天一大联考
2021—2022 学年高中毕业班阶段性测试(三)
理科数学·答案

一、选择题：本题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分.

1. 答案　B

命题意图　本题考查集合的运算、不等式的解法，考查数学运算、逻辑推理的核心素养.

解析　因为 $A\cup B=A$，故 $B\subseteq A$，显然 $a\neq0$，则 $\begin{cases}a>0,\\a>3\end{cases}$ 或 $\begin{cases}a<0,\\-3a>3,\end{cases}$ 解得 $a<-1$ 或 $a>3$，故实数 a 的取值范围为 $(-\infty,-1)\cup(3,+\infty)$.

2. 答案　C

命题意图　本题考查等差数列的基本运算，考查数学运算的核心素养.

解析　设 $\{a_n\}$ 的公差为 d. 由题意可知 $5\times1+\frac{5\times(5-1)}{2}d=25$，解得 $d=2$，所以 $a_7=1+(7-1)\times2=13$.

3. 答案　B

命题意图　本题考查平面向量的概念、向量数量积的应用，考查数学运算的核心素养.

解析　依题意，$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$，即 $6+\lambda=0$，解得 $\lambda=-6$，则 $\boldsymbol{b}=(2,-6)$，$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=(5,-5)$，故 $|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=\sqrt{5^2+(-5)^2}=5\sqrt{2}$.

4. 答案　A

命题意图　本题考查充分条件与必要条件的判断、圆与圆的位置关系，考查数学运算、逻辑推理的核心素养.

解析　依题意，圆 $C_2:(x+1)^2+(y-7)^2=50-a$，故 $50-a>0$，即 $a<50$. 两圆的圆心距 $|C_1C_2|=\sqrt{(-1-2)^2+(7-3)^2}=5$，若两圆有 4 条公切线，则两圆外离，即 $\sqrt{50-a}+2<|C_1C_2|$，解得 $a>41$，则 $41<a<50$，反之亦成立.

5. 答案　C

命题意图　本题考查三视图、空间几何体的体积，考查数学运算、直观想象的核心素养.

解析　设模型的体积为 V. 由三视图可知，该矛头模型是由一个圆锥与一个圆台拼接而成的组合体，故所求体积 $V=\frac{1}{3}\times\pi\times2^2\times6+\frac{1}{3}\times\pi\times(1^2+2^2+1\times2)\times4=\frac{52}{3}\pi$.

6. 答案　C

命题意图　本题考查基本不等式，考查数学运算、逻辑推理的核心素养.

解析　依题意，$a+b=\frac{1}{14}\left(\frac{1}{5a+2b}+\frac{1}{2a+5b}\right)(5a+2b+2a+5b)=\frac{1}{14}\left(2+\frac{2a+5b}{5a+2b}+\frac{5a+2b}{2a+5b}\right)\geqslant\frac{1}{14}\left(2+2\sqrt{\frac{2a+5b}{5a+2b}\cdot\frac{5a+2b}{2a+5b}}\right)=\frac{2}{7}$，当且仅当 $\frac{2a+5b}{5a+2b}=\frac{5a+2b}{2a+5b}$，即 $a=b=\frac{1}{7}$ 时等号成立，故 $a+b$ 的最小值为 $\frac{2}{7}$.

7. 答案　B

命题意图　本题考查三角函数的诱导公式、两角差的余弦公式，考查数学运算、逻辑推理的核心素养.

解析　依题意，$\frac{\sin1\,100^\circ-2\sin100^\circ}{\cos160^\circ}=\frac{2\cos10^\circ-\sin20^\circ}{\cos20^\circ}=\frac{2\cos(30^\circ-20^\circ)-\sin20^\circ}{\cos20^\circ}=\frac{\sqrt{3}\cos20^\circ+\sin20^\circ-\sin20^\circ}{\cos20^\circ}=$

$\frac{\sqrt{3}\cos 20°}{\cos 20°}=\sqrt{3}$.

