二试．题一．半径为R的光滑球内．两根长为l_1与l_2的杆，$l_1=\sqrt{3}R$．$l_2=R$．且质量均匀分布．两根一端以铰链连接．另外两端在球面上．试用虚功原理求出平衡位置并分析稳定性（如下图所示）

题二．光子气体的体积为V．温度为T．

(1) 求光子气体的熵及内能

(2)．当其绝热变化使得V变为3V．试求最可几波长变为原来多少倍．

题三．压强为P、温度为T的原子气体（可以视为理想气体）与二维平面之间吸附达到平衡．粒子在吸附后在二维平面上可自由运动、且在平面上能量为$\varepsilon=\frac{p^2}{2m}-\varepsilon_0$．其中p为动量．$\varepsilon_0$为正的常量．

(1) 求出二维平面上粒子的化学势．

(2)
(3) 还有两问．问的内容忘记了．

题四．内禀磁矩是不需要外界的条件来维持的．试用在经典理论中找到与之相似的理论．考虑磁矩的两种模型：模型一：两个磁荷错开一段距离．有标势$\Phi_m=-\frac{\mu_0}{4\pi}\vec{m}\cdot(\nabla\frac{1}{r})$

且$\vec{B}=-\nabla\Phi_m$．　模型二：一个电流环．势矢：$\vec{A}=\frac{\mu_0}{4\pi}\vec{m}\times(\nabla\frac{1}{r})$．且$\vec{B}=\nabla\times\vec{A}$

(1) 比较其产生的磁场是否相同
(2)．比较其产生的电流密度并解释物理意义．
(3)．比较其能量的形式并解释物理意义．
(4)．比较其在磁场中受力矩是否相同

都让分析异同．

题五．一个势场分布$V(x)$．粒子总能量为E．波矢$k=\frac{\sqrt{2m(E-V)}}{\hbar}$．对于一个从左侧入射粒子，粒子的波函数$\psi(x)$有

$$\psi(x)=\begin{cases}e^{ikx}+re^{-ikx}, & x\to-\infty\\ te^{ikx} & x\to+\infty\end{cases}$$

则有$R=|R|^2$　$T=|t|^2$．

（注意$V(x)$不一定等于$V(-x)$）．

(1) 证明 $\cancel{1=|R|+|T|}$．$1=R+T$．

(2)．证明从右侧入射时同样的定义下R^*、T^*与R、T的关系、并解释物理意义．

(3)．若进行变换：将原本x位置的势场~~向右平移~~沿x方向正方向平移了Δx．试问此时求出的r'、t'与原来r、t有何关系．

题6. 三维直角坐标下：$dl^2=dx^2+dy^2+dz^2$. 对于三维球面：$x^2+y^2+z^2=R^2$. 用黎曼几何描述 $R=1$ 时有

$x^2+y^2+z^2=1$. 令 $z=\cos\theta$, $x=\sin\theta\cos\varphi$, $y=\sin\theta\sin\varphi$. $(\theta=x^1 \quad \varphi=x^2)$

将 $dl^2=g_{11}d\theta^2+g_{12}d\theta d\varphi+g_{21}d\theta d\varphi+g_{22}d\varphi^2$ 中系数写出.

求出 $g_{\mu\nu}$ 以及 $g^{\mu\nu}$. 进而求出仿射联络 $\Gamma^{\mu}_{\nu\lambda}$. 再求出黎曼曲率张量 $R^{\mu}_{\nu\lambda\kappa}$.

求出里奇张量 $R_{\nu\kappa}$. 以及标量曲率 R. 试分析度规 $g_{\mu\nu}$、Ricci张量 $R_{\nu\kappa}$ 以及标量曲率 R

之间有何关系. 再根据自由运动下的运动方程：$\frac{d^2x^\mu}{d\tau^2}+\Gamma^{\mu}_{\kappa\nu}\frac{dx^\kappa}{d\tau}\frac{dx^\nu}{d\tau}=0$

证明在球面上的测地线是大圆.

