数　学

座位号________

考生号________

姓名________

注意事项：

1. 答卷前，考生务必将自己的姓名、考生号、考场号、座位号填写在答题卡上。

2. 回答选择题时，选出每小题答案后，用铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其他答案标号。回答非选择题时，将答案写在答题卡上。写在本试卷上无效。

3. 考试结束后，将本试卷和答题卡一并交回。

一、选择题（本大题共 **8** 小题，每小题 **5** 分，共 **40** 分. 在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.）

1. 若复数 $z=(1+2\mathrm{i})(1-\mathrm{i})$（i 为虚数单位），则复数 z 的模为

A. $\sqrt{10}$　　B. $2\sqrt{2}$　　C. $\sqrt{5}$　　D. $\sqrt{2}$

2. 已知集合 $A=\{s|s=2n+1, n\in \mathbf{Z}\}$，$B=\{x|-3<x<4\}$，则 $A\cap B=$

A. $\{-3,-2,-1,0,1,2,3,4\}$　　B. $\{-2,-1,0,1,2,3\}$

C. $\{-3,-2,-1,1,3\}$　　D. $\{-1,1,3\}$

3. 1707 年数学家欧拉发现了指数与对数的互逆关系：当 $a>0, a\neq 1$ 时，$a^x=N$ 等价于 $x=\log_a N$. 若 $\mathrm{e}^x=128$（e 是自然对数的底数），$\lg 2\approx 0.3010$，$\lg \mathrm{e}\approx 0.4343$，则 x 的值约为

A. 4.1613　　B. 4.8515　　C. 5.5446　　D. 6.2376

4. 若函数 $f(x)=(x+a)(x+2)^2$ 在 $x=-1$ 处有极小值，则实数 a 的值为

A. -1　　B. $-\frac{1}{2}$　　C. $\frac{1}{2}$　　D. 1

5. 将函数 $f(x)=2\sin\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)$ 的图象向右平移 $\varphi(\varphi>0)$ 个单位长度得到函数 $g(x)$ 的图象，则"$\varphi=\frac{3\pi}{8}$"是"函数 $g(x)$ 为偶函数"的

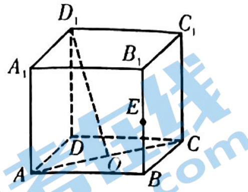
A. 充分不必要条件　　B. 必要不充分条件

C. 充要条件　　D. 既不充分也不必要条件

6. 在"最强大脑"的双英对抗赛中，甲、乙两人同时挑战 100 秒记忆力项目，根据以往甲、乙两人同场对抗挑战该项目的记录统计分析，在对抗挑战中甲挑战成　率是 $\frac{4}{15}$，乙挑战成功的概率是 $\frac{2}{15}$，甲、乙均未挑战成功的概率是 $\frac{7}{10}$，则在甲挑战成功的条件下，乙挑战成功的概率为

A. $\frac{1}{2}$　　B. $\frac{3}{8}$　　C. $\frac{2}{5}$　　D. $\frac{7}{15}$

7. 如图，已知正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的棱长为 2，点 O 为底面 $ABCD$ 的中心，侧棱 BB_1 的中点为 E，则三棱锥 D_1-OCE 的体积为