8. 答案　A

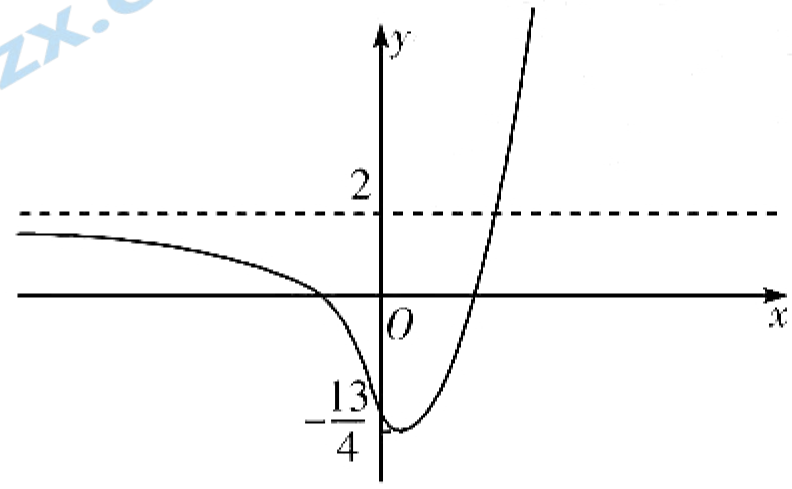
命题意图　本题考查平面向量的基本定理、向量的数量积，考查数学运算、直观想象、逻辑推理的核心素养.

解析　依题意，D 为 $\triangle ABC$ 的外接圆圆心. 而$\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AB}$，即$\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}$，则 $2\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}$，故 BC 为圆 D 的直径，则 $\angle BAC=90°$. 又 $|\overrightarrow{DA}|=|\overrightarrow{AB}|=2$，故 $\triangle ABD$ 是等边三角形，$\angle ADB=60°$，则$\overrightarrow{AD}\cdot(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC})=\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{CB}=2\times4\times\left(-\frac{1}{2}\right)=-4$.

9. 答案　D

命题意图　本题考查分段函数的图象与性质、函数的零点，考查数学运算、直观想象、逻辑推理的核心素养.

解析　当 $x\leqslant0$ 时，$f(x)=\frac{2x+3}{x-1}=\frac{2x-2+5}{x-1}=2+\frac{5}{x-1}$，可知函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,0]$ 上单调递减. 令 $g(x)=0$，得 $f(x)=m$. 作出函数 $f(x)$ 的大致图象如图所示，观察可知，$m\in\left(-\frac{13}{4},2\right)$.



10. 答案　B

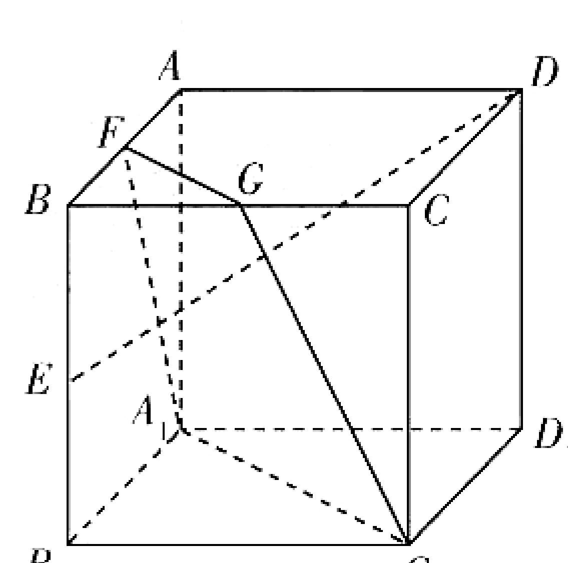
命题意图　本题考查函数模型的应用、指对数的运算，考查数学运算、数学建模、逻辑推理的核心素养.

解析　易知初始状态下，废气中的污染物浓度为 P_0，则$\frac{3}{4}P_0=P_0\cdot e^{-2k}$，则$\frac{3}{4}=e^{-2k}$，解得 $k=\ln 2-\frac{\ln 3}{2}$，故①错误；当 $t=1$ 时，$P=P_0\cdot e^{\frac{\ln 3}{2}-\ln 2}=\frac{\sqrt{3}}{2}P_0$，此时消除的污染物为原来的$\left(1-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$，故②错误；当 $t=5$ 时，$P=P_0\cdot e^{5\left(\frac{\ln 3}{2}-\ln 2\right)}=P_0\cdot\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^5=P_0\cdot\frac{9}{16}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}<\frac{1}{2}P_0$，故③正确.

11. 答案　D

命题意图　本题考查空间线面的位置关系，考查数学运算、直观想象、逻辑推理的核心素养.

