2021届高三1月八省联考考前热身押题卷

数学

一、单选题(本题共8小题．在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的).

1．已知集合 $A=\{x\in N|1\le x\le 4\}$，$B=\left\{x\in R|\ x^2-5x+6\le 0\right\}$，$C=\left\{x|\ x^2=9\right\}$，则 $(A\cap B)\cup C=$（　　）

A．$\{2,3\}$　　B．$\{-3,2,3\}$　　C．$\{-3,3\}$　　D．$\{-3,2,3,4\}$

2．设复数 z_1，z_2 在复平面内对应的点关于实轴对称，$z_1=2+i$，则 $\dfrac{z_1}{z_2}=$（　　）

A．$1+i$　　B．$\dfrac{3}{5}+\dfrac{4}{5}i$

C．$1+\dfrac{4}{5}i$　　D．$1+\dfrac{4}{3}i$

3．命题 p："$3<m<5$"是命题 q："曲线 $\dfrac{x^2}{m-3}-\dfrac{y^2}{5-m}=1$"表示双曲线"的（　　）

A．充要条件　　B．充分不必要条件

C．必要不充分条件　　D．既不充分也不必要条件

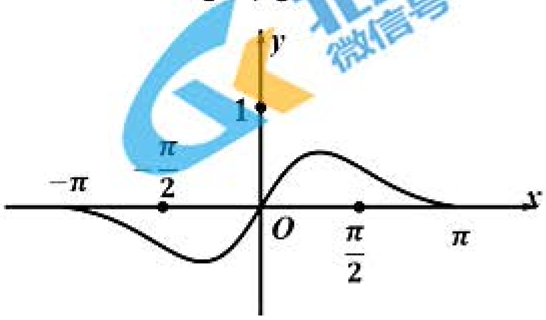
4．设 $a>0,b>0,\lg\sqrt{2}$ 是 $\lg 4^a$ 与 $\lg 2^b$ 的等差中项，则 $\dfrac{2}{a}+\dfrac{1}{b}$ 的最小值为（　　）

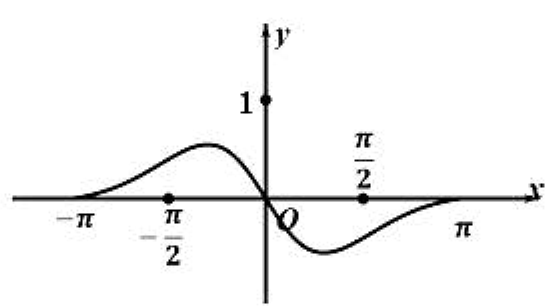
A．$2\sqrt{2}$　　B．3　　C．9　　D．$3\sqrt{2}$

5．已知 $\sin\left(\alpha-\dfrac{\pi}{3}\right)+\sqrt{3}\cos\alpha=\dfrac{1}{3}$，则 $\sin\left(2\alpha+\dfrac{\pi}{6}\right)$ 的值为（　　）

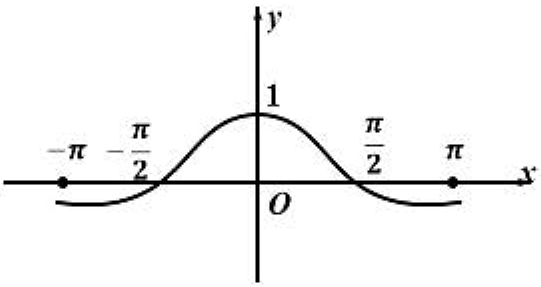
A．$\dfrac{1}{3}$　　B．$-\dfrac{1}{3}$　　C．$\dfrac{7}{9}$　　D．$-\dfrac{7}{9}$

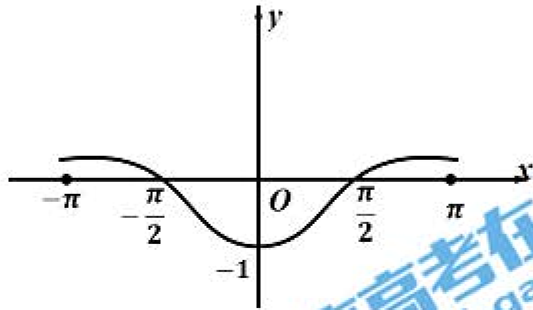
6．函数 $f(x)=\dfrac{2\sin x}{e^x+e^{-x}}$ 在 $[-\pi,\pi]$ 的大致图象是（　　）．

A．

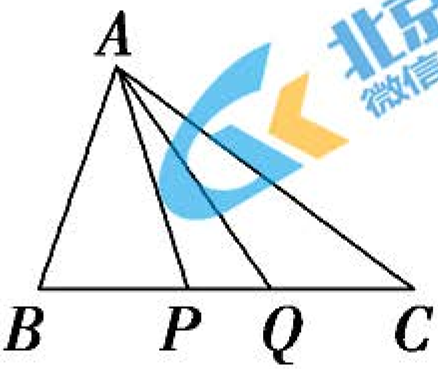
B．

北京高考在线 微信号：bj-gaokao

C. 

D. 

7．将一线段 AB 分为两线段 AC，CB，使得其中较长的一段 AC 是全长 AB 与另一段 CB 的比例中项，即满足 $\frac{AC}{AB}=\frac{BC}{AC}=\frac{\sqrt{5}-1}{2}\approx 0.618$，后人把这个数称为黄金分割，把点 C 称为线段 AB 的黄金分割点．图中在△ABC 中，若点 P，Q 为线段 BC 的两个黄金分割点，在△ABC 内任取一点 M，则点 M 落在△APQ 内的概率为（　　）



