# 2018 北京市石景山区高三（上）期末

## 数　　学（理）

2018. 1

**第一部分（选择题 共 40 分）**

**一、选择题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分．在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项．**

1．已知集合 $A=\{-2,-1,0,1,2\}$，$B=\{x|(x-1)(x+2)<0\}$，则 $A\ \mathrm{I}\ B=$（　　）

A．$\{-1,0\}$　　B．$\{0,1\}$　　C．$\{-1,0,1\}$　　D．$\{0,1,2\}$

2．设 $i$ 是虚数单位，则复数 $\dfrac{i}{2+i}$ 在复平面内所对应的点位于（　　）

A．第一象限　　B．第二象限　　C．第三象限　　D．第四象限

3．用计算机在 $0:1$ 之间随机选取一个数 $a$，则事件“$\dfrac{1}{3}<a<1$”发生的概率为（　　）

A．$0$　　B．$1$　　C．$\dfrac{1}{3}$　　D．$\dfrac{2}{3}$

4．以角 $\theta$ 的顶点为坐标原点，始边为 $x$ 轴的非负半轴，建立平面直角坐标系，角 $\theta$ 终边过点 $P(2,4)$，则 $\tan\left(\theta+\dfrac{\pi}{4}\right)=$

（　　）

A．$-\dfrac{1}{3}$　　B．$-3$　　C．$\dfrac{1}{3}$　　D．$3$

5．“$m>10$”是“方程 $\dfrac{x^2}{m-10}-\dfrac{y^2}{m-8}=1$ 表示双曲线”的（　　）

A．充分不必要条件　　B．必要不充分条件

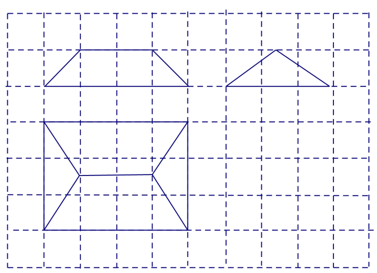
C．充分必要条件　　D．既不充分也不必要条件

6．给定函数① $y=x^{\frac{1}{2}}$，② $y=\log_{\frac{1}{2}}(x+1)$，③ $y=|x-1|$，④ $y=2^{x+1}$，其中在区间 $(0,1)$ 上单调递减的函数序号是（　　）

A．①④　　B．①②　　C．②③　　D．③④

7．《九章算术》卷五商功中有如下问题：今有刍甍（底面为矩形的屋脊状的几何体），下广三丈，袤四丈，上袤二丈，无广，高一丈，问积几何．下图网格纸中实线部分为此刍甍的三视图，设网格纸上每个小正方形的边长为 1 丈，那么此刍甍的体积为（　　）

A．3 立方丈　　B．5 立方丈　　C．6 立方丈　　D．12 立方丈



8． 小明在如图 1 所示的跑道上匀速跑步，他从点 $A$ 出发，沿箭头方向经过点 $B$ 跑到点 $C$，共用时 $30s$，他的教练选择了一个固定的位置观察小明跑步的过程，设小明跑步的时间为 $t(s)$，他与教练间的距离为 $y(m)$，表示 $y$ 与 $t$ 的函数关系的图象大致如图 2 所示，则这个固定位置可能是图 1 中的（　　）

A．点 $M$　　B．点 $N$　　C．点 $P$　　D．点 $Q$

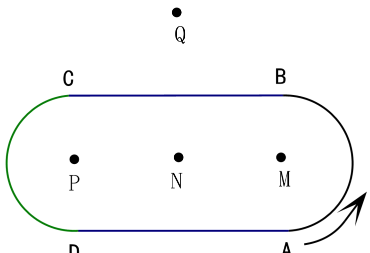


图1

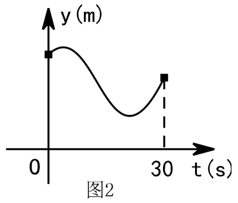


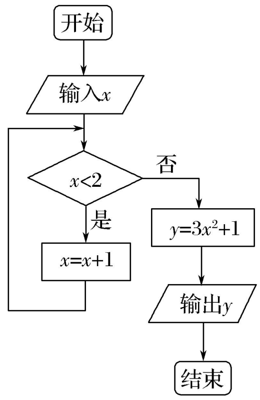
图2

**第二部分（非选择题共 110 分）**

**二、填空题共 6 小题，每小题 5 分，共 30 分．**

9．若 $a=\ln\frac{1}{2}$，$b=\left(\frac{1}{3}\right)^{0.8}$，$c=2^{\frac{1}{3}}$，则 $a,b,c$ 的大小关系为______．