A. 1　　　　B. 2

C. $\dfrac{\sqrt{10}}{6}$　　　　D. $\dfrac{\sqrt{15}}{6}$

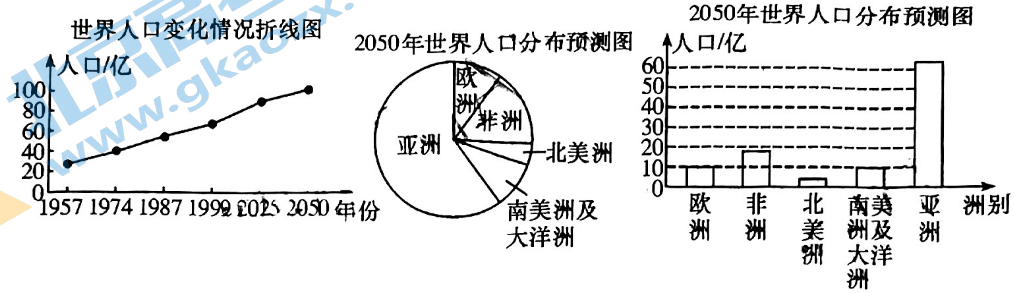
8. 已知函数 $f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上不恒为零的函数，对任意的 $x,y\in\mathbf{N}^*$ 均满足：$(x+y)f(x)f(y)=xyf(x+y)$，$f(1)=2$，则 $\sum\limits_{k=1}^{20}f(k)=$

A. $2^{20}+2$　　　　B. $2^{21}-2$

C. $19\times2^{20}+2$　　　　D. $19\times2^{21}+2$

二、选择题（本大题共 **4** 小题，每小题 **5** 分，共 **20** 分. 在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求. 全部选对的得 **5** 分，部分选对的得 **2** 分，有选错的得 **0** 分.）

9. 如图所示是世界人口变化情况的三幅统计图：



则下列结论正确的是

A. 从折线图能看出世界人口的总量随着年份的增加而增加

B. 2050 年亚洲人口将比其他各洲人口的总和还要多

C. 2050 年南美洲及大洋洲人口之和将与欧洲人口基本持平

D. 1957 年到 2050 年各洲中北美洲人口增长速度最慢

10. 若圆 $C_1:x^2+y^2=1$ 和 $C_2:x^2+y^2-2\sqrt{3}ax-2ay-5=0(a>0)$ 有且仅有一条公切线 l，则下列结论正确的是

A. 圆 C_1 与圆 C_2 内切　　　　B. $a=1$

C. 公切线 l 的方程为 $2x-2\sqrt{3}y+\sqrt{3}=0$　　　　D. 公切线 l 的方程为 $\sqrt{3}x+y+2=0$

11. 设抛物线 $y^2=8x$ 的焦点为 F，准线 l 与 x 轴交于点 P，过点 P 的直线与抛物线依次交于 A，B 两点（点 A 在 P，B 两点之间），FA 交 y 轴于点 M，FB 交准线 l 于点 N. 则下列结论正确的是

A. 点 P 坐标为 $(-2,0)$　　　　B. 直线 FA，FB 关于 x 轴对称

C. $|FM|=2|FN|$　　　　D. $2|FM|=|FN|$

12. 已知 $m,n\in(0,+\infty)$，且 $m+\ln m=\dfrac{1}{m}+e^{\frac{1}{m}}$，$n^2e^n=-\ln n$，则下列结论正确的是

A. $m=e^n$　　　　B. $n=e^m$

C. $mn<e^n$　　　　D. $mn\geq e^n$

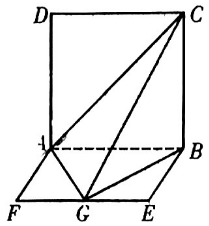
三、填空题（本大题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分.）

13. 已知 $\alpha,\beta\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$，$\tan\alpha=2\sqrt{3}$，$\tan\beta=\frac{\sqrt{3}}{2}$，则 $\tan(\alpha-\beta)=$________.

14. 已知向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 的夹角为 $\frac{\pi}{4}$，且 $|\boldsymbol{a}|=2\sqrt{2}$，$|\boldsymbol{b}|=2$，则向量 $\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b}$ 在向量 $\boldsymbol{a}$ 上的投影向量为________.

15. 已知双曲线 $C:\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 的左、右焦点分别为 F_1,F_2，过点 F_1 的直线与双曲线在第二象限的交点为 A，在$\triangle AF_1F_2$ 中，$|F_1A|=|F_1F_2|$，$\angle AF_2F_1=30°$，则双曲线 C 的离心率是________.