A．$\frac{\sqrt{5}-1}{2}$　　　　B．$\sqrt{5}-2$

C．$\frac{\sqrt{5}-1}{4}$　　　　D．$\frac{\sqrt{5}-2}{2}$

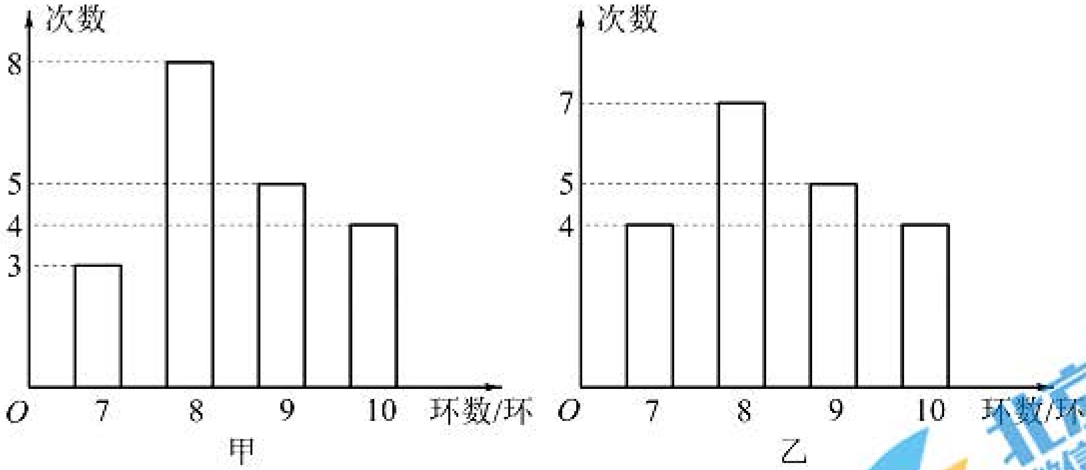
8．已知抛物线 $C_1: y^2=2px\left(p>0\right)$ 的焦点为 F，准线与 x 轴的交点为 E，线段 EF 被双曲线 $C_2: \frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 顶点三等分，且两曲线 C_1，C_2 的交点连线过曲线 C_1 的焦点 F，则双曲线 C_2 的离心率为（　　）

A．$\sqrt{2}$　　B．$\frac{3\sqrt{2}}{2}$　　C．$\frac{\sqrt{11}}{3}$　　D．$\frac{\sqrt{22}}{2}$

二、多选题本题共 4 小题．在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求．

9．甲、乙两名射击运动员在某次测试中各射击 20 次，两人测试成绩的条形图如图所示，则（　　）

北京高考在线 bj-gaokao 微信号：bj-gaokao



A. 甲运动员测试成绩的中位数等于乙运动员测试成绩的中位数

B. 甲运动员测试成绩的众数大于乙运动员测试成绩的众数

C. 甲运动员测试成绩的平均数大于乙运动员测试成绩的平均数

D. 甲运动员测试成绩的方差小于乙运动员测试成绩的方差

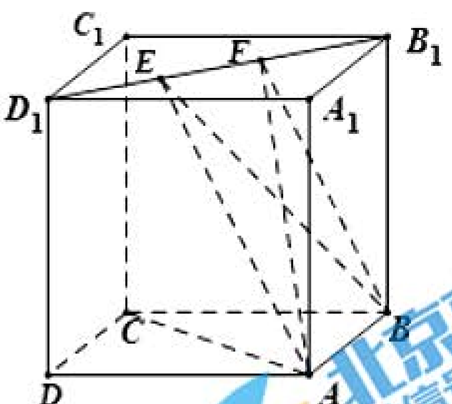
10. 若函数 $f(x)=\sqrt{3}\sin 2x+3\sin^2 x+\cos^2 x$ 在 $[-a,a]$ 上为增函数，则（　　）

A. 实数 a 的取值范围为 $\left(0,\dfrac{\pi}{6}\right]$　　　B. 实数 a 的取值范围为 $\left(0,\dfrac{\pi}{3}\right]$

C. 点 $\left(\dfrac{\pi}{12},2\right)$ 为曲线 $y=f(x)$ 的对称中心　　D. 直线 $x=\dfrac{\pi}{3}$ 为曲线 $y=f(x)$ 的对称轴

11. 如图，正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的棱长为 1，线段 B_1D_1 上有两个动点 E，F，且 $EF=\dfrac{1}{2}$，

则下列结论中正确的是（ ）



A. 异面直线 AE、BF 所成角为定值

B. 　　$AC\perp BF$

C. $\triangle AEF$ 的面积与 $\triangle BEF$ 的面积相等

D. 三棱锥 $A-BEF$ 的体积为定值

北京高考在线 微信号：bj-gaokao

12．定义在R上的函数$f(x)$满足：$f(x)+f'(x)>1$，$f(0)=4$，则关于不等式$e^x f(x)>e^x+3$的表述正确的为（　　）

A．解集为$(0,+\infty)$　　　　B．解集为$(-\infty,0)\cup(3,+\infty)$

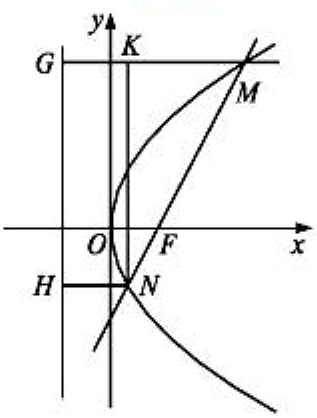
C．在$[-2,2]$上有解　　　　D．在$[-2,2]$上恒成立

三、填空题本题共 4 小题．

13．已知非零向量$\vec{a}$、$\vec{b}$满足$3|\vec{b}|=4|\vec{a}|$，若$\vec{b}\perp(-4\vec{a}+\vec{b})$，则$\vec{a}$、$\vec{b}$夹角的大小为_________.

14．若函数$f(x)$满足$f(x+2)=\dfrac{x+3}{x+2}$，则$f(x)$在$[1,+\infty)$上的值域为______.

15．已知M,N是过抛物线$C:y^2=2px(p>0)$的焦点F的直线l与抛物线C的交点，O是坐标原点，且满足$\overline{MF}=3\overline{FN}$，$S_{\triangle OMN}=\sqrt{3}|MN|$，则$p$的值为_____.



16．记数列$\{a_n\}$的前n项和为S_n，已知$na_{n+1}-(n+1)a_n+\dfrac{1}{2}=0$，且$a_1=\dfrac{3}{2}$．若对任意的$n\in N^*$，都有$m>\dfrac{S_n}{2^n}$，则实数$m$的取值范围为______.