10．执行下面的程序框图，若输入的 $x$ 的值为 $-1$，则输出的 $y$ 的值是________．




11. 若实数 $x,y$ 满足 $\begin{cases}x+y\leqslant 3,\\ x\leqslant y,\\ 2x+y\geqslant 3,\end{cases}$ 则 $z=3x+y$ 的取值范围为_________．

12. 设常数 $a\in R$，若 $(x^2+\frac{a}{x})^5$ 的二项展开式中 $x^7$ 项的系数为 $-10$，则 $a=$ ______．

13．在 $\Delta ABC$ 中，$H$ 为 $BC$ 上异于 $B$，$C$ 的任一点，$M$ 为 $AH$ 的中点，若 $\overrightarrow{AM}=\lambda\overrightarrow{AB}+\mu\overrightarrow{AC}$，则 $\lambda+\mu=$_________．

14．若集合 $\{a,b,c,d\}=\{1,2,3,4\}$，且下列四个关系：

①$a=1$；②$b\neq 1$；③$c=2$；④$d\neq 4$　有且只有一个是正确的．

请写出满足上述条件的一个有序数组 $(a,b,c,d)$ __________，符合条件的全部有序数组 $(a,b,c,d)$ 的个数是_________．

**三、解答题共 6 小题，共 80 分．解答应写出文字说明，演算步骤或证明过程．**

15．（本小题共 13 分）

如图，在$\triangle ABC$中，$D$为边$BC$上一点，$AD=6$，$BD=3$，$DC=2$．

（Ⅰ）若$\angle ADB=\dfrac{\pi}{2}$，求$\angle BAC$的大小；

（Ⅱ）若$\angle ADB=\dfrac{2\pi}{3}$，求$\triangle ABC$的面积．

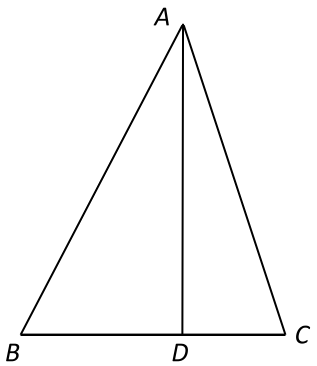



图 1

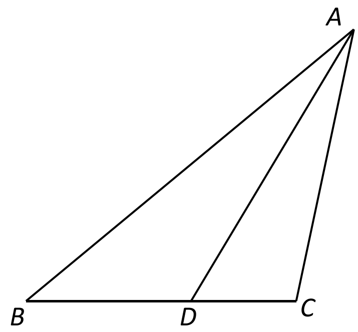



图 2

16．（本小题共 13 分）

摩拜单车和 ofo 小黄车等各种共享单车的普及给我们的生活带来了便利. 已知某共享单车的收费标准是：每车使用不超过1小时（包含1小时）是免费的，超过1小时的部分每小时收费1元（不足1小时的部分按1小时计算，例如：骑行 2.5 小时收费为 2 元）. 现有甲、乙两人各自使用该种共享单车一次. 设甲、乙不超过1小时还车的概率分别为

$\dfrac{1}{4}$，$\dfrac{1}{2}$；1小时以上且不超过 2 小时还车的概率分别为$\dfrac{1}{2}$，$\dfrac{1}{4}$；两人用车时间都不会超过 3 小时.

（Ⅰ）求甲乙两人所付的车费相同的概率；

（Ⅱ）设甲乙两人所付的车费之和为随机变量$\xi$，求$\xi$的分布列及数学期望$E\xi$.

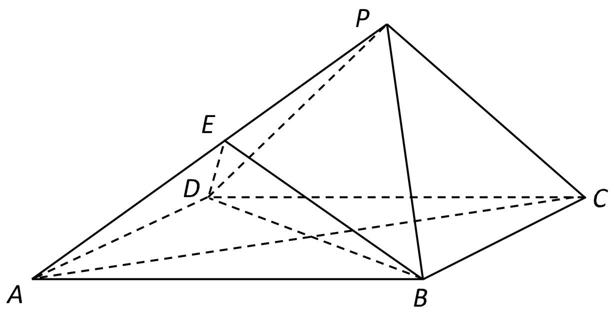
17.（本小题共 14 分）

如图，在四棱锥 $P-ABCD$ 中，底面 $ABCD$ 为矩形，平面 $PCD\perp$ 平面 $ABCD$， $BC=1$， $AB=2$， $PC=PD=\sqrt{2}$， $E$ 为 $PA$ 中点.