已知条件：$\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu}=\frac{1}{2}g^{\lambda\kappa}(g_{\kappa\mu,\nu}+g_{\kappa\nu,\mu}-g_{\mu\nu,\kappa})$

以及 $R^{\mu}_{\nu\lambda\kappa}=\Gamma^{\mu}_{\nu\lambda,\kappa}-\Gamma^{\mu}_{\nu\kappa,\lambda}+\Gamma^{\mu}_{\rho\kappa}\Gamma^{\rho}_{\nu\lambda}-\Gamma^{\mu}_{\rho\lambda}\Gamma^{\rho}_{\nu\kappa}$.

一、虚功原理

方法一：虚功法

$$V=-\frac{R}{2}\cdot\sqrt{3}R\lambda g\cdot\cos\left(\frac{\pi}{3}-\theta\right)-\frac{\sqrt{3}R}{2}\cdot R\lambda g\cdot\cos\left(\frac{\pi}{6}+\theta\right)$$

$$\Rightarrow\delta V=\frac{\sqrt{3}}{2}\lambda gR^2\left[-\sin\left(\frac{\pi}{3}-\theta\right)+\sin\left(\frac{\pi}{6}+\theta\right)\right]\delta\theta$$

平衡时，有$\frac{\sqrt{3}}{2}\lambda gR^2\left[-\sin\left(\frac{\pi}{3}-\theta\right)+\sin\left(\frac{\pi}{6}+\theta\right)\right]=0$

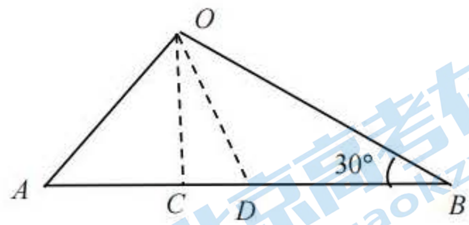
$$\Rightarrow\theta^*=\frac{\pi}{12},\frac{13\pi}{12}$$

$\theta^*=\frac{\pi}{12}$，$\delta^2V=\frac{\sqrt{3}}{2}\lambda gR^2\left[\cos\left(\frac{\pi}{3}-\theta\right)+\cos\left(\frac{\pi}{6}+\theta\right)\right]<0$

$\Rightarrow$平衡稳定

$\theta^*=\frac{13\pi}{12}$，平衡不稳定，出现这个解要求球壳上双侧约束.

方法二：几何法



由几何关系，$AD=DB$，$AC:CB=1:\sqrt{3}$

不难计算出$\angle COD=\frac{\pi}{12}$

二、光子气体

考察面积为A的区域，在立体角$\mathrm{d}\Omega$中，有

$$A\mathrm{d}J=\frac{\mathrm{d}\Omega}{4\pi}cu\cos\theta A$$

u为内能密度，J为单位面积、单位时间辐射的能量

$$\Rightarrow J=\frac{cu}{4\pi}\int_{\Omega}\cos\theta\mathrm{d}\Omega=\frac{cu}{4\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}2\pi\sin\theta\cos\theta\mathrm{d}\theta=\frac{1}{4}cu$$

而$J=\sigma T^4$

有，$u=\dfrac{4\sigma T^4}{c}\Rightarrow U=\dfrac{4\sigma T^4V}{c}$

由热一律，有$\mathrm{d}U=T\mathrm{d}S-p\mathrm{d}V$

$$\Rightarrow\frac{16\sigma T^3V}{c}\mathrm{d}T+\frac{4\sigma T^4}{c}\mathrm{d}V=T\mathrm{d}S-\frac{4\sigma T^4}{3c}\mathrm{d}V$$

已利用了光子气体中$p=\dfrac{1}{3}u$

$$\mathrm{d}S=\frac{16\sigma T^2V}{c}\mathrm{d}T+\frac{16\sigma T^3}{3c}\mathrm{d}V=\mathrm{d}\left(\frac{16\sigma T^3V}{3c}\right)\Rightarrow S=\frac{16\sigma T^3V}{3c}$$

绝热过程，有$\dfrac{16\sigma T^3V}{3c}=\mathrm{const}$

$V\to3V$，$T\to3^{-1/3}T$

由维恩位移定律$\lambda T=\mathrm{const}\Rightarrow\lambda'=3^{1/3}\lambda$

三、二维费米气体

先翻译题目

现在有两个相

$$\begin{cases}\text{三维相：}T\text{很大，是理想气体}\\ \text{二维相：}T\sim\varepsilon_{f,2}\text{，且}\varepsilon=-\varepsilon_0+T,\text{态密度}g=\dfrac{2\pi p}{\hbar^2}\end{cases}$$