四、解答题本大题共 6 小题．解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤．

17．在①$b\sin A+a\sin B=4c\sin A\sin B$，②$\cos 2C-2\sqrt{3}\sin^2\dfrac{C}{2}+\sqrt{3}=2$，③$(a-\sqrt{3}b)\sin A+b\sin B=c\sin C$，这三个条件中任选一个，补充到下面的问题中，并解决该问题．已知△ABC中，a，b，c分别为内角A，B，C的对边，$\sin A\sin B=\dfrac{1+\sqrt{3}}{4}$，$c=2$，___________，求角$C$及△$ABC$的面积$S$．

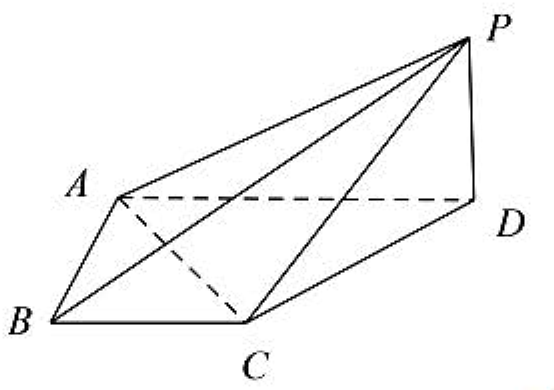
18．设数列$\{a_n\}$、$\{b_n\}$的前n项和分别为S_n、T_n，且$S_n=\dfrac{1}{2}(3n^2+7n)$，$T_n=2(b_n-1)$ $(n\in N^*)$，

北京高考在线 微信号：bj-gaokao

（1）求数列$\{a_n\}$、$\{b_n\}$的通项公式；

（2）令$c_n=a_n\cdot b_n$，求$\{c_n\}$的前n项和U_n.

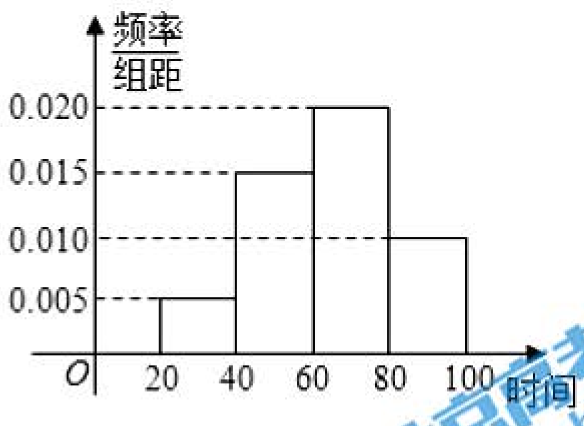
19. 如图，四棱锥$P-ABCD$，$PD\perp$平面$ABCD$，$AD//BC$，$AB\perp BC$，$AB=BC=PD=1,AD=2$.



（1）求证：平面$PAC\perp$上平面PCD

（2）求平面PAB与平面PCD所成锐二面角的余弦值.

20. 2020年国庆节期间，我国高速公路继续执行“节假日高速公路免费政策”.某路桥公司为掌握国庆节期间车辆出行的高峰情况，在某高速公路收费站点记录了3日上午9:20~10:40这一时间段内通过的车辆数，统计发现这一时间段内共有600辆车通过该收费站点，它们通过该收费站点的时刻的频率分布直方图如下图所示，其中时间段9:20~9:40记作$[20,40)$、9:40~10:00记作$[40,60)$，10:00~10:20记作$[60,80)$，10:20~10:40记作$[80,100)$，例如：10点04分，记作时刻64.



（Ⅰ）估计这600辆车在9:20~10:40时间内通过该收费站点的时刻的平均值（同一组中的数据用该组区间的中点值代表）；

（Ⅱ）为了对数据进行分析，现采用分层抽样的方法从这600辆车中抽取10辆，再从这10辆车随机抽取4辆，设抽到的4辆车中，在9:20~10:00之间通过的车辆数为X，求X的分布列；

（Ⅲ）根据大数据分析，车辆在每天通过该收费站点的时刻T服从正态分布$N\sim(\mu,\sigma^2)$，其中

μ 可用3日数据中的600辆车在9:20~10:40之间通过该收费站点的时刻的平均值近似代替，σ^2 用样本的方差近似代替（同一组中的数据用该组区间的中点值代表）. 假如4日全天共有1000辆车通过该收费站点，估计在9:46~10:40之间通过的车辆数（结果保留到整数）.

附：若随机变量 T 服从正态分布 $N\left(\mu,\sigma^2\right)$，则 $P(\mu-\sigma<T\le\mu+\sigma)=0.6827$，

$P(\mu-2\sigma<T\le\mu+2\sigma)=0.9545$；$P(\mu-3\sigma<T\le\mu+3\sigma)=0.9973$.

21. 已知点 $F(1,0)$，直线 L：$x=-1$，P 为平面上的动点，过点 P 作直线 L 的垂线，垂足为 Q，且 $\overline{QP}\cdot\overline{QF}=\overline{FP}\cdot\overline{FQ}$.

（1）求点 P 的轨迹 C 的方程.

（2）是否存在正数 m，对于过点 $M(m,0)$ 且与曲线 C 有两个交点 A，B 的任一直线，都有 $\overline{FA}\cdot\overline{FB}<0$？若存在，求出 m 的取值范围；若不存在，请说明理由.

22. 已知函数 $f\left(x\right)=a\ln x+x+2a\left(a\in R\right)$

（1）讨论函数 $f\left(x\right)$ 的单调性；

（2）若 $0<a<\dfrac{e}{4}$，求证：$f\left(x\right)<x+\dfrac{e^x}{x}$.

参考答案

1．B

解：由题意化简集合得：$A=\{1,2,3,4\}$，$B=\{x|2\le x\le 3\}$，$C=\{-3,3\}$

所以$A\cap B=\{2,3\}$，

所以$(A\cap B)\cup C=\{2,3\}\cup\{-3,3\}=\{-3,2,3\}$.