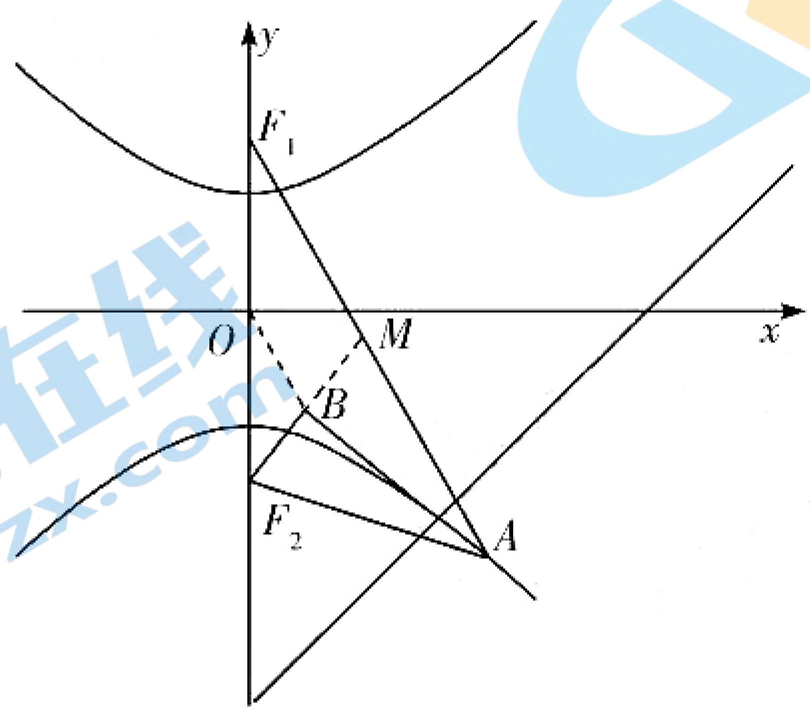
解析　作出图形如图所示. 设该正方体外接球的半径为 R，依题意，$4\pi R^2=27\pi$，解得 $R^2=\frac{27}{4}$，故 $R=\frac{3\sqrt{3}}{2}$，故 $AB=3$. 分别取棱 AB,BC 的中点 F,G，连接 FG,A_1F,C_1G,A_1C_1，易证截面图形为等腰梯形 C_1A_1FG，由题可知 $FG=\frac{1}{2}A_1C_1=\frac{3\sqrt{2}}{2}$，$A_1F=C_1G=\frac{3\sqrt{5}}{2}$，所以等腰梯形 C_1A_1FG 的高为$\frac{9\sqrt{2}}{4}$，故截面图形的面积为$\frac{1}{2}\times\left(\frac{3\sqrt{2}}{2}+3\sqrt{2}\right)\times\frac{9\sqrt{2}}{4}=\frac{81}{8}$.



12. 答案　D

命题意图　本题考查双曲线的方程与几何性质、直线与圆的位置关系,考查数学运算、数学建模、逻辑推理的核心素养.

解析　作出图形如图所示,设 A 为双曲线 C 下支上的一点,延长 F_2B 与 AF_1 交于点 M,连接 OB,由 $BF_2\perp AB$,且 $\angle F_1AB=\angle F_2AB$,可得 $|AM|=|AF_2|$,故 $|MF_1|=|AF_1|-|AM|=|AF_1|-|AF_2|=2a=8$,故 $|OB|=\frac{1}{2}|MF_1|=4$,则点 B 在圆 $x^2+y^2=16$ 上. 因为点 O 到直线 $l:y=x-8$ 的距离为 $\frac{8}{\sqrt{2}}=4\sqrt{2}$,故 $|BD|$ 的最小值为 $4\sqrt{2}-4$.

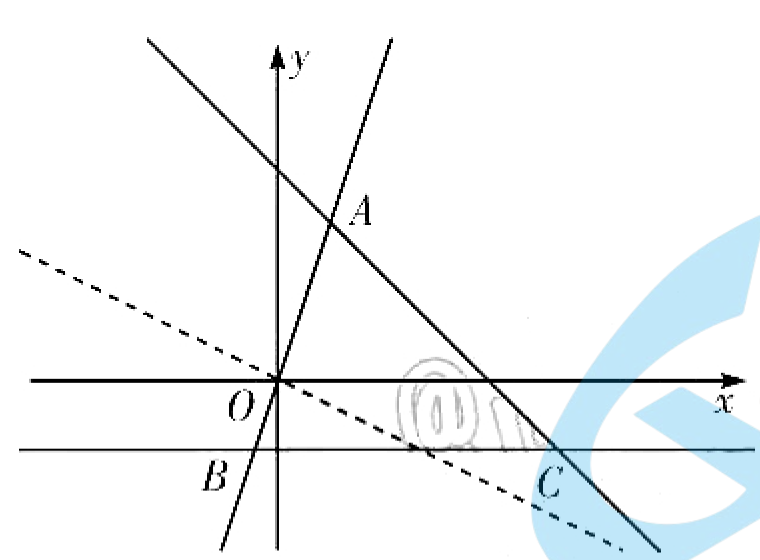


二、填空题:本题共 4 小题,每小题 5 分,共 20 分.

