4}$，$\therefore x_2-x_1<2-\frac{3}{4}m$．…………………………………… 12 分

关于我们

北京高考在线创办于 2014 年，隶属于北京太星网络科技有限公司，是北京地区极具影响力的中学升学服务平台。主营业务涵盖：北京新高考、高中生涯规划、志愿填报、强基计划、综合评价招生和学科竞赛等。

北京高考在线旗下拥有网站门户、微信公众平台等全媒体矩阵生态平台。平台活跃用户 40W+，网站年度流量数千万量级。用户群体立足于北京，辐射全国 31 省市。

北京高考在线平台一直秉承 " 精益求精、专业严谨 " 的建设理念，不断探索“K12 教育+互联网+大数据”的运营模式，尝试基于大数据理论为广大中学和家长提供新鲜的高考资讯、专业的高考政策解读、科学的升学规划等，为广大高校、中学和教科研单位提供“衔接和桥梁纽带”作用。

平台自创办以来，为众多重点大学发现和推荐优秀生源，和北京近百所中学达成合作关系，累计举办线上线下升学公益讲座数百场，帮助数十万考生顺利通过考入理想大学，在家长、考生、中学和社会各界具有广泛的口碑影响力

未来，北京高考在线平台将立足于北京新高考改革，基于对北京高考政策研究及北京高校资源优势，更好的服务全国高中家长和学生。