2．B

因为复数z_1，z_2在复平面内对应的点关于实轴对称，$z_1=2+i$，所以$z_2=2-i$，

所以$\frac{z_1}{z_2}=\frac{2+i}{2-i}=\frac{(2+i)^2}{5}=\frac{3}{5}+\frac{4}{5}i$.

3．A

曲线$\frac{x^2}{m-3}-\frac{y^2}{5-m}=1$表示双曲线，

可得$(m-3)(5-m)>0$，解得$3<m<5$，

命题p：“$3<m<5$”是命题q：“曲线$\frac{x^2}{m-3}-\frac{y^2}{5-m}=1$”表示双曲线”的充要条件，

4．C

解：Q $a>0,b>0,\lg\sqrt{2}$是$\lg 4^a$与$\lg 2^b$的等差中项，

$\therefore 2\lg\sqrt{2}=\lg 4^a+\lg 2^b,\therefore \lg 2=\lg 2^{2a+b}$，

即$2=2^{2a+b}$，即$2a+b=1$，

则$\frac{2}{a}+\frac{1}{b}=\left(\frac{2}{a}+\frac{1}{b}\right)(2a+b)=5+\frac{2a}{b}+\frac{2b}{a}\ge 5+2\sqrt{\frac{2a}{b}\cdot\frac{2b}{a}}=9$，

当且仅当$\frac{2a}{b}=\frac{2b}{a}$，即$a=b=\frac{1}{3}$时取等号.

5．D

因为$\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{3}\right)+\sqrt{3}\cos\alpha=\frac{1}{2}\sin\alpha-\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\alpha+\sqrt{3}\cos\alpha=\frac{1}{2}\sin\alpha+\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\alpha$

$=\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{3}\right)=\sin\left(\frac{\pi}{2}+\alpha-\frac{\pi}{6}\right)=\cos\left(\alpha-\frac{\pi}{6}\right)=\frac{1}{3}$，

北京高考在线 微信号：bj-gaokao

所以$\sin\left(2\alpha+\frac{\pi}{6}\right)=\sin\left(\frac{\pi}{2}+2\alpha-\frac{\pi}{3}\right)=\cos\left(2\alpha-\frac{\pi}{3}\right)=2\cos^2\left(\alpha-\frac{\pi}{6}\right)-1=2\times\left(\frac{1}{3}\right)^2-1=-\frac{7}{9}$，

6. A

因为$f(x)=\frac{2\sin x}{e^x+e^{-x}}$，所以$f(-x)=\frac{2\sin(-x)}{e^{-x}+e^x}=-\frac{2\sin x}{e^x+e^{-x}}=-f(x)$，所以$f(x)$为$[-\pi,\pi]$上的奇函数，其图象关于原点对称，故C、D不正确；

当$x\in(0,\pi)$时，$\sin x>0$，所以$f(x)>0$，故B不正确；

7. B

由几何概型公式知，

所求概率为$\frac{S_{\triangle APQ}}{S_{\triangle ABC}}=\frac{PQ}{BC}=\frac{BQ-BP}{BC}=\frac{\frac{\sqrt{5}-1}{2}BC-\left(1-\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)BC}{BC}=\sqrt{5}-2$.

8. D

抛物线$y^2=2px$的焦点为$F(\frac{p}{2},0)$，准线方程为$x=-\frac{p}{2}$，$E(-\frac{p}{2},0)$，

$|EF|=p$，

因为线段EF被双曲线$C_2:\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$顶点三等分，所以$2a=\frac{p}{3}$，即$p=6a$，

因为两曲线C_1，C_2的交点连线过曲线C_1的焦点F，所以两个交点为$(\frac{p}{2},p)$、$(\frac{p}{2},-p)$，

将$(\frac{p}{2},p)$代入双曲线$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$得$\frac{p^2}{4a^2}-\frac{p^2}{b^2}=1$，

所以$\frac{36a^2}{4a^2}-\frac{36a^2}{b^2}=1$，所以$9-\frac{36a^2}{b^2}=1$，所以$\frac{b^2}{a^2}=\frac{9}{2}$，

所以双曲线C_2的离心率$e=\frac{c}{a}=\sqrt{\frac{c^2}{a^2}}=\sqrt{\frac{a^2+b^2}{a^2}}=\sqrt{1+\frac{b^2}{a^2}}=\sqrt{1+\frac{9}{2}}=\frac{\sqrt{22}}{2}$.

9. AD

由图可得甲运动员测试成绩中3次7环，8次8环，5次9环，4次10环，

所以甲运动员测试成绩的中位数为8，众数为8，

平均数为$\frac{3\times7+8\times8+5\times9+4\times10}{20}=8.5$，

方差 $\dfrac{(7-8.5)^2\times3+(8-8.5)^2\times8+(9-8.5)^2\times5+(10-8.5)^2\times4}{20}=\dfrac{19}{20}$；

乙运动员测试成绩中4次7环，7次8环，4次9环，5次10环，

所以乙运动员测试成绩的中位数为8，众数为8，

平均数为 $\dfrac{4\times7+7\times8+4\times9+5\times10}{20}=8.5$，

方差 $\dfrac{(7-8.5)^2\times4+(8-8.5)^2\times7+(9-8.5)^2\times4+(10-8.5)^2\times5}{20}=\dfrac{23}{20}$，

故选项A正确，B不正确，C不正确，D正确，

10．ACD

由题意，函数 $f(x)=\sqrt{3}\sin2x+3\sin^2x+\cos^2x=\sqrt{3}\sin2x+2\sin^2x+1$

$=\sqrt{3}\sin2x-\cos2x+2=2\sin\left(2x-\dfrac{\pi}{6}\right)+2$，

令 $-\dfrac{\pi}{2}\le2x-\dfrac{\pi}{6}\le\dfrac{\pi}{2}$，可得 $-\dfrac{\pi}{6}\le x\le\dfrac{2\pi}{3}$，所以 $0<a\le\dfrac{\pi}{6}$，所以A正确，B不正确；

令 $x=\dfrac{\pi}{12}$，可得 $f(\dfrac{\pi}{12})=2\sin\left(2\times\dfrac{\pi}{12}-\dfrac{\pi}{6}\right)+2=2$，

