高 三 数 学

考生注意：

1. 本试卷分选择题和非选择题两部分。满分150分，考试时间120分钟。
2. 答题前，考生务必用直径0.5毫米黑色墨水签字笔将密封线内项目填写清楚。
3. 考生作答时，请将答案答在答题卡上。选择题每小题选出答案后，用2B铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑；非选择题请用直径0.5毫米黑色墨水签字笔在答题卡上各题的答题区域内作答，**超出答题区域书写的答案无效，在试题卷、草稿纸上作答无效。**
4. 本卷命题范围：集合、常用逻辑用语、不等式、函数、导数、三角函数、解三角形、平面向量、复数、数列、立体几何、直线与圆、圆锥曲线。

一、选择题：本题共8小题，每小题5分，共40分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 已知集合 $A=\left\{y\middle|y=\left(\frac{1}{2}\right)^x,x\in[-5,0)\right\}$，$B=\{y\in Z|y=\log x,x\in A\}$，则 $A\cap B=$

A. $\{y|0$ …　　　　B. $\{y|1$ … $y\leqslant\log_2 32\}$

C. $\{1,2,3\}$　　　　D. $\{2,3\}$

2. 已知复数 z 满足 $\frac{z+i}{z-2i}=2-i$，则 $z=$

A. $-\frac{3}{2}+\frac{7}{2}i$　　　　B. $-\frac{3}{2}$ … $\frac{}{2}i$

C. $-\frac{7}{2}+\frac{3}{2}i$　　　　D. $-\frac{7}{2}-\frac{3}{2}i$

3. 已知直线 $l_1:ax+2y-a+1=0$，直线 $l_2:x+(a-1)y-2=0$，则“$a=2$”是“$l_1\parallel l_2$”的

A. 充分不必要条件　　　　B. 必要不充分条件

C. 充要条件　　　　D. 既不充分也不必要条件

4. 已知 $\sin\left(\theta-\frac{\pi}{12}\right)=\frac{3}{4}$，则 $\sin\left(2\theta+\frac{\pi}{3}\right)=$

A. $-\frac{7}{16}$　　B. $-\frac{1}{8}$　　C. $\frac{1}{8}$　　D. $\frac{7}{16}$

5. 已知 P 为双曲线 $C:x^2-\frac{y^2}{4}=1$ 右支上的一个动点，若点 P 到直线 $y=2x+5$ 的距离大于 m 恒成立，则实数 m 的取值范围为

A. $(-\infty,1]$　　B. $(-$ …　　C. $(-\infty,\sqrt{5}]$　　D. $(-\infty,5]$

6. 在平面直角坐标系 xOy 中，$A(1,0)$，$B(0,3)$，$C(3,0)$，动点 P 满足 $|\overrightarrow{CP}|=1$，则 $|\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OP}|$ 的最大值是

A. 6　　B. $2\sqrt{2}+1$　　C. 5　　D. $\sqrt{10}+1$

7. 已知棱长为4的正四面体 $A-BCD$，用所有与点 A,B,C,D 距离均相等的平面截该四面体，则所有截面的面积和为

A. $12+4\sqrt{3}$　　　　B. $16+4\sqrt{3}$

C. $8\sqrt{3}$　　　　D. $4\sqrt{3}$

8. 若 $f(x)$ 为 R 上的奇函数，$f'(x)$ 为其导函数，当 $x>0$ 时，$xf'(x)+3f(x)>0$ 恒成立，则不等式 $x^3f(x)+(2x-1)^3f(1-2x)<0$ 的解集为

A. $\left(\frac{1}{3},1\right)$

B. $(1,3)$

C. $(-\infty,1)\cup(3,+\infty)$

D. $\left(-\infty,\frac{1}{3}\right)\cup(1,+\infty)$

二、选择题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求。全部选对的得 5 分，部分选对的得 2 分，有选错的得 0 分。

9. 已知曲线 $E:x^2+xy+y^2=4$，则

A. E 关于原点对称　　B. E 关于 y 轴对称

C. E 关于直线 $y=x$ 对称　　D. $(2,-2)$ 为 E 的一个顶点

10. 已知函数 $f(x)=\sqrt{2}\sin(\omega x+\varphi)$，$g(x)=\sqrt{2}\cos\omega x$，$\omega>0$，$\varphi\in[0,\pi)$，它们的最小正周期均为 π，$f(x)+g(x)$ 的一个零点为 $-\frac{\pi}{6}$，则

A. $f(x)+g(x)$ 的最大值为 2

B. $f(x)+g(x)$ 的图象关于点 $\left(-\frac{2\pi}{3},0\right)$ 对称

C. $f(x)$ 和 $g(x)$ 在 $\left[\frac{2\pi}{3},\frac{5\pi}{6}\right]$ 上均单调递增

D. 将 $f(x)$ 图象向左平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位长度可以得到 $g(x)$ 的图象

11. 已知 F 为抛物线 $C:y^2=4x$ 的焦点，$A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$ 是 C 上两点，O 为坐标原点，M 为 x 轴正半轴上一点，过 B 作 C 的准线的垂线，垂足为 B_1，AB 的中点为 E，则

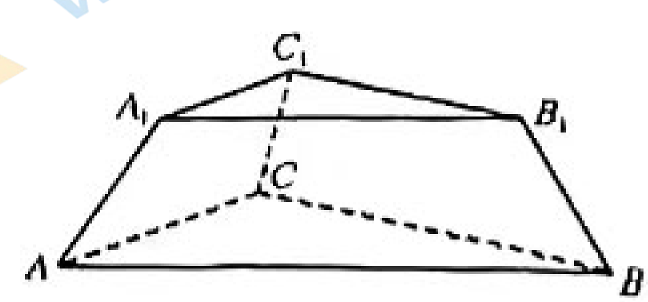
A. 若 $|BB_1|=2|OF|$，则四边形 $OFBB_1$ 的周长为 $3+\sqrt{5}$

B. 若 $|AF|=3$，则 $\triangle AOF$ 的面积为 $\sqrt{2}$

C. 若 $|AB|=6$，则 E 到 y 轴的最短距离为 3

D. 若直线 AB 过点 $M(2,0)$，则 $\frac{1}{|MA|^2}+\frac{1}{|MB|^2}$ 为定值

12. 如图，已知正三棱台 $ABC-A_1B_1C_1$ 的上、下底面的边长分别为 4 和 6，侧棱长为 2，以点 A 为球心，$2\sqrt{7}$ 为半径的球面与侧面 BCC_1B_1 的交线为曲线 Γ，P 为 Γ 上一点，则



A. CP 的最小值为 $2\sqrt{3}-2$

B. 存在点 P，使得 $AP\perp BC$

C. 存在点 P 及 B_1C_1 上一点 Q，使得 $AP/\!/A_1Q$

D. 所有线段 AP 所形成的曲面的面积为 $\frac{4\sqrt{7}\pi}{3}$

三、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。

13. 已知平面向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 满足 $|\boldsymbol{a}|=2|\boldsymbol{b}|=2$，$|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|=2$，则 $\cos\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle=$ ______.