13. 答案　$\frac{21}{4}$

命题意图　本题考查线性规划,考查数学运算、直观想象、逻辑推理的核心素养.

解析　作出不等式组所表示的平面区域,如图中阴影部分所示. 观察可知,当直线 $z=x+2y$ 过点 A 时,z 有最大值. 联立 $\begin{cases}x+y=3,\\3x-y=0,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}x=\frac{3}{4},\\y=\frac{9}{4},\end{cases}$ 故 z 的最大值为 $\frac{3}{4}+\frac{18}{4}=\frac{21}{4}$.



14. 答案　78

命题意图　本题考查函数的值域、对数的运算,考查数学运算、直观想象、逻辑推理的核心素养.

解析　当 $x\in[0,6]$ 时,$f(x)=\log_9(x+3)\in\left[\frac{1}{2},1\right]$,因为 $\forall x_1\in[0,m]$, $\exists x_2\in[0,m]$,使得 $f(x_1)=\frac{1}{f(x_2)}$,故当 $x\in[6,m]$ 时,$f(x)\in[1,2]$ 即可,故 $\log_9(m+3)=2$,则 $m=78$.

15. 答案　$\frac{3}{2}$

命题意图　本题考查抛物线的方程与性质,考查数学运算、直观想象、逻辑推理的核心素养.

解析　依题意,抛物线 $C:y^2=6x$,设 $M\left(\frac{y_0^2}{6},y_0\right)$,则 $k_{OM}=\frac{6}{y_0}$,而 $\overrightarrow{OM}=2\overrightarrow{ON}$,故 $N\left(\frac{y_0^2}{12},\frac{y_0}{2}\right)$,则直线 l_2 的方程为 $y-\frac{y_0}{2}=-\frac{y_0}{6}\left(x-\frac{y_0^2}{12}\right)$. 令 $y=0$,得 $x=\frac{y_0^2}{12}+3$,故 $P\left(\frac{y_0^2}{12}+3,0\right)$. 由 $2|OP|=|MF|+\lambda p$,可得 $\frac{y_0^2}{6}+6=\frac{y_0^2}{6}+\frac{3}{2}+$

3λ，解得 $\lambda=\frac{3}{2}$.

16. **答案** π；$[\sqrt{2},2^{\frac{5}{4}}]$

命题意图 本题考查三角函数的图象与性质、利用导数研究函数的性质，考查数学运算、直观想象、逻辑推理的核心素养.

解析 因为 $f(x+\pi)=\sqrt{2\left|\sin\frac{x+\pi}{2}\right|}+\sqrt{2\left|\cos\frac{x+\pi}{2}\right|}=\sqrt{2\left|\sin\frac{x}{2}\right|}+\sqrt{2\left|\cos\frac{x}{2}\right|}=f(x)$，故 $x=\pi$ 为 $f(x)$ 的一个周期. 而当 $x\in(0,\pi)$ 时，$f(x)=\sqrt{2\sin\frac{x}{2}}+\sqrt{2\cos\frac{x}{2}}$，由题可知 $f'(x)=\sqrt{2}\left(\frac{\cos\frac{x}{2}}{4\sqrt{\sin\frac{x}{2}}}-\frac{\sin\frac{x}{2}}{4\sqrt{\cos\frac{x}{2}}}\right)=\frac{1}{2\sqrt{\sin x}}\left[\left(\cos\frac{x}{2}\right)^{\frac{3}{2}}-\left(\sin\frac{x}{2}\right)^{\frac{3}{2}}\right]$，令 $f'(x)=0$，得 $\cos\frac{x}{2}=\sin\frac{x}{2}$，故 $\frac{x}{2}=\frac{\pi}{4}$，$x=\frac{\pi}{2}$. 因为当 $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ 时，$f'(x)>0$，当 $x\in\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$ 时，$f'(x)<0$，故 $f(x)$ 在 $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ 上单调递增，在 $\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$ 上单调递减，故 $f(x)$ 的最小正周期为 π，且 $f(x)$ 在 $\left[\frac{\pi}{3},\pi\right]$ 上的最大值为 $f\left(\frac{\pi}{2}\right)=2^{\frac{5}{4}}$，而 $f(\pi)=\sqrt{2}$，$f\left(\frac{\pi}{3}\right)=1+3^{\frac{1}{4}}$，故 $f\left(\frac{\pi}{3}\right)>f(\pi)$，故当 $x\in\left[\frac{\pi}{3},\pi\right]$ 时，函数 $f(x)$ 的值域为 $[\sqrt{2},2^{\frac{5}{4}}]$.