所以点 $\left(\dfrac{\pi}{12},2\right)$ 为曲线 $y=f(x)$ 的对称中心，所以C正确；

令 $x=\dfrac{\pi}{3}$，可得 $f(\dfrac{\pi}{3})=2\sin\left(2\times\dfrac{\pi}{3}-\dfrac{\pi}{6}\right)+2=4$，所以 $x=\dfrac{\pi}{3}$ 为曲线 $y=f(x)$ 的对称轴，所以D正确．

11．BD

解：以 D 为坐标原点，建立如图所示空间直角坐标系．

则 $A(1，0，0)$，$B(1，1，0)$，设 $E(a，a，1)$，

则 $F(a+\dfrac{\sqrt{2}}{2}，a+\dfrac{\sqrt{2}}{2}，1)$，

其中 $0\ \ a\ \ 1-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，

$\overline{AE}=(a-1,a,1)$，$\overline{BF}=(a+\dfrac{\sqrt{2}}{2}-1,a+\dfrac{\sqrt{2}}{2}-1,1)$，

北京高考在线 微信号：bj-gaokao

$\cos<\overrightarrow{AE},\overrightarrow{BF}>=\dfrac{\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{BF}}{|\overrightarrow{AE}|\cdot|\overrightarrow{BF}|}=\dfrac{(2a-1)(a+\frac{\sqrt{2}}{2}-1)+1}{\sqrt{(a-1)^2+a^2+1}\cdot\sqrt{2(a+\frac{\sqrt{2}}{2}-1)^2+1}}$.

取 $a=0$ 时，$\cos<\overrightarrow{AE},\overrightarrow{BF}>=\dfrac{4-\sqrt{2}}{4\sqrt{2-\sqrt{2}}}$，

取 $a=1-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ 时，$\cos<\overrightarrow{AE},\overrightarrow{BF}>=\dfrac{1}{\sqrt{3-\sqrt{2}}}$，

$\because \dfrac{4-\sqrt{2}}{4\sqrt{2-\sqrt{2}}}\neq\dfrac{1}{\sqrt{3-\sqrt{2}}}$，$\therefore$ 异面直线 AE、BF 所成角不是定值，故 A 错误；

由正方体的结构特征可知，$DD_1\perp AC$，$BD\perp AC$，又 $BD\bigcap DD_1=D$，

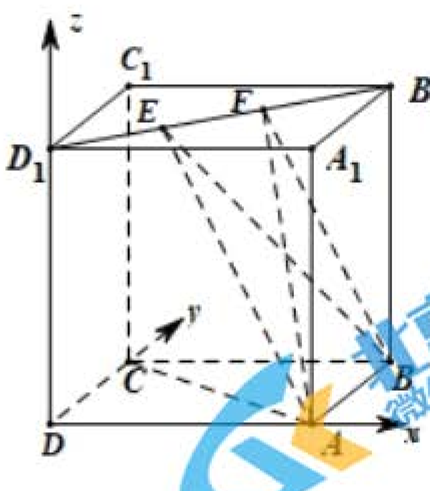
$\therefore AC\perp$ 平面 BDD_1B_1，则 $AC\perp BF$，故 B 正确；

B 到 B_1D_1 的距离为 $BB_1=1$，A 到 B_1D_1 的距离大于上下底面中心的连线，则 A 到 B_1D_1 的距离大于 1，

$\therefore \Delta AEF$ 的面积大于 ΔBEF 的面积，故 C 错误；

A 到平面 BDD_1B_1 的距离为 $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，$\triangle BEF$ 的面积为定值，$\therefore$ 三棱锥 $A-BEF$ 的体积为定值，故 D 正确.

故选：BD.



12. AC

令 $g(x)=e^x[f(x)-1]$，$x\in\mathbf{R}$，则 $g'(x)=e^x[f(x)-1+f'(x)]$，

$\because f(x)+f'(x)>1$，

$\therefore g'(x)>0$恒成立，即$g(x)$在R上单调递增.

$\because f(0)=4$，

$\therefore g(0)=e^0\left[f(0)-1\right]=3$.

不等式$e^x f(x)>e^x+3$可化为$e^x\left[f(x)-1\right]>3$，等价于$g(x)>g(0)$，

$\therefore x>0$，即不等式式$e^x f(x)>e^x+3$的解集为$(0,+\infty)$，

则在$[-2,2]$上有解，故选项AC正确.

13．$\arccos\dfrac{1}{3}$

因为$\vec{b}\perp(-4\vec{a}+b)$，所以$\vec{b}\cdot(-4\vec{a}+\vec{b})=0$，

所以$-4\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{b}^2=0$，即$\vec{a}\cdot\vec{b}=\dfrac{1}{4}\vec{b}^2=\dfrac{1}{4}|\vec{b}|^2$，

所以$\cos<\vec{a},\vec{b}>=\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|}=\dfrac{\frac{1}{4}|\vec{b}|^2}{\frac{3}{4}|\vec{b}|\cdot|\vec{b}|}=\dfrac{1}{3}$，

$<\vec{a},\vec{b}>=\arccos\dfrac{1}{3}$.

14．$(1,2]$

解：$\because f(x+2)=\dfrac{x+2+1}{x+2}$，

$\therefore f(x)=\dfrac{x+1}{x}=1+\dfrac{1}{x}$，

又$\because x\geq 1$，

$\therefore f(x)$在$[1,+\infty)$单调递减，

由$\because f(1)=1+1=2$，

$\therefore 1<f(x)\leq 2$，

$\therefore$函数$f(x)$的值域为$(1,2]$.

15．8

解：不妨设直线MN的斜率$k>0$，过M,N作抛物线准线的垂线，垂足分别为G,H，过N作$NK\perp MG$于K，

由$\overrightarrow{MF}=3\overrightarrow{FN}$，得$|MF|=3|FN|$，$\therefore |MG|=3|NH|$，

$\therefore |MK|=2|NH|=2|NF|=\dfrac{1}{2}|MN|$，

$\therefore |NK|=\sqrt{|MN|^2-|MK|^2}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}|MN|$，

由$S_{\triangle OMN}=S_{\triangle OMF}+S_{\triangle ONF}=\dfrac{1}{2}|OF|\cdot|NK|=\dfrac{\sqrt{3}}{8}p|MN|$，

又$S_{\triangle OMN}=\sqrt{3}|MN|$，

所以$\dfrac{\sqrt{3}}{8}p|MN|=\sqrt{3}|MN|$，

$\therefore p=8$.