14. 已知实数 x,y 满足 $(x-1)^2+y^2=1$，则 $\frac{y}{x+1}$ 的取值范围为______.

15. 已知函数 $f(x)=\log_3\frac{x}{3}\cdot\log_3\frac{x}{27}$，若对不相等的正数 x_1,x_2，有 $f(x_1)=f(x_2)$ 成立，则 $\frac{1}{x_1}+\frac{9}{x_2}$ 的最小值为______.

16. 已知椭圆 $C:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的左、右焦点分别为 F_1,F_2，以线段 F_1F_2 为直径的圆与 C 在第一、第三象限分别交于点 A,B，若 $|AF_1|\leqslant4|BF_1|$，则 C 的离心率的取值范围是______.

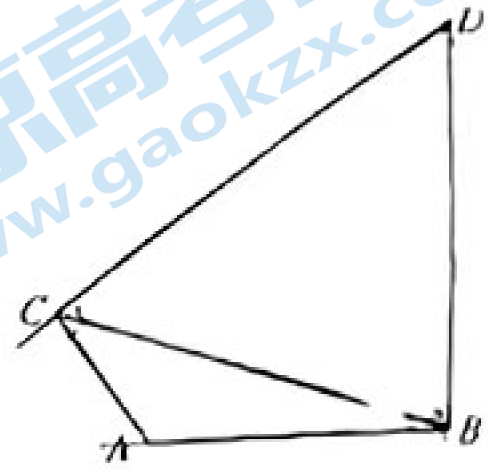
四、解答题：本题共 6 小题，共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17.（本小题满分 10 分）

如图，在$\triangle ABC$中，$AB=2$，$AC=1$，过B，C分别作AB，AC的垂线交于点D。

(1)若$BD=3$，求$\cos A$；

(2)若$\angle D=60^\circ$，求CD。



18.（本小题满分 12 分）

已知各项均为正数的数列$\{a_n\}$，$\Pi_n=a_1\times a_2\times\cdots\times a_n$，且$a_n+\Pi_n=1$。

(1)求$\{a_n\}$的通项公式；

若$b_n=\frac{a_{n+1}}{[illegible]}-1$，$\{b_n\}$的前$n$项和为$S_n$，证明：$\frac{1}{3}\leqslant S_n<\frac{3}{4}$。

19.（本小题满分 12 分）

已知动点P到点F([illegible])的距离是到直线$x=\frac{\sqrt{5}}{5}$的距离的$\sqrt{5}$倍，记动点P的轨迹为曲线Γ。

(1)求Γ的方程；

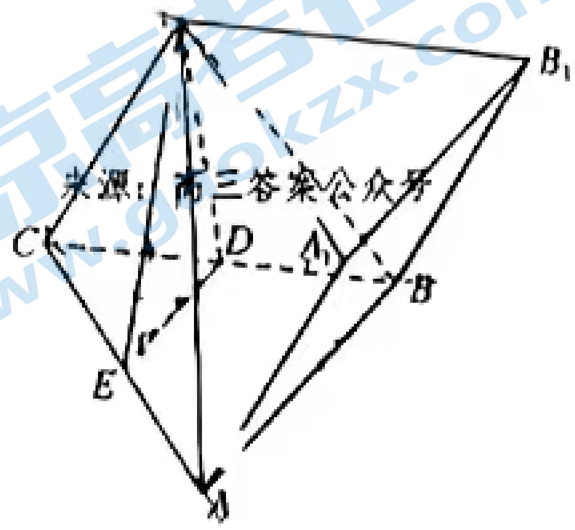
(2)过点$A(1,1)$能否作一条直线l，使得l与Γ交于B，C两点，且A是线段BC的中点？若存在，求出直线l的方程；若不存在，说明理由。

20.(本小题满分 12 分)

如图,在三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中,$CA=CB=2$,$CA\perp CB$,D,E 分别是 CB,CA 的中点,$C_1D=C_1E=2$.

(1)若平面 $ACC_1A_1\perp$ 平面 BCC_1B_1,求点 C_1 到平面 ABC 的距离;

(2)若 $CC_1=\sqrt{2}$,求平面 ACC_1A_1 与平面 BCC_1B_1 夹角的余弦值.



21.(本小题满分 12 分)

已知函数 $f(x)=\ln(x+1)-x^2-ax-1(a\in\mathbf{R})$.

(1)当 $a=-2$ 时,存在 $x_1,x_2\in[0,1]$,使得 $f(x_1)-f(x_2)\geqslant M$,求 M 的最大值;

(2)已知 m,n 是 $f(x)$ 的两个零点,记 $f'(x)$ 为 $f(x)$ 的导函数,若 $m,n\in(0,+\infty)$,且 $m<n$,

证明:$f'\left(\frac{m+n}{2}\right)<0$.

22.(本小题满分 12 分)

已知椭圆 $\Gamma:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$的长轴长为 $2\sqrt{5}$,离心率为 $\frac{2\sqrt{5}}{5}$,斜率为 k 的直线 l 与椭圆 Γ 有两个不同的交点 A,B.

(1)求 Γ 的方程;

(2)若直线 l 的方程为 $y=x+t$,点 $M(0,1)$关于直线 l 的对称点 N(与 M 不重合)在椭圆 Γ 上,求 t 的值;

(3)设 $P(-3,0)$,直线 PA 与椭圆 Γ 的另一个交点为 C,直线 PB 与椭圆 Γ 的另一个交点为 D,若点 C,D 和点 $Q\left(-\frac{7}{3},\frac{1}{2}\right)$三点共线,求 k 的值.

高三数学参考答案、提示及评分细则

1. D　由题意知 $A=\{y\mid 1<y\leqslant 32\}$，当 $x\in A$ 时，$0<\log_3 x\leqslant \log_3 32\in(3,4)$，所以 $B=\{1,2,3\}$，所以 $A\cap B=\{2,3\}$. 故选 D.

2. B　由题意得 $z+\mathrm{i}=(2-\mathrm{i})(z-2\mathrm{i})$，所以 $(-1+\mathrm{i})z=-2-5\mathrm{i}$，所以 $z=\dfrac{-2-5\mathrm{i}}{-1+\mathrm{i}}$，故 $z=\dfrac{(-2-5\mathrm{i})(-1-\mathrm{i})}{(-1+\mathrm{i})(-1-\mathrm{i})}=-\dfrac{3}{2}+\dfrac{7}{2}\mathrm{i}$，所以 $\bar{z}=-\dfrac{3}{2}-\dfrac{7}{2}\mathrm{i}$. 故选 B.