（Ⅰ）求证： $PC//$平面$BED$；

（Ⅱ）求二面角 $A-PC-D$ 的余弦值；

（Ⅲ）在棱 $PC$ 上是否存在点 $M$，使得 $BM\perp AC$？若存在，求 $\dfrac{PM}{PC}$ 的值；若不存在，说明理由.




18.（本小题共 13 分）

已知函数 $f(x)=\dfrac{\ln(x-a)}{x}$.

（Ⅰ）若 $a=1$ ，确定函数 $f(x)$ 的零点；

（Ⅱ）若 $a=-1$，证明：函数 $f(x)$ 是 $(0,+\infty)$ 上的减函数；

（Ⅲ）若曲线 $y=f(x)$ 在点 $(1,f(1))$ 处的切线与直线 $x-y=0$ 平行，求 $a$ 的值.

19.（本小题共 14 分）

已知椭圆 $C:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 离心率等于 $\frac{1}{2}$， $P(2,3)$、$Q(2,-3)$ 是椭圆上的两点.

（Ⅰ）求椭圆 $C$ 的方程；

（Ⅱ） $A,B$ 是椭圆上位于直线 $PQ$ 两侧的动点. 当 $A,B$ 运动时，满足 $\angle APQ=\angle BPQ$，试问直线 $AB$ 的斜率是否为定值？如果为定值，请求出此定值；如果不是定值，请说明理由.

20.（本小题共 13 分）

如果 $n$ 项有穷数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1=a_n$，$a_2=a_{n-1}$，…，$a_n=a_1$，即 $a_i=a_{n-i+1}(i=1,2,\cdots,n)$，则称有穷数列 $\{a_n\}$ 为"对称数列". 例如，由组合数组成的数列 $C_n^0,C_n^1,\cdots,C_n^{n-1},C_n^n$ 就是"对称数列".

（Ⅰ）设数列 $\{b_n\}$ 是项数为 7 的"对称数列"，其中 $b_1,b_2,b_3,b_4$ 成等比数列，且 $b_2=3,b_5=1$. 依次写出数列 $\{b_n\}$ 的每一项；

（Ⅱ）设数列 $\{c_n\}$ 是项数为 $2k-1$（$k\in N^*$ 且 $k\geq 2$）的"对称数列"，且满足 $|c_{n+1}-c_n|=2$，记 $S_n$ 为数列 $\{c_n\}$ 的前 $n$ 项和；

（ⅰ）若 $c_1,c_2,\cdots c_k$ 是单调递增数列，且 $c_k=2017$. 当 $k$ 为何值时，$S_{2k-1}$ 取得最大值？

（ⅱ）若 $c_1=2018$，且 $S_{2k-1}=2018$，求 $k$ 的最小值.

# 数学试题答案

**一、选择题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分．**

| 题号 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 答案 | A | A | D | B | A | C | B | D |

**二、填空题共 6 小题，每小题 5 分，共 30 分．**

| 题号 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 答案 | $a<b<c$ | 13 | $[3,6]$ | $-2$ | $\frac{1}{2}$ | (3, 2, 1, 4)；6 |

（第 14 题第一空 3 分，(3, 2, 1, 4)，(2, 3, 1, 4)  (3, 1, 2, 4)  (3, 1, 4, 2)  (4, 1, 3, 2)  (2, 1, 4, 3)

任选一个即可，第二空 2 分）

**三、解答题共 6 小题，共 80 分．**

15．（本小题共 13 分）

解：（Ⅰ）设 $\angle BAD=\alpha$， $\angle CAD=\beta$，

则 $\tan\alpha=\frac{BD}{AD}=\frac{1}{2}$， $\tan\beta=\frac{CD}{AD}=\frac{1}{3}$ …………2 分