16．$(1,+\infty)$

依题意，$na_{n+1}-(n+1)a_n+\dfrac{1}{2}=0$，则$(n+1)a_{n+2}-(n+2)a_{n+1}+\dfrac{1}{2}=0$，

两式相减，可得$a_{n+2}-2a_{n+1}+a_n=0$，所以$\{a_n\}$为等差数列，

由$na_{n+1}-(n+1)a_n+\dfrac{1}{2}=0$，得$a_2-2a_1+\dfrac{1}{2}=0$，又$a_1=\dfrac{3}{2}$，解得$a_2=\dfrac{5}{2}$，

所以$d=a_2-a_1=1$，则$S_n=\dfrac{3}{2}n+\dfrac{n(n-1)}{2}$，所以$\dfrac{S_n}{2^n}=\dfrac{n^2+2n}{2^{n+1}}$.

令$b_n=\dfrac{S_n}{2^n}=\dfrac{n^2+2n}{2^{n+1}}$，$b_{n+1}-b_n=\dfrac{3-n^2}{2^{n+2}}$，

当$n\geq 2$时，$b_{n+1}-b_n<0$，数列$\{b_n\}$单调递减，

而$b_1=\dfrac{3}{4}$，$b_2=1$，$b_3=\dfrac{15}{16}$，故$m>1$.

故答案为：$(1,+\infty)$.

17．

选① $b\sin A+a\sin B=4c\sin A\sin B$，

因为 $b\sin A+a\sin B=4c\sin A\sin B$，

所以由正弦定理得 $\sin B\sin A+\sin A\sin B=4\sin C\sin A\sin B$，

即 $2\sin B\sin A=4\sin C\sin A\sin B$，所以 $\sin C=\frac{1}{2}$，

因为 $C\in(0,\pi)$，所以 $C=\frac{\pi}{6}$ 或 $C=\frac{5\pi}{6}$.

若 $C=\frac{5\pi}{6}$，由 $\sin A\sin B=\frac{1+\sqrt{3}}{4}$，

而 $A<\frac{\pi}{6}$，$B<\frac{\pi}{6}$，从而 $\sin A\sin B<\frac{1}{4}$，矛盾，舍去.

故 $C=\frac{\pi}{6}$，

接下来求△ABC 的面积 S.

法一：设△ABC 外接圆的半径为 R，则由正弦定理得 $2R=\frac{c}{\sin C}=\frac{2}{\sin\frac{\pi}{6}}=4$，

$\therefore a=2R\sin A=4\sin A$，$b=2R\sin B=4\sin B$，

$\therefore ab=16\sin A\sin B=4(1+\sqrt{3})$，

$\therefore S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}ab\sin C=\frac{1}{2}\times 4(1+\sqrt{3})\times\frac{1}{2}=1+\sqrt{3}$.

法二：由（1）得 $\cos C=\frac{\sqrt{3}}{2}$，即 $\cos A\cos B-\sin A\sin B=-\frac{\sqrt{3}}{2}$，

$\because \sin A\sin B=\frac{1+\sqrt{3}}{4}$，$\therefore \cos A\cos B=\frac{1-\sqrt{3}}{4}$，

$\therefore \cos(A-B)=\cos A\cos B+\sin A\sin B=\frac{1}{2}$，

$\because A-B\in(-\frac{5\pi}{6},\frac{5\pi}{6})$，$\therefore A-B=\frac{\pi}{3}$ 或 $B-A=\frac{\pi}{3}$，

当 $A-B=\frac{\pi}{3}$ 时，又 $A+B=\frac{5\pi}{6}$，$\therefore A=\frac{7\pi}{12}$，$B=\frac{\pi}{4}$，

由正弦定理得 $b=\frac{c\sin B}{\sin C}=\frac{2\sin\frac{\pi}{4}}{\sin\frac{\pi}{6}}=2\sqrt{2}$，

$\therefore S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}bc\sin A=\frac{1}{2}\times 2\sqrt{2}\times 2\sin\frac{7\pi}{12}=2\sqrt{2}(\frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{\sqrt{3}}{2})=1+\sqrt{3}$，

当 $B-A=\frac{\pi}{3}$ 时，同理可得 $S_{\triangle ABC}=1+\sqrt{3}$，

故$\triangle ABC$的面积为$1+\sqrt{3}$.

选②$\cos 2C-2\sqrt{3}\sin^2\dfrac{C}{2}+\sqrt{3}=2$,

因为$\cos 2C-2\sqrt{3}\sin^2\dfrac{C}{2}+\sqrt{3}=2$,

所以$2\cos^2 C-1-\sqrt{3}(1-\cos C)+\sqrt{3}-2=0$，即$2\cos^2 C+\sqrt{3}\cos C-3=0$,

$(2\cos C-\sqrt{3})(\cos C+\sqrt{3})=0$,

所以$\cos C=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$或$\cos C=-\sqrt{3}$（舍），

因为$C\in(0,\pi)$，所以$C=\dfrac{\pi}{6}$.

以下同解法同①，

选③$(a-\sqrt{3}b)\sin A+b\sin B=c\sin C$,

由$(a-\sqrt{3}b)\sin A+b\sin B=c\sin C$及正弦定理得$\left(a-\sqrt{3}b\right)a+b^2=c^2$,

即$a^2+b^2-c^2=\sqrt{3}ab$,

由余弦定理得$\cos C=\dfrac{a^2+b^2-c^2}{2ab}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$,

$\because 0<C<\pi$,

$\therefore C=\dfrac{\pi}{6}$,

18.

（1）由$S_n=\dfrac{1}{2}(3n^2+7n)$得$a_1=S_1=5$,

当$n\ge 2$时，$a_n=S_n-S_{n-1}=\dfrac{1}{2}(3n^2+7n)-\dfrac{1}{2}\left[3(n-1)^2+7(n-1)\right]=3n+2$,

当$n=1$时，$a_1=3+2=5$也适合，

故$a_n=3n+2$.