3. C　若 $a=2$，则 $l_1:2x+2y-1=0$，$l_2:x+y-2=0$，易知 $l_1/\!/l_2$，所以“$a=2$”是“$l_1/\!/l_2$”的充分条件；若 $l_1/\!/l_2$，则 $a(a-1)-2=0$，且 $-2a\neq 1-a$，所以 $a=2$，所以“$a=2$”也是“$l_1/\!/l_2$”的必要条件，故“$a=2$”是“$l_1/\!/l_2$”的充要条件. 故选 C.

4. B　$\sin\left(2\theta+\dfrac{\pi}{3}\right)=\sin\left[2\left(\theta-\dfrac{\pi}{12}\right)+\dfrac{\pi}{2}\right]=\cos 2\left(\theta-\dfrac{\pi}{12}\right)=1-2\sin^2\left(\theta-\dfrac{\pi}{12}\right)=1-2\times\dfrac{9}{16}=-\dfrac{1}{8}$. 故选 B.

5. C　双曲线 C 的渐近线方程为 $y=\pm 2x$，直线 $y=2x+5$ 与其中一条渐近线 $y=2x$ 平行，二者之间的距离 $d=\dfrac{|5-0|}{\sqrt{5}}=\sqrt{5}$，且直线 $y=2x+5$ 在直线 $y=2x$ 的左边，由题意知点 P 到直线 $y=2x+5$ 的距离大于 $\sqrt{5}$，所以 $m\leqslant\sqrt{5}$，所以实数 m 的取值范围为 $(-\infty,\sqrt{5}]$. 故选 C.

6. A　由 $|\overrightarrow{CP}|=1$，得动点 P 的轨迹是以 $C(3,0)$ 为圆心，以 1 为半径的圆，其方程为 $(x-3)^2+y^2=1$，设 $P(x,y)$，则 $|\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OP}|=\sqrt{(x+1)^2+(y+3)^2}$，表示圆 C 上的点 P 到点 $(-1,-3)$ 的距离，所以 $|\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OP}|_{\max}=\sqrt{(3+1)^2+}$[illegible]$1$[illegible] A.

7. A　与点 A,B,C,D 距离均相等的平面可分为两类，一类是平面的一侧是 1 个点，另外一侧有 3 个点（如图 1），此时截面过棱的中点，且与一个面平行，故截面三角形与平行的面（三角形）相似，相似比为 $\dfrac{1}{2}$，故其面积为 $\dfrac{1}{4}\times\dfrac{1}{2}\times 4\times 4\sin 60^\circ=\sqrt{3}$，这样的截面共有 4 个，故这类截面的面积和为 $4\sqrt{3}$，另外一类是平面的两侧各有 2 个顶点（如图 2），因为正四面体对棱垂直，易知四边形 $PQMN$ 是边长为 2 的正方形，其面积为 4，这样的截面共有[illegible]，故这类截面的面积和为 12，故符合条件的截面的面积和为 $12+4\sqrt{3}$. 故选 A.

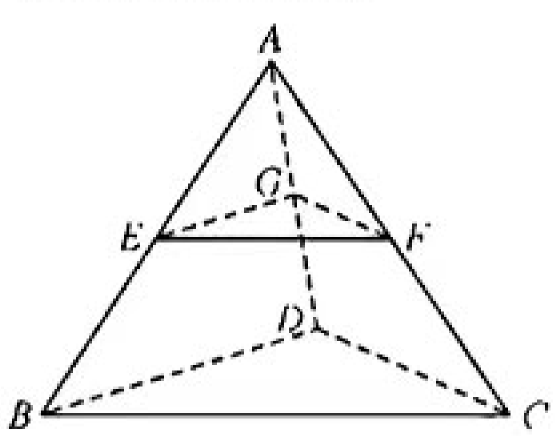


图 1

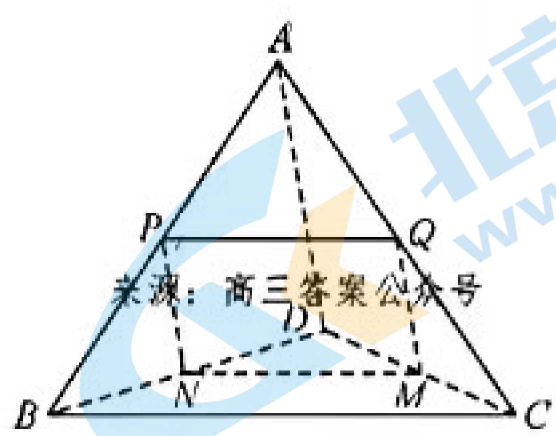


图 2

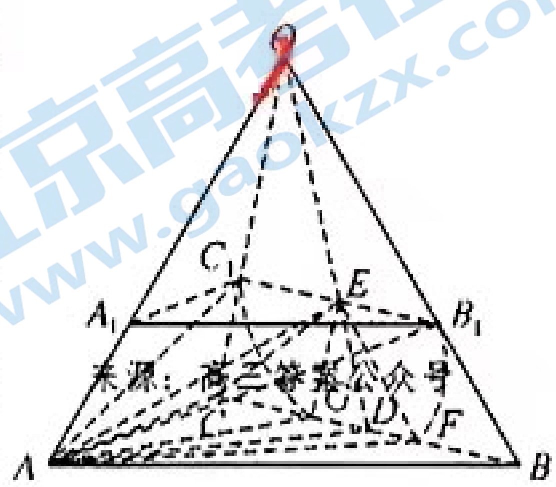
8. D　令 $g(x)=x^3f(x)$，则 $g'(x)=3x^2f(x)+x^3f'(x)=x^2[xf'(x)+3f(x)]$，由题意知当 $x>0$ 时，$g'(x)>0$，故 $g(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增. 因为 $f(x)$ 为奇函数，所以 $g(-x)=(-x)^3f(-x)=-x^3\cdot[-f(x)]=x^3f(x)=g(x)$，即 $g(x)$ 为偶函数，所以原不等式变为 $g(x)<g(2x-1)$，所以 $g(|x|)<g(|2x-1|)$，所以 $|x|<|2x-1|$，解得 $x<\dfrac{1}{3}$ 或 $x>1$，故原不等式的解集为 $\left(-\infty,\dfrac{1}{3}\right)\cup(1,+\infty)$. 故选 D.

9. ACD　用 $-x$ 和 $-y$ 替换方程中的 x 和 y，化简后方程不变，故曲线 E 关于原点对称，故 A 正确；用 $-x$ 替换方程中的 x，方程变为 $x^2-xy+y^2=4$，与原方程不同，故 E 不关于 y 轴对称，故 B 错误；用 y 替换方程中的 x，同时用 x 替换方程中的 y，方程不变，故 E 关于直线 $y=x$ 对称，故 C 正确；用 $-x$ 替换 y，同时用 $-y$ 替换 x，方程不变，故 E 关于直线 $y=-x$ 对称，联立 $\begin{cases}y=-x,\\x^2+xy+y^2=4,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}x=2,\\y=-2\end{cases}$ 或 $\begin{cases}x=-2,\\y=2,\end{cases}$ 由顶点的定义知，$(2,-2)$ 为 E 的一个顶点，故 D 正确. 故选 ACD.