三、解答题：共 70 分. 解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤.

17. **命题意图** 本题考查三角函数的图象与性质，考查数学运算、逻辑推理的核心素养.

解析 （Ⅰ）依题意，$f(x)=3\cdot\frac{1-\cos 3x}{2}+a\sin 3x=a\sin 3x-\frac{3}{2}\cos 3x+\frac{3}{2}$， ……（2 分）

故 $\sqrt{a^2+\frac{9}{4}}+\frac{3}{2}=\frac{9}{2}$，故 $\sqrt{a^2+\frac{9}{4}}=3$. ……（3 分）

因为 $a>0$，所以 $a=\frac{3\sqrt{3}}{2}$. ……（4 分）

（Ⅱ）依题意，$f(x)=3\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\sin 3x-\frac{1}{2}\cos 3x\right)+\frac{3}{2}=3\sin\left(3x-\frac{\pi}{6}\right)+\frac{3}{2}$. ……（5 分）

令 $\frac{\pi}{2}+2k\pi\leqslant 3x-\frac{\pi}{6}\leqslant\frac{3\pi}{2}+2k\pi(k\in\mathbf{Z})$，

解得 $\frac{2\pi}{9}+\frac{2k\pi}{3}\leqslant x\leqslant\frac{5\pi}{9}+\frac{2k\pi}{3}(k\in\mathbf{Z})$. ……（7 分）

令 $k=1$，得 $\frac{8\pi}{9}\leqslant x\leqslant\frac{11\pi}{9}$，令 $k=2$，得 $\frac{14\pi}{9}\leqslant x\leqslant\frac{17\pi}{9}$，

故 $f(x)$ 在 $[\pi,2\pi]$ 上的单调递减区间为 $\left[\pi,\frac{11\pi}{9}\right]$ 和 $\left[\frac{14\pi}{9},\frac{17\pi}{9}\right]$. ……（10 分）

18. **命题意图** 本题考查等比数列的定义、错位相减法，考查数学运算、逻辑推理的核心素养.

解析 （Ⅰ）依题意，$a_{n+2}+4S_n+4a_n=4S_{n+1}$，故 $a_{n+2}-4a_{n+1}+4a_n=0$，

则 $a_{n+2}-2a_{n+1}=2(a_{n+1}-2a_n)$. ……（2 分）

因为 $a_2=2a_1=6$，所以 $a_2-2a_1=0$.

所以 $a_{n+1}-2a_n=0$，即数列 $\{a_n\}$ 是首项为 3，公比为 2 的等比数列. ……（4 分）

故 $a_n=3\cdot 2^{n-1}$. ……（6 分）

（Ⅱ）依题意，$\frac{8n+10}{3}\cdot a_{2n}=(4n+5)\cdot 4^n$， ……（8 分）

故 $T_n=9\cdot4^1+13\cdot4^2+17\cdot4^3+\cdots+(4n+5)\cdot4^n$,

$4T_n=9\cdot4^2+13\cdot4^3+17\cdot4^4+\cdots+(4n+5)\cdot4^{n+1}$, ……………………………………(9 分)

两式相减可得, $-3T_n=9\cdot4^1+4\cdot4^2+4\cdot4^3+\cdots+4\cdot4^n-(4n+5)\cdot4^{n+1}$

$=4\cdot4^1+4\cdot4^2+4\cdot4^3+\cdots+4\cdot4^n-(4n+5)\cdot4^{n+1}+20$ ……………………(10 分)

$=\dfrac{16(4^n-1)}{4-1}-(4n+5)\cdot4^{n+1}+20$

$=-\left(4n+\dfrac{11}{3}\right)4^{n+1}+\dfrac{44}{3}$. ……………………………………(11 分)

故 $T_n=\left(\dfrac{4n}{3}+\dfrac{11}{9}\right)4^{n+1}-\dfrac{44}{9}$. ……………………………………(12 分)

19. **命题意图** 本题考查正弦定理、余弦定理、三角形的面积公式、三角恒等变换,考查数学运算、直观想象、逻辑推理的核心素养.