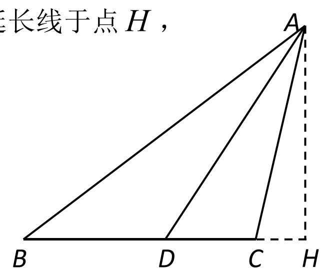
所以 $\tan(\alpha+\beta)=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}=1$ …………5 分

因为 $\alpha+\beta\in(0,\pi)$，

所以 $\alpha+\beta=\frac{\pi}{4}$，

即 $\angle BAC=\frac{\pi}{4}$． …………7 分

（Ⅱ）过点 $A$ 作 $AH\perp BC$ 交 $BC$ 的延长线于点 $H$，




因为 $\angle ADB=\frac{2\pi}{3}$，

所以 $\angle ADC=\frac{\pi}{3}$，

所以 $AH=AD\cdot\sin\frac{\pi}{3}=3\sqrt{3}$； …………11 分

所以 $S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}BC\cdot AH=\frac{15\sqrt{3}}{2}$． …………13 分

16．（本小题共 13 分）

解：（Ⅰ）甲乙两人用车时间超过 2 小时的概率分别为：$\frac{1}{4}$，$\frac{1}{4}$ …………1 分

甲乙两人所付车费用相同的概率 $p=\frac{1}{4}\times\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\times\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\times\frac{1}{4}=\frac{5}{16}$ ………4 分

（Ⅱ）随机变量 ξ 的所有取值为 $0,1,2,3,4$． …………5 分

$$P(\xi=0)=\frac{1}{2}\times\frac{1}{4}=\frac{1}{8}$$

$$P(\xi=1)=\frac{1}{4}\times\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{5}{16}$$

$$P(\xi=2)=\frac{1}{2}\times\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\times\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\times\frac{1}{4}=\frac{5}{16}$$

$$P(\xi=3)=\frac{1}{2}\times\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\times\frac{1}{4}=\frac{3}{16}$$

$$P(\xi=4)=\frac{1}{4}\times\frac{1}{4}=\frac{1}{16}$$ …………10 分

$\xi$ 的分布列为:

| $\xi$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|---|
| $P$ | $\frac{1}{8}$ | $\frac{5}{16}$ | $\frac{5}{16}$ | $\frac{3}{16}$ | $\frac{1}{16}$ |

…………11 分

数学期望 $E\xi=\frac{1}{8}\times0+\frac{5}{16}\times1+\frac{5}{16}\times2+\frac{3}{16}\times3+\frac{1}{16}\times4=\frac{7}{4}$． ………13 分

17．（本小题共 14 分）

解：（Ⅰ）证明：设 $AC$ 与 $BD$ 的交点为 $F$，连接 $EF$．

因为 $ABCD$ 为矩形，所以 $F$ 为 $AC$ 的中点，

在 $\Delta PAC$ 中，由已知 $E$ 为 $PA$ 中点，

所以 $EF//PC$， ……………2 分

又 $EF\subset$ 平面 $BED$， $PC\not\subset$ 平面 $BED$， ……………3 分

所以 $PC//$ 平面 $BED$． ……………4 分

（Ⅱ）解：取 $CD$ 中点 $O$，连接 $PO$．

因为 $\Delta PCD$ 是等腰三角形， $O$ 为 $CD$ 的中点，

所以 $PO\perp CD$，

又因为平面 $PCD\perp$ 平面 $ABCD$，

因为 $PO \subset$ 平面 $PCD$， $PO \perp CD$，

所以 $PO \perp$ 平面 $ABCD$.　　　　　　　　　　　　……………5 分

取 $AB$ 中点 $G$，连接 $OG$，

由题设知四边形 $ABCD$ 为矩形，

所以 $OF \perp CD$，

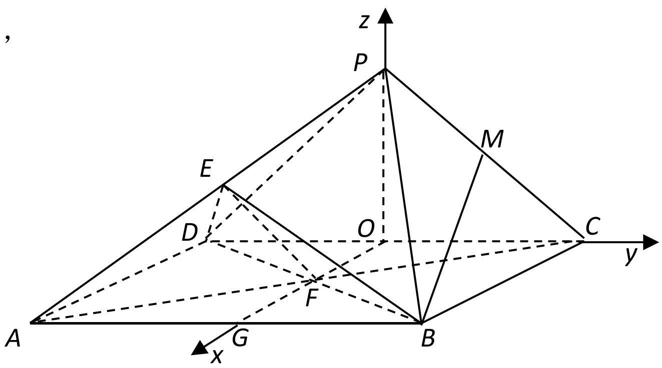
所以 $PO \perp OG$.