由$T_n=2(b_n-1)$得$b_1=T_1=2(b_1-1)$，得$b_1=2$,

当$n\ge 2$时，$b_n=T_n-T_{n-1}=2(b_n-1)-2(b_{n-1}-1)$，得$b_n=2b_{n-1}$,

又$b_1=2$，所以$\dfrac{b_n}{b_{n-1}}=2$，所以数列$\{b_n\}$是首项为2，公比为2的等比数列，

所以$b_n=2\times 2^{n-1}=2^n$.

综上所述：$a_n=3n+2$，$b_n=2^n$.

（2）$c_n=a_nb_n=(3n+2)\times 2^n$，

所以$U_n=5\times 2^1+8\times 2^2+11\times 2^3+\cdots+(3n+2)\times 2^n$，

所以$2U_n=5\times 2^2+8\times 2^3+11\times 2^4+\cdots+(3n+2)\times 2^{n+1}$，

所以$U_n-2U_n=5\times 2+3(2^2+2^3+\cdots+2^n)-(3n+2)\times 2^{n+1}$，

所以$-U_n=4+3(2+2^2+2^3+\cdots+2^n)-(3n+2)\times 2^{n+1}$

$=4+3\times\dfrac{2(1-2^n)}{1-2}-(3n+2)\times 2^{n+1}$

$=(-6n+2)\times 2^n-2$，

所以$U_n=(3n-1)\times 2^{n+1}+2$.

19.

（1）证明：$\because AD//BC$，$AB\perp BC$，$AB=BC=1,AD=2$，

$\therefore AC=\sqrt{2}$，$CD=\sqrt{2}$，$AC^2+CD^2=AD^2$，$\therefore AC\perp CD$，

$\because PD\perp$平面$ABCD$，$AC\subset$平面$ABCD$，$\therefore PD\perp AC$，又$CD\cap PD=D$

$\therefore AC\perp$平面PCD，又$AC\subset$平面PAC，$\therefore$平面$PAC\perp$平面PCD.

（2）以AB,AD为x,y轴，过A平行DP的直线为z轴，建立空间直角坐标系$A-xyz$，

则$A(0,0,0),B(1,0,0),C(1,1,0),D(0,2,0),P(0,2,1)$，

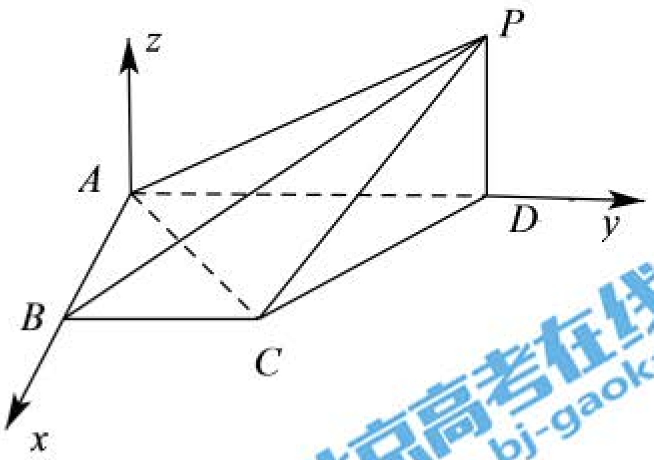
$\overline{AP}=(0,2,1)$，$\overline{AB}=(1,0,0)$，设平面PAB的一个法向量为$\vec{m}=(x,y,z)$，

则$\begin{cases}\vec{m}\cdot\overline{AP}=2y+z=0\\ \vec{m}\cdot\overline{AB}=x=0\end{cases}$，取$y=1$，则$\vec{m}=(0,1,-2)$，

由（1）知平面PCD的一个法向量为$\overline{AC}=(1,1,0)$，

$\cos<\overrightarrow{AC},\overrightarrow{m}>=\dfrac{\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{m}}{|\overrightarrow{AC}||\overrightarrow{m}|}=\dfrac{1}{\sqrt{2}\times\sqrt{5}}=\dfrac{\sqrt{10}}{10}$，

由图可得平面 PAB 与平面 PCD 所成锐二面角的余弦值为 $\dfrac{\sqrt{10}}{10}$.



20.

（I）这 600 辆车在 9:20~10:40 时间段内通过该收费点的时刻的平均值为：

$(30\times0.005+50\times0.015+70\times0.020+90\times0.010)\times20=64$，即 10：04

（II）由频率分布直方图和分层抽样的方法可知，抽取的 10 辆车中，在 10:00 前通过的车辆数就是位于时间分组中在 20，60 这一区间内的车辆数，

即 $(0.005+0.015)\times20\times10=4$，

所以 X 的可能的取值为 0，1，2，3，4.

所以 $P(X=0)=\dfrac{C_6^4}{C_{10}^4}=\dfrac{1}{14}$，$P(X=1)=\dfrac{C_6^3C_4^1}{C_{10}^4}=\dfrac{8}{21}$，$P(X=2)=\dfrac{C_6^2C_4^2}{C_{10}^4}=\dfrac{3}{7}$，

$P(X=3)=\dfrac{C_6^1C_4^3}{C_{10}^4}=\dfrac{4}{35}$，$P(X=4)=\dfrac{C_4^4}{C_{10}^4}=\dfrac{1}{210}$.

所以 X 的分布列为：

X	0	1	2	3	4
P	$\dfrac{1}{14}$	$\dfrac{8}{21}$	$\dfrac{3}{7}$	$\dfrac{4}{35}$	$\dfrac{1}{210}$

（III）由（1）得 $\mu=64$，

$\sigma^2_{车辆}=(30-64)^2\times0.1+(50-64)^2\times0.3+(70-64)^2\times0.4+(90-64)^2\times0.2=324$

所以$\sigma=18$，

估计在9:46~10:40之间通过的车辆数也就是在46，100通过的车辆数，

由$T\sim N\left(64,18^2\right)$，得

$$P(64-18\le T\le 64+2\times 18)=\frac{P(\mu-\sigma<T\le\mu+\sigma)}{2}+\frac{P(\mu-2\sigma<T\le\mu+2\sigma)}{2}=0.8186,$$

所以估计在在9:46~10:40之间通过的车辆数为$1000\times 0.8186\approx 819$.