解析 (Ⅰ)在 $\triangle AMC$ 中,由余弦定理可得 $CM^2=AM^2+AC^2-2AM\cdot AC\cdot\cos\angle MAC$,① ……………(2 分)

又 $AM+MC=2\sqrt{3}$,② ……………………………………(3 分)

联立①②解得 $AM=MC=\sqrt{3}$,故 $\triangle AMC$ 是等腰三角形. ……………………………………(4 分)

(Ⅱ)由(Ⅰ)可知, $\angle AMC=\dfrac{2\pi}{3}$,故 $\angle AMB=\dfrac{\pi}{3}$. ……………………………………(5 分)

因为 $\begin{cases}\tan B=\dfrac{\sin B}{\cos B}=\dfrac{\sqrt{3}}{5},\\ \sin^2B+\cos^2B=1,\end{cases}$ 故 $\sin B=\dfrac{\sqrt{21}}{14}$, $\cos B=\dfrac{5\sqrt{7}}{14}$. ……………………………………(7 分)

在 $\triangle AMB$ 中,由正弦定理可得 $\dfrac{AB}{\sin\angle AMB}=\dfrac{AM}{\sin B}$,故 $AB=\sqrt{21}$, ……………………………………(8 分)

由余弦定理可得 $AB^2=AM^2+MB^2-2AM\cdot MB\cdot\cos\angle AMB$,

则 $MB^2-\sqrt{3}MB-18=0$,解得 $MB=3\sqrt{3}$. ……………………………………(10 分)

故 $\triangle AMB$ 的面积为 $\dfrac{1}{2}\cdot AM\cdot BM\cdot\sin\angle AMB=\dfrac{9\sqrt{3}}{4}$,

$\triangle AMC$ 的面积为 $\dfrac{1}{2}\cdot AM\cdot CM\cdot\sin\angle AMC=\dfrac{3\sqrt{3}}{4}$.

故 $\triangle ABM$ 与 $\triangle ACM$ 的面积之差为 $\dfrac{9\sqrt{3}}{4}-\dfrac{3\sqrt{3}}{4}=\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$. ……………………………………(12 分)

20. **命题意图** 本题考查空间线面的位置关系、向量法求空间角,考查直观想象、逻辑推理、数学运算的核心素养.

解析 (Ⅰ)如图,在平面图形中,连接 BD 交 AM 于 O,连接 MN.

因为 $BC\,/\!/\,AM$, $AB\,/\!/\,CM$,所以四边形 $ABCM$ 为平行四边形,所以 $AB=CM$. ……………………(1 分)

在 $\triangle CBD$ 中,由余弦定理,得 $BD^2=CD^2+CB^2-2CD\cdot CB\cdot\cos\angle BCD=CB^2$,

所以 $CB=BD$,则 $CB^2+BD^2=CD^2$,故 $\angle CBD=90°$, ……………………………………(2 分)

则 $\angle ABD=45°$,则 $AB=AD=\dfrac{\sqrt{2}}{2}BD=\dfrac{1}{2}CD$,故 $CM=DM$.

因为 M,N 分别为 CD,BC 的中点,所以 $MN\,/\!/\,BD$,所以 $MN\perp AM$. ……………………………………(3 分)

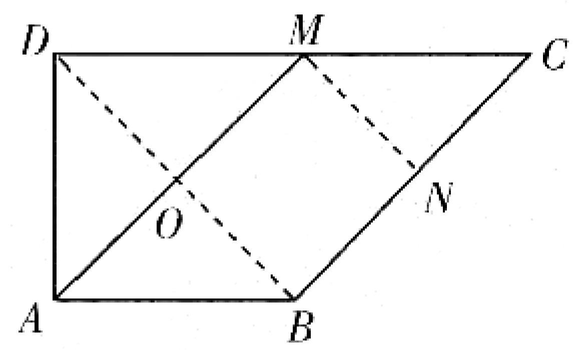
在立体图形中,连接 MN. 因为平面 $PAM\perp$ 平面 AMC,且平面 $PAM\cap$ 平面 $AMC=AM$, $MN\subset$ 平面 $ABCM$,