(1) 相平衡时，有 $\mu_2=\mu_3$

理想气体化学势为摩尔吉布斯函数

$$G=U+pV=\frac{5}{2}Nk_BT\Rightarrow\mu=\frac{5}{2}k_BT$$

(2) 题目应该继续问二维表面上的粒子数密度

$$n=\int g_{(p)}f_{FD}(\varepsilon)\mathrm{d}p$$

取低温极限

$$n=\int\frac{2\pi p\mathrm{d}p}{\hbar^2}\frac{1}{e^{-\beta(\mu+\varepsilon)}+1}=\frac{\pi}{m\hbar^2}\int\frac{\mathrm{d}\varepsilon}{e^{-\beta(\mu+\varepsilon)}+1}$$

零阶下，有 $\varepsilon_f=\mu$

$$\Rightarrow n=\frac{\pi k_BT}{m\hbar^2}\left(\frac{5}{2}k_BT+\varepsilon_0\right)$$

(3) 题干忘了就自己出题

N很大时，给定体积V，表面积A，在强度量p、T下求解

微分的绝热方程（用p、V表示）

解：$p=\dfrac{N_3}{V}k_BT$，$N_2=nA=\dfrac{\pi k_BT}{m\hbar^2}\left(\dfrac{5}{2}k_BT+\varepsilon_0\right)A$

粒子数守恒：$\mathrm{d}(N_2+N_3)=0$

绝热条件：$-p\mathrm{d}V=\mathrm{d}\left(\dfrac{3}{2}N_3k_BT\right)+\mu\mathrm{d}N_2$

消去N_2、N_3，有

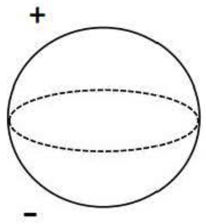
$$-p\mathrm{d}V-\frac{5}{2}pV\cdot\frac{\frac{5\pi Ak_B}{2m\hbar^2}(2k_BT+\varepsilon_0)(p\mathrm{d}V+V\mathrm{d}p)}{-\frac{5\pi Ak_B}{2m\hbar^2}(2k_BT+\varepsilon_0)+\frac{pV}{k_BT^2}}=\frac{3}{2}(p\mathrm{d}V+V\mathrm{d}p)$$

四、磁荷类比

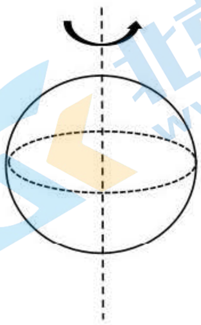
(1) 显然有$\vec{B}=\nabla\times\vec{A}=\dfrac{\mu_0 m}{4\pi r^3}\left(2\cos\theta\hat{r}+\sin\theta\hat{\theta}\right)$

(2) 磁荷视角下无$\vec{j}$，电流环有.

或者，外部偶极场可以在球面上这样定义：



$$\sigma=\frac{3p}{4\pi R^3}\cos\theta$$



$$K=\frac{3p}{4\pi R^3}\sin\theta$$

(3) 应该是在问自能

如果在足够大的区域以外（在此区域中已可以近似为理想磁偶极子场）

直接计算场能，结果是一样的

$$E=\int_{r_0}^{\infty}\frac{\mu_0 m^2}{16\pi^2}\cdot\frac{1}{r^6}\cdot 2\pi r\cdot r\mathrm{d}r\sin\int_0^{\pi}\left(1+3\cos^2\theta\right)\sin\theta\mathrm{d}\theta=\frac{\mu_0 m^2}{8\pi r_0^3}$$

(4) 相同，都是$(\vec{m}\cdot\nabla)\vec{B}$

证明：

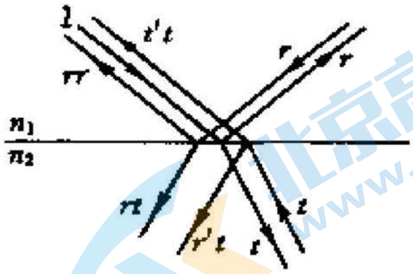
偶极子图像：$\vec{F}=\lim\limits_{d\to 0}\left[-q\vec{B}_{(\vec{r})}+q\vec{B}_{(\vec{r}+\vec{d})}\right]=\left(q\vec{d}\cdot\nabla\right)\vec{B}_{(\vec{r})}=(\vec{m}\cdot\nabla)\vec{B}$