21.

（1）设P的坐标为(x,y)，则$Q(-1,y)$，

可得$\overrightarrow{QP}=(x+1,0)$，$\overrightarrow{QF}=(2,-y)$，

$\overrightarrow{FP}=(x-1,y)$，$\overrightarrow{FQ}=(-2,y)$，

$\because \overrightarrow{QP}\cdot\overrightarrow{QF}=\overrightarrow{FP}\cdot\overrightarrow{FQ}$，

$\therefore (x+1)\cdot 2=(x-1)\cdot(-2)+y^2$，化简得$y^2=4x$，

即动点P的轨迹C的方程为：$y^2=4x$；'

（2）设直线l的方程为$x=ty+m$，

过点$M(m,0)\ (m>0)$的直线l与曲线C的交点为$A\left(x_1,y_1\right)$，$B\left(x_2,y_2\right)$，

联立$\begin{cases}x=ty+m\\y^2=4x\end{cases}$，消去$x$，得$y^2-4ty-4m=0$（*），

则y_1，y_2是方程（*）的两根，

$\therefore \Delta=16\left(t^2+m\right)>0$，且$\begin{cases}y_1+y_2=4t\\y_1\cdot y_2=-4m\end{cases}$，①

又$\because \overrightarrow{FA}=\left(x_1-1,y_1\right)$，$\overrightarrow{FB}=\left(x_2-1,y_2\right)$，

由$\overrightarrow{FA}\cdot\overrightarrow{FB}<0$，可得$\left(x_1-1\right)\left(x_2-1\right)+y_1y_2<0$，

即$x_1x_2-\left(x_1+x_2\right)+1+y_1y_2<0$，②

由于$x_1x_2=\frac{y_1^2}{4}\cdot\frac{y_2^2}{4}$，代入不等式②可得：

$\frac{y_1^2}{4}\cdot\frac{y_2^2}{4}+y_1y_2-\left(\frac{y_1^2}{4}+\frac{y_2^2}{4}\right)+1<0$，

化简得：$\frac{(y_1y_2)^2}{16}+y_1y_2-\frac{1}{4}\left[(y_1+y_2)^2-2y_1y_2\right]+1<0$，③

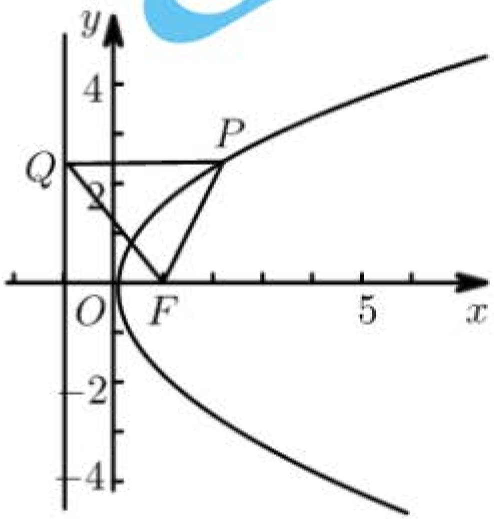
由①式，化简不等式③得 $m^2-6m+1<4t^2$，④

对任意实数 t，不等式 $4t^2\geq 0$ 恒成立，

∴不等式④对于一切 t 恒成立等价于 $m^2-6m+1<0$，

解之得 $3-2\sqrt{2}<m<3+2\sqrt{2}$，

由此可得：存在正数 m，对于过点 $M(m,0)$，且与曲线 C 有两个交点 A，B 的任一直线，都有 $\overline{FA}\cdot\overline{FB}<0$ 且 m 的取值范围是 $\left(3-2\sqrt{2},3+2\sqrt{2}\right)$.



22.

（1）函数 $f(x)$ 的定义域是 $(0,+\infty)$，$f'(x)=\frac{a}{x}+1=\frac{a+x}{x}$，

当 $a\geq 0$ 时，$f'(x)>0$ 在 $(0,+\infty)$ 上恒成立，

故函数 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增；

当 $a<0$ 时，$-a>0$，令 $f'(x)<0$，得 $0<x<-a$；

令 $f'(x)>0$，得 $x>-a$，

故函数 $f(x)$ 在 $(0,-a)$ 上单调递减，在 $(-a,+\infty)$ 上单调递增.

（2）证明：要证明 $f(x)<x+\frac{e^x}{x}$，

即证 $\frac{e^x}{x}>a(\ln x+2)$，即证 $\frac{e^x}{x^2}>\frac{a(\ln x+2)}{x}$.

设 $g(x)=\frac{e^x}{x^2}(x>0)$，则 $g'(x)=\frac{(x-2)e^x}{x^3}$，

当 $0<x<2$ 时，$g'(x)<0$；

当 $x>2$ 时，$g'(x)>0$，

所以 $g(x)$ 在 $(0,2)$ 上单调递减，在 $(2,+\infty)$ 上单调递增，

所以 $x=2$ 是 $g(x)$ 的极小值点，也是最小值点，

且 $g(x)_{\min}=g(2)=\frac{e^2}{4}$.

令 $h(x)=\frac{a(\ln x+2)}{x}(x>0)$，

则 $h'(x)=-\frac{a(\ln x+1)}{x^2}=-\frac{a(\ln x-\ln e^{-1})}{x^2}$

当 $0<x<e^{-1}$ 时，$h'(x)>0$；

当 $x>e^{-1}$ 时，$h'(x)<0$，

所以 $h(x)$ 在 $(0,e^{-1})$ 上单调递增，在 $(e^{-1},+\infty)$ 上单调递减，

所以 $x=e^{-1}$ 是 $h(x)$ 的极大值点，也是最大值点，且 $h(x)_{\max}=h(e^{-1})=ae$，

所以 $h(x)\le ae<\frac{e}{4}\cdot e=\frac{e^2}{4}\le g(x)$，

故 $f(x)<x+\frac{e^x}{x}$ 成立.