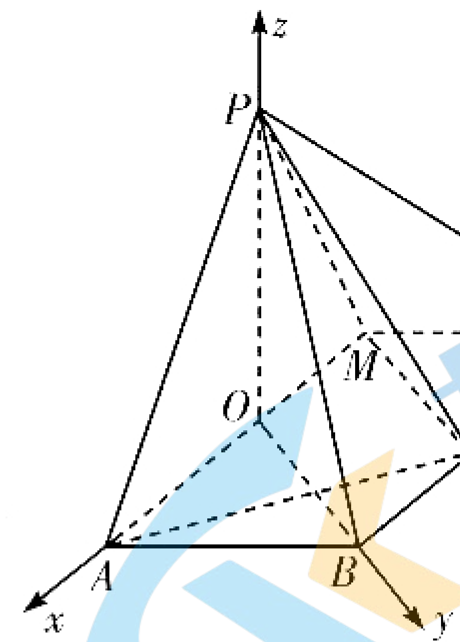
故 $MN\perp$ 平面 PAM. ……………………………………(4 分)

因为 $PA\subset$ 平面 PAM,故 $PA\perp MN$.

又 $AP\perp MP$, $MN\cap MP=M$,故 $AP\perp$ 平面 PMN. ……………………………………(5 分)

而 $PN \subset$ 平面 PMN，故 $AP \perp PN$. ………………………………………………………………………………（6 分）





（Ⅱ）取 AM 的中点 O，连接 OB,OP,MN. 由（Ⅰ）可知，可以 O 为坐标原点，OA,OB,OP 所在直线为 x,y,z 轴，建立如图所示的空间直角坐标系，不妨设 $AB=2$，

则 $P(0,0,\sqrt{2}),A(\sqrt{2},0,0),C(-2\sqrt{2},\sqrt{2},0),M(-\sqrt{2},0,0),N(-\sqrt{2},\sqrt{2},0)$. ………………………（7 分）

$\overrightarrow{PC}=(-2\sqrt{2},\sqrt{2},-\sqrt{2}),\overrightarrow{CM}=(\sqrt{2},-\sqrt{2},0)$，

设平面 PCM 的法向量为 $\boldsymbol{m}=(x_1,y_1,z_1)$，则 $\begin{cases}\boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{PC}=0,\\ \boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{CM}=0,\end{cases}$

即 $\begin{cases}-2x_1+y_1-z_1=0,\\ x_1-y_1=0,\end{cases}$ 故 $\begin{cases}x_1=y_1,\\ x_1=-z_1,\end{cases}$ 令 $x_1=1$，得 $\boldsymbol{m}=(1,1,-1)$. ……………………………（9 分）

$\overrightarrow{PA}=(\sqrt{2},0,-\sqrt{2}),\overrightarrow{AN}=(-2\sqrt{2},\sqrt{2},0)$，

设平面 PAN 的法向量为 $\boldsymbol{n}=(x_2,y_2,z_2)$，则 $\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{PA}=0,\\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{AN}=0,\end{cases}$

即 $\begin{cases}x_2-z_2=0,\\ -2x_2+y_2=0,\end{cases}$ 故 $\begin{cases}x_2=\dfrac{1}{2}y_2,\\ x_2=z_2,\end{cases}$ 令 $x_2=1$，得 $\boldsymbol{n}=(1,2,1)$. ………………………………（11 分）

设平面 PAN 与平面 PCM 所形成的锐二面角为 θ，则 $\cos\theta=\dfrac{|\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{n}|}{|\boldsymbol{m}||\boldsymbol{n}|}=\dfrac{2}{\sqrt{3}\times\sqrt{6}}=\dfrac{\sqrt{2}}{3}$，

即所求锐二面角的余弦值为 $\dfrac{\sqrt{2}}{3}$. ………………………………………………………………………（12 分）

21. **命题意图** 本题考查椭圆的方程、弦长问题、直线与椭圆的综合性问题，考查数学运算、逻辑推理的核心素养.

解析 （Ⅰ）依题意，$D(0,1)$，直线 $l:y=2x+1$. ……………………………………………………………（1 分）

联立 $\begin{cases}y=2x+1,\\ \dfrac{x^2}{4}+y^2=1,\end{cases}$ 消去 y 得 $17x^2+16x=0$，解得 $x=-\dfrac{16}{17}$ 或 0. ………………………………………（3 分）

则 $|DG|=\sqrt{1+2^2}\cdot\left|-\dfrac{16}{17}-0\right|=\dfrac{16\sqrt{5}}{17}$. …………………………………………………………………（5 分）

（Ⅱ）设直线 DP 的方程为 $y=k_1x+1\left(k_1\neq 0\text{ 且 }k_1\neq\pm\dfrac{1}{2}\right)$，

直线 BP 的方程为 $y=k_2(x-2)\left(k_2\neq 0\text{ 且 }k_2\neq\pm\dfrac{1}{2}\right)$.