10. BCD　因为 $f(x)$ 的最小正周期为 π，故 $\frac{2\pi}{\omega}=\pi$，所以 $\omega=2$，所以 $f(x)+g(x)=\sqrt{2}\sin(2x+\varphi)+\sqrt{2}\cos 2x$，又 $f(x)+g(x)$ 的一个零点为 $-\frac{\pi}{6}$，所以 $\sqrt{2}\sin\left(-\frac{\pi}{3}+\varphi\right)+\sqrt{2}\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)=0$，即 $\sin\left(\varphi-\frac{\pi}{3}\right)=-\frac{1}{2}$，又 $\varphi\in[0,\pi)$，故 $\varphi-\frac{\pi}{3}=-\frac{\pi}{6}$，所以 $\varphi=\frac{\pi}{6}$，所以 $f(x)=\sqrt{2}\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)$，$g(x)=\sqrt{2}\cos 2x$，所以 $f(x)+g(x)=\sqrt{2}\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)+\sqrt{2}\cos 2x=\sqrt{6}\left(\frac{1}{2}\sin 2x+\frac{\sqrt{3}}{2}\cos 2x\right)=\sqrt{6}\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)$，故 $[f(x)+g(x)]_{\max}=\sqrt{6}$，又 $f\left(-\frac{2\pi}{3}\right)+g\left(-\frac{2\pi}{3}\right)=0$，故 $f(x)+g(x)$ 的图象关于点 $\left(-\frac{2\pi}{3},0\right)$ 对称，故 A 错误，B 正确；易求 $f(x)$ 的单调递增区间为 $\left[-\frac{\pi}{3}+k\pi,\frac{\pi}{6}+k\pi\right](k\in\mathbf{Z})$，$g(x)$ 的单调递增区间为 $\left[-\frac{\pi}{2}+n\pi,n\pi\right](n\in\mathbf{Z})$，二者的交集为 $\left[-\frac{\pi}{3}+m\pi,m\pi\right](m\in\mathbf{Z})$，又 $\left[\frac{2\pi}{3},\frac{5\pi}{6}\right]\subsetneq\left[-\frac{\pi}{3}+m\pi,m\pi\right](m\in\mathbf{Z})$，故 C 正确；将 $f(x)$ 的图象向左平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位长度，得 $y=\sqrt{2}\sin\left[2\left(x+\frac{\pi}{6}\right)+\frac{\pi}{6}\right]=\sqrt{2}\sin\left(2x+\frac{\pi}{2}\right)=\sqrt{2}\cos 2x=g(x)$，故 D 正确. 故选 BCD.

11. BD　对于 A，由题意知 $|OF|=1$，且 $BF\perp x$ 轴，由抛物线的定义知 $|BF|=|BB_1|=2$，故 $|y_2|=2$，所以 $B_1(-1,y_2)$，所以 $|OB_1|=\sqrt{1+y_2^2}=\sqrt{1+4}=\sqrt{5}$，所以四边形 $OFBB_1$ 的周长为 $\sqrt{5}+1+2\times2=5+\sqrt{5}$，故 A 错误；对于 B，$|AF|=1+x_1=3$，则 $x_1=2$，所以 $|y_1|=2\sqrt{2}$，所以 $S_{\triangle AOF}=\frac{1}{2}|OF|\cdot|y_1|=\frac{1}{2}\times1\times2\sqrt{2}=\sqrt{2}$，故 B 正确；对于 C，过 A,E 分别作 C 的准线的垂线，垂足分别为 A_1,E_1，则 $|EE_1|=\frac{1}{2}(|AA_1|+|BB_1|)=\frac{1}{2}(|AF|+|BF|)\geqslant$ [illegible] $B|$ [illegible]，且仅当直线 AB 过点 F 时等号成立，所以点 E 到 y 轴的最小距离为 $3-1=2$，故 C 错误；对于 D，设直线 AB 的方程为 x [illegible] t [illegible] 2，联立方程，得 [illegible] $=4x$，[illegible] $ty+2$，消去 x 并整理，得 $y^2-4ty-8=0$，则 $\Delta=16t^2+32>0$，且 $y_1+y_2=4t$，$y_1y_2=-8$，故 $\frac{1}{|MA|^2}+\frac{1}{|MB|^2}=\frac{}{(x_1-2)^2+y_1}$ [illegible] $+\frac{1}{(1+t^2)y_1^2}+\frac{1}{(1+t^2)y_2^2}=\frac{y_1^2+y_2^2}{(1+t^2)y_1^2y_2^2}=\frac{(y_1+y_2)^2-2y_1y_2}{(1+t^2)y_1^2y_2^2}=\frac{16t^2+16}{64(t^2+1)}=\frac{1}{4}$，即 $\frac{1}{|MA|^2}+\frac{1}{|MB|^2}$ 为定值，故 D 正确. 故选 BD.

12. ACD　延长正三棱台的三条侧棱交于点 O，取 BC 的中点 D，连接 OD 交 B_1C_1 于 E，则 E 为 B_1C_1 的中点，由题意得 $\frac{OA_1}{2+OA_1}=\frac{A_1B_1}{AB}=\frac{4}{6}$，所以 $OA_1=4$，所以 $AO=6$，所以 $OD=AD=3\sqrt{3}$，$OE=2DE=2\sqrt{3}$，所以 $\cos\angle AOD=\frac{AO^2+OD^2-AD^2}{2AO\cdot OD}=\frac{\sqrt{3}}{3}$，所以 $AE=\sqrt{AO^2+OE^2-2AO\cdot OE\cos\angle AOD}=2\sqrt{6}$，所以 $AD^2=AE^2+DE^2$，所以 $AE\perp DE$，易证 $BC\perp$ 平面 ADE，又 $AE\subset$ 平面 ADE，所以 $BC\perp AE$，又 $DE\cap BC=D$，$BC,DE\subset$ 平面 BCC_1B_1，所以 $AE\perp$ 平面 BCC_1B_1. 又球 A 的半径为 $2\sqrt{7}$，故在侧面 BCC_1B_1 上的截面圆的半径 $r=\sqrt{(2\sqrt{7})^2-(2\sqrt{6})^2}=2$，故曲线 Γ 是以点 E 为圆心，以 2 为半径的两段圆弧 B_1F 和 C_1G（如图所示，其中 F,G 为 BC 上到点 E 距离为 2 的点）. $CE=\sqrt{3^2+(\sqrt{3})^2}=2\sqrt{3}$，故 CP 的最小值为 $2\sqrt{3}-2$，故 A 正确；因为 $AE\perp$ 平面 BCC_1B_1，要使 $AP\perp BC$，则 P 在线段 DE 上，又 P 在 B_1F 和 C_1G 上，由图知，二者无公共点，故不存在点 P，使得 $AP\perp BC$，故 B 错误；当点 P 在点 G 处时，$AP\,/\!/$ 平面 $A_1B_1C_1$，过点 A,P,A_1 作平面必与 B_1C_1 有公共点 Q，故存在 P 以及 B_1C_1 上的点 Q，使得 $AP\,/\!/\,A_1Q$，故 C 正确；易求得 $\angle B_1EF=\angle C_1EG=\frac{\pi}{3}$，所以 B_1F 和 C_1G 的长均为 $\frac{2\pi}{3}$，所有线段 AP 所形成的曲面的展开图为两个扇形，其面积和为 $2\times\frac{1}{2}\times\frac{2\pi}{3}\times2\sqrt{7}=\frac{4\sqrt{7}\pi}{3}$，故 D 正确. 故选 ACD.