电流环图像：$\vec{F}=\oint I\mathrm{d}\vec{n}\times\vec{B}_{(\vec{r}+\vec{n})}=I\oint\mathrm{d}\vec{n}\times\left[\vec{B}_{(\vec{r})}+(\vec{n}\cdot\nabla)\vec{B}_{(\vec{r})}\right]$

$$=I\oint\mathrm{d}\vec{n}\times\left[(\vec{n}\cdot\nabla)\vec{B}_{(\vec{r})}\right]=I\oint\nabla n\times(\vec{n}\cdot\nabla)\vec{B}_{(\vec{r})}\left|\mathrm{d}\vec{n}\right|=I\oint\mathrm{d}A\cdot\nabla\vec{B}=(\vec{m}\cdot\nabla)\vec{B}$$

五、量子透过率

(2) 证明斯托克斯倒逆关系：



如图，由光路的可逆性，有

$r^2+tt'=1,\ r'=-r$

在该题的表述下，有

$rr^*+t^*t'=1, r^*t+r't^*=0$

(1) 概率流密度：$\vec{j}=\frac{1}{2m}\left[\langle\psi|\vec{P}|\psi\rangle-\langle\psi^*|\vec{P}|\psi^*\rangle\right]$

对应的流密度为

$$\begin{cases} e^{ikx}\Rightarrow\frac{\hbar k}{m} \\ re^{-ikx}\Rightarrow-\frac{\hbar k}{m}rr^* \\ te^{ik'x}\Rightarrow\frac{\hbar k'}{m}tt^* \end{cases}$$

流守恒定律得$1=rr^*+\frac{k'}{k}tt^*$

(3) $t\rightarrow t$，$r\rightarrow re^{-2ik\Delta x}$

六、球坐标度规

(1) 协变度规张量$g_{\mu\nu}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & \sin^2\theta\end{pmatrix}$

逆变度规张量$g^{\mu\nu}=\dfrac{\Delta^{\mu\nu}}{g}$,$\Delta^{\mu\nu}$为$g_{\mu\nu}$的代数余子式，$g$为度规张量的行列式值

代入得 $g^{\mu\nu}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & \sin^{-2}\theta\end{pmatrix}$

(2) 联络的计算公式

$\Gamma^{\mu}_{\alpha\beta}=\dfrac{1}{2}g^{\mu\lambda}\left(g_{\alpha\lambda,\beta}+g_{\beta\lambda,\alpha}-g_{\alpha\beta,\lambda}\right)$,λ表示对λ求普通微商

代入度规张量的表达式，非零项仅有

$$g_{22,1}=\frac{\partial\sin^2\theta}{\partial\theta}=\sin 2\theta$$

联络中包含$g_{22,1}$的项有

$$\Gamma^{1}_{22}=-\frac{1}{2}g^{11}\times g_{22,1}=-\frac{1}{2}\sin 2\theta$$

$$\Gamma^{2}_{12}=\Gamma^{2}_{21}=\frac{1}{2}g^{22}\times g_{22,1}=\cot\theta$$

(3) 曲率张量的计算公式

$$R^{\rho}_{\lambda\mu\upsilon}=\Gamma^{\rho}_{\lambda\upsilon,\mu}-\Gamma^{\rho}_{\lambda\mu,\upsilon}+\Gamma^{\rho}_{\sigma\mu}\Gamma^{\sigma}_{\lambda\upsilon}-\Gamma^{\rho}_{\sigma\upsilon}\Gamma^{\sigma}_{\lambda\mu}$$

不为零的项中有

$$\Gamma^{1}_{22,1}=-\cos 2\theta,\Gamma^{2}_{12,1}=\Gamma^{2}_{21,1}=-\sin^{-2}\theta$$

利用曲率张量后两个指标反对称的性质$\left(R^{\rho}_{\lambda\mu\upsilon}=-R^{\rho}_{\lambda\upsilon\mu}\right)$