如图建立空间直角坐标系 $O-xyz$，则 $A(1,-1,0)$， $C(0,1,0)$，

$P(0,0,1)$， $D(0,-1,0)$， $B(1,1,0)$， $O(0,0,0)$， $G(1,0,0)$.

$\overrightarrow{AC}=(-1,2,0)$， $\overrightarrow{PC}=(0,1,-1)$.　　　　　　　　　　　　……………6 分

设平面 $PAC$ 的法向量为 $\vec{n}=(x,y,z)$，




则 $\begin{cases}\vec{n}\cdot\overrightarrow{AC}=0,\\ \vec{n}\cdot\overrightarrow{PC}=0,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}x-2y=0,\\ y-z=0.\end{cases}$

令 $z=1$，则 $y=1$， $x=2$，

所以 $\vec{n}=(2,1,1)$.

平面 $PCD$ 的法向量为 $\overrightarrow{OG}=(1,0,0)$，

设 $\vec{n}$， $\overrightarrow{OG}$ 的夹角为 $\alpha$，所以 $\cos\alpha=\dfrac{\sqrt{6}}{3}$.　　　　　　　　　……………9 分

由图可知二面角 $A-PC-D$ 为锐角，

所以二面角 $A-PC-B$ 的余弦值为 $\dfrac{\sqrt{6}}{3}$.　　　　　　　　　……………10 分

（III）设 $M$ 是棱 $PC$ 上一点，则存在 $\lambda\in[0,1]$ 使得 $\overrightarrow{PM}=\lambda\overrightarrow{PC}$.

因此点 $M(0,\lambda,1-\lambda)$， $\overrightarrow{BM}=(-1,\lambda-1,1-\lambda)$， $\overrightarrow{AC}=(-1,2,0)$.　　……12 分

由 $\overrightarrow{BM}\cdot\overrightarrow{AC}=0$，即 $\lambda=\dfrac{1}{2}$.

因为 $\lambda=\dfrac{1}{2}\in[0,1]$，所以在棱 $PC$ 上存在点 $M$，使得 $BM\perp AC$，

此时 $\dfrac{PM}{PC}=\lambda=\dfrac{1}{2}$.　　　　　　　　　　　　　　……………14 分

18.（本小题共 13 分）

解：（ I ）当 $a=1$ 时，则 $f(x)=\dfrac{\ln(x-1)}{x}$　　　　　　　　　　　…… 1 分

定义域是 $(1,+\infty)$，令 $\frac{\ln(x-1)}{x}=0$ ……………2 分

$\ln(x-1)=0, x=2$ 是所求函数的零点. ……………3 分

（Ⅱ）当 $a=-1$ 时，函数 $f(x)$ 的定义域是 $(-1,0)\cup(0,+\infty)$， ………4 分

所以 $f'(x)=\dfrac{\frac{x}{x+1}-\ln(x+1)}{x^2}$， …………5 分

令 $g(x)=\frac{x}{x+1}-\ln(x+1)$，只需证：$x>0$ 时，$g(x)\le 0$. ……………6 分

又 $g'(x)=\frac{1}{(x+1)^2}-\frac{1}{x+1}=-\frac{x}{(x+1)^2}<0$，

故 $g(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上为减函数， …………… 7 分

所以 $g(x)<g(0)=-\ln 1=0$， …………… 8 分

所以 $f'(x)<0$，函数 $f(x)$ 是 $(0,+\infty)$ 上的减函数. ……………9 分

（Ⅲ）由题意知，$f'(x)|_{x=1}=1$，且 $f'(x)=\dfrac{\frac{x}{x-a}-\ln(x-a)}{x^2}$， ………… 10 分

所以 $f'(1)=\frac{1}{1-a}-\ln(1-a)=1$，即有 $\frac{a}{1-a}-\ln(1-a)=0$， ……………11 分

令 $t(a)=\frac{a}{1-a}-\ln(1-a)$，$a<1$，则 $t'(a)=\frac{1}{(1-a)^2}+\frac{1}{1-a}>0$，