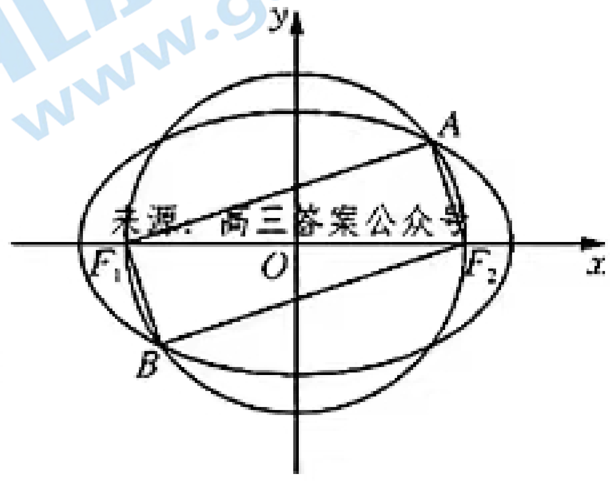
13. $\frac{1}{4}$　因为 $|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|=2$，所以 $\boldsymbol{a}^2-2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}^2=4$，又 $|\boldsymbol{a}|=2|\boldsymbol{b}|=2$，所以 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\frac{1}{2}$，所以 $\cos\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle=\frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{b}|}=\frac{1}{4}$.

14. $\left[-\frac{\sqrt{3}}{3},\frac{\sqrt{3}}{3}\right]$　设 $\frac{y}{x+1}=k$，则 $y=k(x+1)$，由题意知，直线 $y=k(x+1)$ 与圆 $(x-1)^2+y^2=1$ 有公共点，故

$\frac{|k(1+1)-0|}{\sqrt{k^2+1}}\leqslant 1$，解得 $-\frac{\sqrt{3}}{3}\leqslant k\leqslant\frac{\sqrt{3}}{3}$，故 $\frac{y}{x+1}$ 的取值范围为 $\left[-\frac{\sqrt{3}}{3},\frac{\sqrt{3}}{3}\right]$.

15. $\frac{2}{3}$　$f(x)=\log_3\frac{x}{3}\cdot\log_3\frac{x}{27}=(\log_3x-1)(\log_3x-3)=(\log_3x)^2-4\log_3x+3$，因为 $f(x_1)=f(x_2)$，则 $\log_3x_1+\log_3x_2=4$，所以 $\log_3x_1x_2=4$，即 $x_1x_2=81$. 又 $x_1,x_2\in(0,+\infty)$，所以 $\frac{1}{x_1}+\frac{9}{x_2}\geqslant2\sqrt{\frac{9}{x_1x_2}}=\frac{2}{3}$，当且仅当 $\frac{1}{x_1}=\frac{9}{x_2}$，即 $x_1=3,x_2=27$ 时等号成立. 故 $\frac{1}{x_1}+\frac{9}{x_2}$ 的最小值为 $\frac{2}{3}$.

16. $\left(\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{17}}{5}\right]$　设 $|AF_1|=n$，$|AF_2|=m$，因为点 A 在第一象限，所以 $n>m$. 又 A，B 均在以线段 F_1F_2 为直径的圆上，所以四边形 AF_1BF_2 为矩形，即 $|AF_2|=|BF_1|$

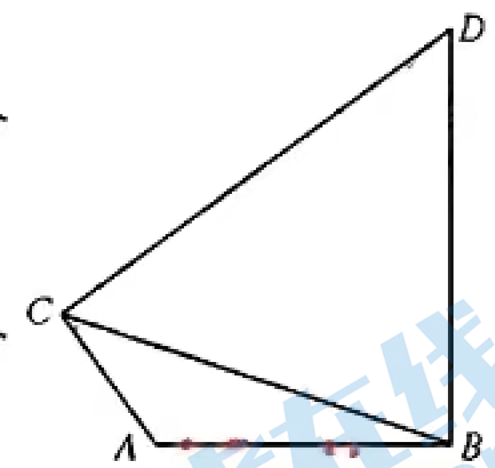


因为 $|AF_1|\leqslant4|BF_1|$，所以 $n\leqslant4m$，即 $1<\frac{n}{m}\leqslant4$. 因为 $m+n=2a$，$m^2+n^2=4c^2$，所以 $(m+n)^2=m^2+n^2+2mn=4c^2+2mn=4a^2$，即 $mn=2a^2-2c^2$. 因为 $\frac{4c^2}{2a^2-2c^2}=\frac{m^2+n^2}{mn}=\frac{n}{m}+\frac{m}{n}$，设 $y=\frac{n}{m}+\frac{m}{n}$，$x=\frac{n}{m}\in(1,4]$，则 $y=x+\frac{1}{x}$，$x\in(1,4]$. 易知 $y=x+\frac{1}{x}$ 在区间 $(1,4]$ 上单调递增，所以 $2<y\leqslant\frac{17}{4}$，即 $2<\frac{4c^2}{2a^2-2c^2}\leqslant\frac{17}{4}$. 当 $2<\frac{4c^2}{2a^2-2c^2}$ 时，解得 $2c^2>a^2$，即 $e^2>\frac{1}{2}$，解得 $e>\frac{\sqrt{2}}{2}$；当 $\frac{4c^2}{2a^2-2c^2}\leqslant\frac{17}{4}$ 时，解得 $50c^2\leqslant34a^2$，即 $e^2\leqslant\frac{17}{25}$，即 $0<e\leqslant\frac{\sqrt{17}}{5}$，所以 $\frac{\sqrt{2}}{2}<e\leqslant\frac{\sqrt{17}}{5}$.