所以直线 DP 与 x 轴的交点为 $M\left(-\dfrac{1}{k_1},0\right)$. …………………………………………………………（6 分）

因为直线 AD 的方程为 $y=\dfrac{1}{2}x+1$，

所以直线 BP 与直线 AD 的交点为 $E\left(\frac{4k_2+2}{2k_2-1},\frac{4k_2}{2k_2-1}\right)$. ……………………………………（8 分）

所以直线 TM 的斜率 $k_{TM}=\frac{k_1}{2k_1+1}$，直线 TE 的斜率 $k_{TE}=\frac{1}{2}k_2+\frac{1}{4}$.

所以 $k_{TM}-k_{TE}=\frac{k_1}{2k_1+1}-\left(\frac{1}{2}k_2+\frac{1}{4}\right)=-\frac{4k_1k_2+2k_2-2k_1+1}{4(2k_1+1)}$. ……………………………………（9 分）

将 $y=k_1x+1$ 代入方程 $\frac{x^2}{4}+y^2=1$，得 $(4k_1^2+1)x^2+8k_1x=0$.

所以点 P 的横坐标为 $x_P=-\frac{8k_1}{4k_1^2+1}$，则 $y_P=-\frac{4k_1^2-1}{4k_1^2+1}$. ……………………………………（10 分）

将点 P 的坐标代入直线 BP 的方程 $y=k_2(x-2)$，整理得 $(1+2k_1)(1-2k_1+2k_2+4k_1k_2)=0$. ………（11 分）

因为 $1+2k_1\neq0$，所以 $1-2k_1+2k_2+4k_1k_2=0$，所以 $k_{TM}-k_{TE}=0$，

所以直线 EM 过定点 $T(2,1)$. ……………………………………（12 分）

22. **命题意图** 本题考查导数的几何意义、利用导数研究函数的性质，考查数学运算、逻辑推理的核心素养.

解析 （Ⅰ）依题意，$f(x)=x(e^x-2e)$，故 $f'(x)=e^x-2e+xe^x$，……………………………………（1 分）

故 $f'(1)=e-2e+e=0$，……………………………………（2 分）

而 $f(1)=-e$，故所求切线方程为 $y=-e$. ……………………………………（4 分）

（Ⅱ）依题意，$a\leqslant e^x-\frac{2\ln x+\ln\frac{e^2}{4}}{x}$，令 $h(x)=e^x-\frac{2\ln x+\ln\frac{e^2}{4}}{x}$，

则 $h'(x)=e^x-\frac{-2\ln x+2\ln 2}{x^2}=\frac{x^2e^x+2\ln x-2\ln 2}{x^2}$. ……………………………………（5 分）

令 $u(x)=x^2e^x+2\ln x-2\ln 2$，

则当 $x\in(0,+\infty)$ 时，$u'(x)=(x^2+2x)e^x+\frac{2}{x}>0$，……………………………………（6 分）

则 $u(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，因为 $u(1)=e-2\ln 2>0$，$u\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{\sqrt{e}}{4}-4\ln 2<0$，

所以存在 $x_0\in\left(\frac{1}{2},1\right)$，$u(x_0)=x_0^2e^{x_0}+2\ln x_0-2\ln 2=0$，……………………………………（7 分）

则 $x_0^2e^{x_0}=2\ln\frac{2}{x_0}$，故 $x_0e^{x_0}=\frac{2}{x_0}\ln\frac{2}{x_0}$.

令 $v(x)=xe^x$，$x\in(0,+\infty)$，则 $v'(x)=(x+1)e^x>0$，

所以 $v(x)=xe^x$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，则 $x_0=\ln\frac{2}{x_0}$. ……………………………………（9 分）

因为当 $0<x<x_0$ 时，$h'(x)<0$，当 $x>x_0$ 时，$h'(x)>0$，

即函数 $h(x)$ 在 $(0,x_0)$ 上单调递减，在 $(x_0,+\infty)$ 上单调递增，……………………………………（10 分）

所以 $[h(x)]_{\min}=h(x_0)=e^{x_0}-\frac{2\ln x_0-2\ln 2+2}{x_0}=\frac{2}{x_0}-\frac{2\ln x_0-2\ln 2+2}{x_0}=\frac{2}{x_0}-\frac{-2x_0+2}{x_0}=2$，

故 a 的取值范围为 $(-\infty,2]$. ……………………………………（12 分）