故 $t(a)$ 是 $(-\infty,1)$ 上的增函数，又 $t(0)=0$，因此 0 是 $t(a)$ 的唯一零点，

即方程 $\frac{a}{1-a}-\ln(1-a)=0$ 有唯一实根 0，所以 $a=0$. ……………13 分

19.（本小题共 14 分）

解：（Ⅰ）因为 $e=\frac{c}{a}=\frac{1}{2}$，又 $a^2=b^2+c^2$，

所以 $a^2=4c^2, b^2=3c^2$ ………2 分

设椭圆方程为 $\frac{x^2}{4c^2}+\frac{y^2}{3c^2}=1$，代入 $(2,3)$，得 $c^2=4, a^2=16, b^2=12$ ……4 分

椭圆方程为 $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{12}=1$ …………5 分

（Ⅱ）当 $\angle APQ=\angle BPQ$ 时，$PA, PB$ 斜率之和为 0 …………6 分

设 $PA$ 斜率为 $k$，则 $PB$ 斜率为 $-k$ …………7 分

设 $PA$ 方程为 $y-3=k(x-2)$，与椭圆联立得 $\begin{cases} y-3=k(x-2) \\ 3x^2+4y^2=48 \end{cases}$

代入化简得：$(3+4k^2)x^2+8(3k-2k^2)x+4(4k^2+9-12k)-48=0$

$P(2,3)$，$2+x_1=\dfrac{8k(2k-3)}{3+4k^2}$

同理 $2+x_2=\dfrac{8k(2k+3)}{3+4k^2}$，$x_1+x_2=\dfrac{16k^2-12}{3+4k^2}$，$x_1-x_2=\dfrac{-48k}{3+4k^2}$

$k_{AB}=\dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=\dfrac{k(x_1+x_2)-4k}{x_1-x_2}=\dfrac{1}{2}$

即直线 $AB$ 的斜率为定值 $\dfrac{1}{2}$.　　…………14 分

20.（本小题共 13 分）

解:（Ⅰ）因为数列 $\{b_n\}$ 是项数为 7 的“对称数列”，所以 $b_5=b_3=1$　……………1 分

又因为 $b_1,b_2,b_3,b_4$ 成等比数列，其公比 $q=\dfrac{b_3}{b_2}=\dfrac{1}{3}$，

所以数列 $\{b_n\}$ 的 7 项依次为：9，3，1，$\dfrac{1}{3}$，1，3，9 .　……………3 分

（Ⅱ）（ⅰ）由 $c_1,c_2,\cdots c_k$ 是单调递增数列且数列 $\{c_n\}$ 是“对称数列”且满足 $|c_{n+1}-c_n|=2$ 可知 $c_1,c_2\cdots c_k$ 是公差为 2 的等差数列，$c_k,c_{k+1},\cdots c_{2k-1}$ 是公差为 $-2$ 的等差数列　…5 分

$$S_{2k-1}=c_1+c_2+\cdots+c_{2k-1}$$

$$=2(c_k+c_{k-1}+\cdots c_{2k-1})-c_k$$

$$=2[2017k+\frac{k(k-1)}{2}\times(-2)]-2017$$

$$=-2k^2+4036k-2017$$　…………7 分

所以当 $k=-\dfrac{4036}{-4}=1009$ 时，$S_{2k-1}$ 取得最大值.　……8 分

（ⅱ）因为 $|c_{n+1}-c_n|=2$ 即 $c_{n+1}-c_n=\pm2$ .

所以 $c_{n+1}-c_n\ge-2$　即 $c_{n+1}\ge c_n-2$ .

于是 $c_k\ge c_{k-1}-2\ge c_{k-2}-4\ge\cdots\ge c_1-2(k-1)$ ………10 分

因为数列 $\{c_n\}$ 是“对称数列”

所以

$$S_{2k-1}=c_1+c_2+\cdots+c_{2k-1}=2(c_1+c_2+\cdots c_{k-1})+c_k\geq(2k-1)c_1-2(k-2)(k-1)-2(k-1)$$

$$=-2k^2+4040k-2020$$

因为$S_{2k-1}=2018$即$-2k^2+4040k-2020\leq 2018$解得$k\leq 1$或$k\geq 2019$

所以 $k\geq 2019$ …………12 分

当$c_1,c_2,\cdots c_k$是公差为$-2$的等差数列时满足$c_1=2018$，且$S_{2k-1}=2018$，

此时$k=2019$，所以$k$的最小值为$2019$.  ………13 分

**【注：若有其它解法，请酌情给分】**