17. 解：(1)由题意，得 $\angle ACD=\angle ABD=90°$，

所以 $A+D=180°$

由 $AB^2+BD^2=CD^2+AC^2$，得 $CD=\sqrt{3}$. ………………………………………… 1分



在△ABC 中，

由余弦定理，得 $BC^2=AB^2+AC^2-2AB\cdot AC\cos A$，

即 $BC^2=5-4\cos A$， ………………………………………… 2分

在△DBC 中，由余弦定理，得 $BC^2=BD^2+CD^2-2BD\cdot CD\cos(180°-A)$，

即 $BC^2=21+12\sqrt{3}\cos A$. ………………………………………… 3分

两式联立消去 BC^2，得 $(4+12\sqrt{3})\cos A=-16$，所以 $\cos A=\frac{2-6\sqrt{3}}{13}$. ………………………………………… 5分

(2)因为 $A+D=180°$，$D=60°$，所以 $A=120°$，

由余弦定理，得 $BC^2=5-4\cos120°=7$，所以 $BC=\sqrt{7}$. ………………………………………… 6分

在△ABC 中，由正弦定理，得 $\frac{AC}{\sin\angle ABC}=\frac{BC}{\sin A}$，

所以 $\sin\angle ABC=\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{7}}$， ………………………………………… 7分

又 $\angle ABD=\angle ABC+\angle CBD=90°$，所以 $\cos\angle CBD=\sin\angle ABC=\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{7}}$，

所以 $\sin\angle CBD=\sqrt{1-\left(\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{7}}\right)^2}=\frac{5}{2\sqrt{7}}$. ………………………………………… 9分

在△DBC 中，$\frac{CD}{\sin\angle CBD}=\frac{BC}{\sin D}$，所以 $CD=\frac{BC\cdot\sin\angle CBD}{\sin D}=\frac{5\sqrt{3}}{3}$. ………………………………………… 10分

18. (1)解：因为 $a_n+\Pi_n=1$，

当 $n=1$ 时，$a_1+\Pi_1=1$，由 $\Pi_n=a_1\times a_2\times\cdots\times a_n$ 知 $\Pi_1=a_1$，所以 $\Pi_1=a_1=\frac{1}{2}$. ………………………………………… 1分

当 $n\geqslant2$ 时，$a_n=\frac{\Pi_n}{\Pi_{n-1}}$，代入 $a_n+\Pi_n=1$，得 $\frac{\Pi_n}{\Pi_{n-1}}+\Pi_n=1$， ………………………………………… 2分

两边同除以 Π_n，得 $\frac{1}{\Pi_n}-\frac{1}{\Pi_{n-1}}=1$， ………………………………………… 3分

所以$\left\{\frac{1}{\Pi_n}\right\}$是以 2 为首项,1 为公差的等差数列, ………………………………………………………………………………… 4 分

所以$\frac{1}{\Pi_n}=2+(n-1)\times1=n+1$,所以 $\Pi_n=\frac{1}{n+1}$. ……………………………………………………………… 5 分

又 $a_n+\Pi_n=1$,所以 $a_n=1-\Pi_n=1-\frac{1}{n+1}=\frac{n}{n+1}$. ……………………………………………………………… 6 分

(2)证明:由(1)得 $b_n=\frac{a_{n+1}}{a_n}-1=\frac{1}{n(n+2)}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+2}\right)$, ………………………………………………… 7 分

当 $n\geqslant3$ 时,$S_n=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{3}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)+\cdots+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n+1}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+2}\right)$

$=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{3}+\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{3}-\frac{1}{5}+\cdots+\frac{1}{n}-\frac{1}{n+2}\right)$

$=\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2}-\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{3}{2}-\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\right)$, ……………………………………… 9 分

而当 $n=1,2$ 时,$S_1=\frac{1}{3}$,$S_2=\frac{11}{24}$也满足上式,所以 $S_n=\frac{1}{2}\left(\frac{3}{2}-\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\right)$. ……………………………… 10 分

因为$\frac{1}{n+1}>0$,$\frac{1}{n+2}>0$,所以 $S_n<\frac{3}{4}$,

易知数列$\{S_n\}$单调递增,所以 $S_n\geqslant S_1=\frac{1}{3}$,

所以$\frac{1}{3}\leqslant S_n<\frac{3}{4}$. ………………………………………………………………………………………………… 12 分

19. 解:(1)设 $P(x,y)$,因为 $F(\sqrt{5},0)$,所以 $|PF|=\sqrt{(x-\sqrt{5})^2+y^2}$, ……………………………………… 1 分

点 P 到直线 $x=\frac{\sqrt{5}}{5}$ 的距离 $d=\left|x-\frac{\sqrt{5}}{5}\right|$, ………………………………………………………………… 2 分

由题意知 $|PF|=\sqrt{5}d$,即$\sqrt{(x-\sqrt{5})^2+y^2}=\sqrt{5}\left|x-\frac{\sqrt{5}}{5}\right|$.

化简,得 $x^2-\frac{y^2}{4}=1$,即 Γ 的方程为 $x^2-\frac{y^2}{4}=1$. ……………………………………………………… 4 分

(2)假设存在直线 l 满足条件,设 $B(x_1,y_1)$,$C(x_2,y_2)$,则

$x_1^2-\frac{y_1^2}{4}=1$,$x_2^2-\frac{y_2^2}{4}=1$, …………………………………………………………………………………… 5 分

所以 $x_1^2-x_2^2-\frac{y_1^2-y_2^2}{4}=0$,即$(x_1+x_2)(x_1-x_2)=\frac{(y_1+y_2)(y_1-y_2)}{4}$, ………………………………… 6 分

因为 A 为线段 BC 的中点,所以$\frac{x_1+x_2}{2}=1$,$\frac{y_1+y_2}{2}=1$,即 $x_1+x_2=2$,$y_1+y_2=2$,

所以 $2(x_1-x_2)=\frac{2(y_1-y_2)}{4}$,所以$\frac{y_1-y_2}{x_1-x_2}=4$,即 l 的斜率为 4, …………………………………… 8 分

所以直线 l 的方程为 $y-1=4(x-1)$,即 $y=4x-3$. ………………………………………………………………… 9 分

联立方程,得$\begin{cases}x^2-\frac{y^2}{4}=1,\\ y=4x-3,\end{cases}$消去 y 并整理得 $12x^2-24x+13=0$,

$\Delta=(-24)^2-4\times12\times13=-48<0$. ……………………………………………………………………………… 11 分

所以直线 l 与 Γ 无公共点,这与直线 l 与 Γ 交于 B,C 两点矛盾,

故不存在过点 A 的直线满足条件. ……………………………………………………………………………………… 12 分

20. 解:以 C 为坐标原点,CA,CB 所在的直线分别为 x 轴,y 轴建立如图所示的空间直角坐标系,

则 $A(2,0,0)$,$B(0,2,0)$,$D(0,1,0)$,$E(1,0,0)$, …………………………………………………………………… 1 分

设 $C_1(a,b,c)$,因为 $C_1D^2=a^2+(b-1)^2+c^2$,$C_1E^2=(a-1)^2+b^2+c^2$,$C_1D=C_1E$,

所以 $a=b$,则 $C_1(a,a,c)$,$\overrightarrow{CA}=(2,0,0)$,

$\overrightarrow{CB}=(0,2,0)$,$\overrightarrow{CC_1}=(a,a,c)$, ……………………………………………………………………… 2 分