可判断$R^{1}_{111}=R^{2}_{222}=R^{1}_{222}=R^{2}_{111}=R^{2}_{211}=R^{1}_{122}=0$

计算得到$R^{1}_{121}=R^{1}_{112}=R^{2}_{212}=R^{2}_{221}=0$

曲率张量中不为零的项有

$$R^{2}_{121}=\Gamma^{2}_{11,2}-\Gamma^{2}_{12,1}+\Gamma^{2}_{\sigma2}\Gamma^{\sigma}_{11}-\Gamma^{2}_{\sigma1}\Gamma^{\sigma}_{12}=-\Gamma^{2}_{12,1}-\Gamma^{2}_{21}\Gamma^{2}_{12}=\sin^{-2}\theta-\cot^2\theta=1$$

$$R^{2}_{112}=-R^{2}_{121}=-1$$

$$R^{1}_{212}=\Gamma^{1}_{22,1}-\Gamma^{1}_{21,2}+\Gamma^{1}_{\sigma1}\Gamma^{\sigma}_{22}-\Gamma^{1}_{\sigma2}\Gamma^{\sigma}_{21}=\Gamma^{1}_{22,1}-\Gamma^{1}_{22}\Gamma^{2}_{21}=\sin^2\theta$$

（4）里奇张量为曲率张量的1,3缩并

$R_{11}=R_{121}^{2}=1$

$R_{22}=R_{212}^{1}=\sin^{2}\theta$

（5）曲率标量$R=g^{\mu\upsilon}R_{\mu\upsilon}=g^{11}R_{11}+g^{22}R_{22}=2$

（6）测地线方程$\frac{\mathrm{d}^{2}x^{\mu}}{\mathrm{d}\tau^{2}}+\Gamma_{\alpha\beta}^{\mu}\frac{\mathrm{d}x^{\alpha}}{\mathrm{d}\tau}\frac{\mathrm{d}x^{\beta}}{\mathrm{d}\tau}=0$

代入得到

$$\begin{cases}\frac{\mathrm{d}^{2}\varphi}{\mathrm{d}\tau^{2}}+\Gamma_{12}^{2}\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}\tau}\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}\tau}=0\\ \frac{\mathrm{d}^{2}\theta}{\mathrm{d}\tau^{2}}+\Gamma_{22}^{1}\left(\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}\tau}\right)^{2}=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\frac{\mathrm{d}^{2}\varphi}{\mathrm{d}\tau^{2}}+\cot\theta\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}\tau}\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}\tau}=0\\ \frac{\mathrm{d}^{2}\theta}{\mathrm{d}\tau^{2}}-\frac{1}{2}\sin 2\theta\left(\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}\tau}\right)^{2}=0\end{cases}$$

解该方程即可得到大圆方程

关于我们

北京高考在线创办于 2014 年，隶属于北京太星网络科技有限公司，是北京地区极具影响力的中学升学服务平台。主营业务涵盖：北京新高考、高中生涯规划、志愿填报、强基计划、综合评价招生和学科竞赛等。

北京高考在线旗下拥有网站门户、微信公众平台等全媒体矩阵生态平台。平台活跃用户 50W+，网站年度流量数千万量级。用户群体立足于北京，辐射全国 31 省市。

北京高考在线平台一直秉承“精益求精、专业严谨”的建设理念，不断探索“K12 教育+互联网+大数据”的运营模式，尝试基于大数据理论为广大中学和家长提供新鲜的高考资讯、专业的高考政策解读、科学的升学规划等，为广大高校、中学和教科研单位提供“衔接和桥梁纽带”作用。

平台自创办以来，为众多重点大学发现和推荐优秀生源，和北京近百所中学达成合作关系，累计举办线上线下升学公益讲座数千场，帮助数十万考生顺利通过考入理想大学，在家长、考生、中学和社会各界具有广泛的口碑影响力

未来，北京高考在线平台将立足于北京新高考改革，基于对北京高考政策研究及北京高校资源优势，更好的服务全国高中家长和学生。

推荐大家关注北京高考在线网站官方微信公众号：京考一点通，我们会持续为大家整理分享最新的高中升学资讯、政策解读、热门试题答案、招生通知等内容！