16. 如图，平面 $ABCD\perp$ 平面 $ABEF$，正方形 $ABCD$ 的边长为 4，矩形 $ABEF$ 的边 AF 的长为 2，若 G 是边 EF 上的动点，则三棱锥 $C-ABG$ 的外接球体积的最小值为________.



四、解答题（本大题共 6 小题，共 70 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.）

17. （本小题满分 10 分）

在锐角$\triangle ABC$ 中，角 A,B,C 的对边分别为 a,b,c，$2\sin A\sin\left(A+\frac{\pi}{6}\right)=\sqrt{3}$.

(1)求角 A 的大小；

(2)若 $\sqrt{2}a=\sqrt{3}b$，$c=\sqrt{6}+\sqrt{2}$，求$\triangle ABC$ 的面积.

18. （本小题满分 12 分）

已知递增等差数列 $\{a_n\}$ 满足：$a_1=2$，$a_{n+1}^2-2a_{n+1}=a_n^2+2a_n$.

(1)求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式；

(2)若数列 $\{b_n\}$ 满足 $b_n=1+(-1)^n a_n$，求数列 $\{b_n\}$ 的前 $2n$ 项和 T_{2n}.

19.（本小题满分 12 分）

已知椭圆 $C:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$的左、右顶点分别为 A_1,A_2，上、下顶点分别为 B_1,B_2，若四边形 $A_1B_1A_2B_2$ 面积为 4，椭圆 C 离心率为$\frac{\sqrt{3}}{2}$.

(1)求椭圆 C 的标准方程；

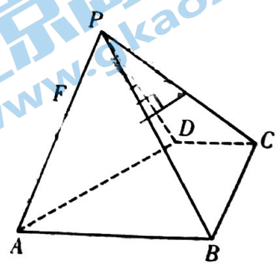
(2)设点 Q 是椭圆 C 上异于 B_1,B_2 的一动点，过定点 $E(-1,-1)$ 与动点 Q 的直线与椭圆 C 交于另一点 P，记直线 QB_1,PB_1 的斜率分别为 k_1,k_2，若直线 PQ 的斜率存在，求 k_1+k_2 的值.

20.（本小题满分 12 分）

如图，在四棱锥 $P-ABCD$ 中，底面 $ABCD$ 为直角梯形，$AB/\!/CD$，$AB\perp BC$，$\angle DAB=45°$，$PA=PD=BC=2CD=2$.

(1)若点 F 在线段 AP 上，$\overrightarrow{AF}=\lambda\overrightarrow{FP}$，$DF/\!/$平面 PBC，求 λ 的值；

(2)若平面 $PAD\perp$平面 $ABCD$，求平面 PAD 与平面 PBC 的夹角的余弦值.



21.(本小题满分 12 分)

甲、乙两名运动员进行乒乓球训练赛,规定每局比赛胜者得 1 分,负者得 0 分,比赛一直进行到一方比另一方多两分为止,多得两分的一方赢得比赛.已知每局比赛中,甲获胜的概率为 p,乙获胜的概率为 q,每局比赛结果相互独立.

(1)若比赛最多进行 5 局,求比赛结束时比赛局数 X 的分布列及期望 $E(X)$ 的最大值;

(2)甲、乙两人为达到最佳训练效果,俩人约定不限制比赛局数,记"甲运动员赢得比赛"为事件 M,证明:$P(M)=\frac{p^2}{p^2+q^2}$.

22.(本小题满分 12 分)

已知函数 $f(x)=e^x-\frac{1}{3}x^2-1$,$g(x)=ax\sin x-\frac{1}{2}x^2+x$.

(1)求证:当 $x>0$ 时,$f(x)>x$;

(2)若函数 $F(x)=f(x)-g(x)$ 在区间 $(0,\pi)$ 上有唯一零点,求实数 a 的取值范围.