设平面 BCC_1B_1 的一个法向量 $\boldsymbol{n}=(x_1,y_1,z_1)$，则$\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{CB}=0,\\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{CC_1}=0,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}2y_1=0,\\ ax_1+ay_1+cz_1=0,\end{cases}$

令 $x_1=c$，则 $y_1=0$，$z_1=-a$，所以 $\boldsymbol{n}=(c,0,-a)$。 ………………………… 3 分

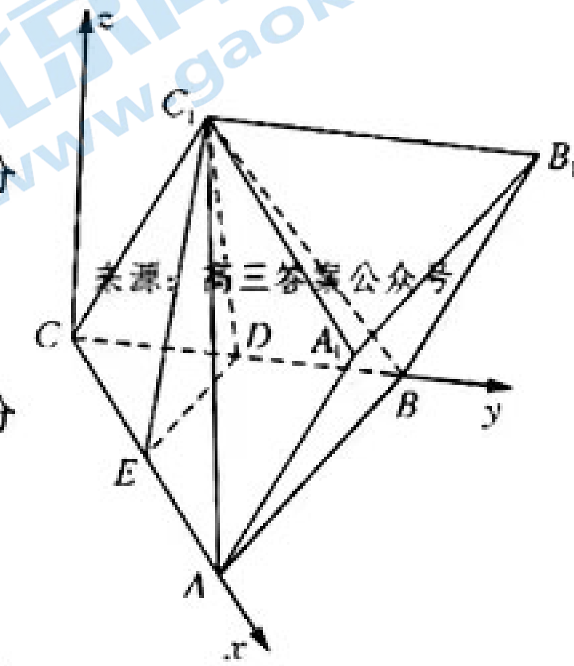
设平面 ACC_1A_1 的一个法向量 $\boldsymbol{m}=(x_2,y_2,z_2)$，则$\begin{cases}\boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{CA}=0,\\ \boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{CC_1}=0,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}2x_2=0,\\ ax_2+ay_2+cz_2=0,\end{cases}$

令 $y_2=c$，则 $x=0$，$z_2=-a$，所以 $\boldsymbol{m}=(0,c,-a)$。 ………………………… 4 分

因为平面 $ACC_1A_1\perp$ 平面 BCC_1B_1，所以 $\boldsymbol{n}\perp\boldsymbol{m}$，

所以 $\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{m}=0$，即 $(-a)^2=0$，所以 $a=0$，

所以 $C_1(0,0,c)$，所以点 C_1 在 z 轴上，即 $CC_1\perp$ 平面 ABC， ………………………… 5 分



因为 $CA\subset$ 平面 ABC，所以 $CC_1\perp CA$，

又 $C_1E=2$，$CE=1$，所以 $CC_1=\sqrt{C_1E^2-CE^2}=\sqrt{3}$，

故 C_1 到平面 ABC 的距离为 $\sqrt{3}$。 ………………………… 6 分

(2)由(1)知 $C_1(a,a,c)$，由 $CC_1=\sqrt{2}$，则 $\sqrt{a^2+a^2+c^2}=\sqrt{2}$，

因为 $C_1E=2$，所以 $\sqrt{(a-1)^2+a^2+c^2}=2$，

所以 $a=-\frac{1}{2}$，$c=\frac{\sqrt{6}}{2}$，所以 $C_1\left(-\frac{1}{2},-\frac{1}{2},\frac{\sqrt{6}}{2}\right)$。 ………………………… 8 分

由(1)知平面 BCC_1B_1 的一个法向量 $\boldsymbol{n}=\left(\frac{\sqrt{6}}{2},0,\frac{1}{2}\right)$，平面 ACC_1A_1 的一个法向量 $\boldsymbol{m}=\left(0,\frac{\sqrt{6}}{2},\frac{1}{2}\right)$， ………………………… 10 分

设平面 ACC_1A_1 与平面 BCC_1B_1 的夹角为 θ，

则 $\cos\theta=|\cos\langle\boldsymbol{m},\boldsymbol{n}\rangle|=\frac{|\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{n}|}{|\boldsymbol{m}|\cdot|\boldsymbol{n}|}=\frac{\frac{1}{4}}{\sqrt{\frac{7}{4}}}=\frac{1}{7}$，

即平面 ACC_1A_1 与平面 BCC_1B_1 的夹角的余弦值为 $\frac{1}{7}$。 ………………………… 12 分

21. (1)解：当 $a=-2$ 时，$f(x)=\ln(x+1)-x^2+2x-1$，

则 $f(x)$ 的定义域为 $(-1,+\infty)$，且 $f'(x)=\frac{1}{x+1}-2x+2=\frac{3-2x^2}{x+1}$， ………………………… 1 分

当 $x\in[0,1]$ 时，$f'(x)>0$，所以 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上单调递增，

所以 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上的最大值为 $f(1)=\ln2$，最小值为 $f(0)=-1$， ………………………… 3 分

由题意知 $M\leqslant[f(x_1)-f(x_2)]_{\max}=f(x)_{\max}-f(x)_{\min}=\ln2+1$，

故 M 的最大值为 $\ln2+1$。 ………………………… 4 分

(2)证明：由题意知 $f(m)=\ln(m+1)-m^2-am-1=0$，$f(n)=\ln(n+1)-n^2-an-1=0$，

所以 $f(m)-f(n)=\ln\frac{m+1}{n+1}-(m+n)(m-n)-a(m-n)=0$，

所以 $a=\frac{1}{m-n}\ln\frac{m+1}{n+1}-(m+n)$。 ………………………… 6 分

因为 $f'(x)=\frac{1}{x+1}-2x-a$，

所以 $f'\left(\frac{m+n}{2}\right)=\frac{2}{m+n+2}-(m+n)-a=\frac{2}{m+n+2}-(m+n)-\frac{1}{m-n}\ln\frac{m+1}{n+1}+(m+n)$

$=\frac{2}{m+n+2}-\frac{1}{m-n}\ln\frac{m+1}{n+1}$， ………………………… 8 分

所以要证 $f'\left(\frac{m+n}{2}\right)<0$，只要证 $\frac{2}{m+n+2}-\frac{1}{m-n}\ln\frac{m+1}{n+1}<0$，

因为 $m<n$，所以只要证 $\frac{2(n-m)}{m+n+2}+\ln\frac{m+1}{n+1}<0$， ………………………… 9 分

令 $t=\frac{m+1}{n+1}$，则 $0<t<1$，即证 $\frac{2-2t}{1+t}+\ln t<0$，

令 $g(t)=\frac{2-2t}{1+t}+\ln t(0<t<1)$，则 $g'(t)=\frac{-2(t+1)-2(1-t)}{(1+t)^2}+\frac{1}{t}=\frac{(t-1)^2}{t(t+1)^2}$，………………………………… 10 分

因为 $0<t<1$，所以 $g'(t)>0$，

所以 $g(t)$ 在 $(0,1)$ 上单调递增，

所以 $g(t)<g(1)=0$. ……………………………………………………………………………………………… 11 分

所以 $\frac{2(n-m)}{m+n+2}+\ln\frac{m+1}{n+1}<0$，所以 $f'\left(\frac{m+n}{2}\right)<0$. ……………………………………………………………………… 12 分

22. 解：(1)设椭圆的焦距为 $2c$，因为椭圆 $\Gamma:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的长轴长为 $2\sqrt{5}$，离心率为 $\frac{2\sqrt{5}}{5}$，

所以 $a=\sqrt{5}$，$\frac{c}{a}=\frac{2\sqrt{5}}{5}$，所以 $c=2$，……………………………………………………………………………… 2 分

所以 $b^2=a^2-c^2=5-4=1$.

故椭圆 Γ 的方程为 $\frac{x^2}{5}+y^2=1$. ……………………………………………………………………………………… 3 分

(2)设点 $M(0,1)$ 关于直线 l 的对称点为 $N(s,n)$，

则 $\begin{cases}\frac{n+1}{2}=\frac{s}{2}+t,\\ \frac{n-1}{s}=-1.\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}s=1-t,\\ n=t,\end{cases}$ 则 $N(1-t,t)$，……………………………………………………… 4 分

由 N 在椭圆 Γ 上，可得 $\frac{(1-t)^2}{5}+t^2=1$，

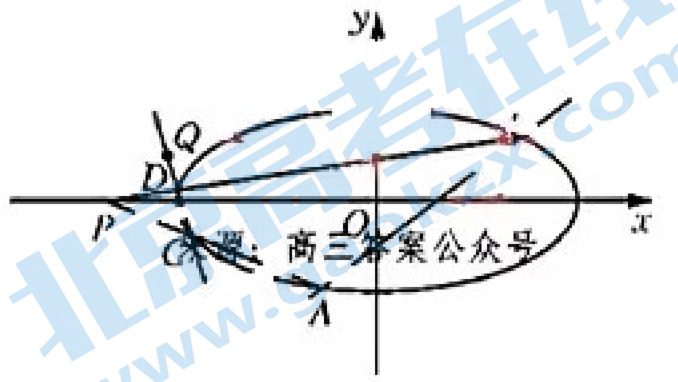
整理得 $3t^2-t-2=0$，解得 $t=1$ 或 $t=-\frac{2}{3}$.

当 $t=1$ 时，点 $N(0,1)$ 与点 M 重合，舍去，则 $t=-\frac{2}{3}$. ………………………………………………………… 6 分

(3)设 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，$C(x_3,y_3)$，$D(x_4,y_4)$，则 $x_1^2+5y_1^2=5$，$x_2^2+5y_2^2=5$.

又 $P(-3,0)$，设 PA 的斜率为 k_1，则 $k_1=\frac{y_1}{x_1+3}$，直线 PA 的方程为 $y=k_1(x+3)$，

由 $\begin{cases}y=k_1(x+3),\\ \frac{x^2}{5}+y^2=1\end{cases}$ 消去 y 并整理得 $(1+5k_1^2)x^2+30k_1^2x+45k_1^2-5=0$，…… 7 分



则 $x_1+x_3=-\frac{30k_1^2}{1+5k_1^2}$，所以 $x_3=-\frac{30k_1^2}{1+5k_1^2}-x_1$.

又 $k_1=\frac{y_1}{x_1+3}$，所以 $x_3=-\frac{30\left(\frac{y_1}{x_1+3}\right)^2}{1+5\left(\frac{y_1}{x_1+3}\right)^2}-x_1=-\frac{14x_1+30}{6x_1+14}=-\frac{7x_1+15}{3x_1+7}$，

所以 $y_3=k_1(x_3+3)=\frac{2y_1}{3x_1+7}$，则 $C\left(-\frac{7x_1+15}{3x_1+7},\frac{2y_1}{3x_1+7}\right)$，…………………………………………………… 9 分

同理可求得 $D\left(-\frac{7x_2+15}{3x_2+7},\frac{2y_2}{3x_2+7}\right)$. 又 $Q\left(-\frac{7}{3},\frac{1}{2}\right)$，

则 $\overrightarrow{QC}=\left(-\frac{7x_1+15}{3x_1+7}+\frac{7}{3},\frac{2y_1}{3x_1+7}-\frac{1}{2}\right)=\left(\frac{4}{3(3x_1+7)},\frac{2y_1}{3x_1+7}-\frac{1}{2}\right)$，

$\overrightarrow{QD}=\left(-\frac{7x_2+15}{3x_2+7}+\frac{7}{3},\frac{2y_2}{3x_2+7}-\frac{1}{2}\right)=\left(\frac{4}{3(3x_2+7)},\frac{2y_2}{3x_2+7}-\frac{1}{2}\right)$，……………………………… 10 分

由点 C，D 和点 $Q\left(-\frac{7}{3},\frac{1}{2}\right)$ 三点共线，所以 $\overrightarrow{QC}/\!/\overrightarrow{QD}$，……………………………………………… 11 分

则 $\frac{4}{3(3x_1+7)}\left(\frac{2y_2}{3x_2+7}-\frac{1}{2}\right)-\frac{4}{3(3x_2+7)}\left(\frac{2y_1}{3x_1+7}-\frac{1}{2}\right)=0$，

可得 $y_2-y_1=\frac{3}{4}(x_2-x_1)$，则 $k=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=\frac{3}{4}$. …………………………………………………………… 12 分

关于我们

北京高考在线创办于 2014 年，隶属于北京太星网络科技有限公司，是北京地区极具影响力的中学升学服务平台。主营业务涵盖：北京新高考、高中生涯规划、志愿填报、强基计划、综合评价招生和学科竞赛等。

北京高考在线旗下拥有网站门户、微信公众平台等全媒体矩阵生态平台。平台活跃用户 50W+，网站年度流量数千万量级。用户群体立足于北京，辐射全国 31 省市。

北京高考在线平台一直秉承“精益求精、专业严谨”的建设理念，不断探索“K12 教育+互联网+大数据”的运营模式，尝试基于大数据理论为广大中学和家长提供新鲜的高考资讯、专业的高考政策解读、科学的升学规划等，为广大高校、中学和教科研单位提供“衔接和桥梁纽带”作用。

平台自创办以来，为众多重点大学发现和推荐优秀生源，和北京近百所中学达成合作关系，累计举办线上线下升学公益讲座数千场，帮助数十万考生顺利通过考入理想大学，在家长、考生、中学和社会各界具有广泛的口碑影响力

未来，北京高考在线平台将立足于北京新高考改革，基于对北京高考政策研究及北京高校资源优势，更好的服务全国高中家长和学生。

推荐大家关注北京高考在线网站官方微信公众号：京考一点通，我们会持续为大家整理分享最新的高中升学资讯、政策解读、热门试题答案、招生通知等内容！