浙江省百校起点24届调研测试

高三数学考试　　2023.9

注意事项：

1. 答题前，考生务必将自己的姓名、考生号、考场号、座位号填写在答题卡上。

2. 回答选择题时，选出每小题答案后，用铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其他答案标号。回答非选择题时，将答案写在答题卡上。写在本试卷上无效。

3. 考试结束后，将本试卷和答题卡一并交回。

4. 本试卷主要考试内容：高考全部内容。

一、选择题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分. 在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.

1. 已知集合 $M=\{x\mid x>1\}, N=\{x\mid -1<3x-1<8\}$，则 $M\cap N=$

A. $(0,1)$　　B. $(1,3)$　　C. $(1,+\infty)$　　D. $(3,+\infty)$

2. 若数列 $\{a_n\}$ 的通项公式为 $a_n=\left(-\frac{1}{2}\right)^n$，则

A. 数列 $\{a_n+a_{n+1}\}$ 是首项为 $\frac{1}{4}$，公比为 $\frac{1}{2}$ 的等比数列

B. 数列 $\{a_n+a_{n+1}\}$ 是首项为 $-\frac{1}{4}$，公比为 $-\frac{1}{2}$ 的等比数列

C. 数列 $\{a_n+a_{n+1}\}$ 是首项为 $-\frac{1}{4}$，公比为 $\frac{1}{2}$ 的等比数列

D. 数列 $\{a_n+a_{n+1}\}$ 是首项为 $-\frac{1}{2}$，公比为 $-\frac{1}{2}$ 的等比数列

3. 已知复数 $z=\frac{10+5\mathrm{i}}{2-\mathrm{i}}$，则 $\mathrm{i}\bar{z}$ 在复平面内对应的点位于

A. 第一象限　　B. 第二象限　　C. 第三象限　　D. 第四象限

4. $(2x-y)^5$ 的展开式中，x^2y^3 的系数为

A. -10　　B. 10　　C. -40　　D. 40

5. 牛皮鼓，又称堂鼓、喜庆鼓，多用于江南祠堂内婚嫁迎娶和迎新年等. 牛皮鼓的制作工艺考究，有数十道工序，包括处理牛皮、刨制鼓腔、蒙皮、拉皮、钉钉，每道工序都考验着手艺人的技艺和耐心. 如图所示的牛皮鼓的鼓面直径为 $50\mathrm{cm}$，鼓身高度为 $60\mathrm{cm}$，用平行于鼓面的平面截牛皮鼓，所得截面圆的最大直径为 $60\mathrm{cm}$，若将该牛皮鼓看成由两个相同的圆台拼接而成，忽略鼓面与鼓身的厚度，则该牛皮鼓的体积为

A. $22750\pi\mathrm{cm}^3$　　B. $23750\pi\mathrm{cm}^3$　　C. $45500\pi\mathrm{cm}^3$　　D. $47500\pi\mathrm{cm}^3$

6. 若$a=\log_3 6,b=2,c=\log_{0.25}0.125$，则

A. $a>c>b$　　B. $a>b>c$　　C. $b>c>a$　　D. $b>a>c$

7. 设曲线$y=x^3-2x^2+1$在$x=k$处的切线为l，若l的倾斜角小于135°，则k的取值范围是

A. $\left(-\infty,\frac{1}{3}\right)\cup(1,+\infty)$　　B. $(-\infty,0)\cup\left(\frac{1}{3},1\right)\cup\left(\frac{4}{3},+\infty\right)$

C. $\left(-\infty,\frac{1}{3}\right)\cup\left[\frac{4}{3},+\infty\right)$　　D. $(-\infty,0]\cup\left(\frac{1}{3},1\right)\cup\left[\frac{4}{3},+\infty\right)$

8. 已知椭圆$C:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$的左、右焦点分别为$F_1,F_2$，点$P$在$C$上，且$PF_1\perp F_1F_2$，直线$PF_2$与$C$交于另一点$Q$，与$y$轴交于点$M$，若$\overrightarrow{MF_2}=2\overrightarrow{F_2Q}$，则$C$的离心率为

A. $\frac{3\sqrt{3}}{7}$　　B. $\frac{4}{7}$　　C. $\frac{\sqrt{7}}{3}$　　D. $\frac{\sqrt{21}}{7}$

二、选择题：本题共4小题，每小题5分，共20分. 公众号浙江省高中数学在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求. 全部选对的得5分，部分选对的得2分，有选错的得0分.

9. 若函数$f(x)=\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$，则

A. $f(x)$的最小正周期为π　　B. $f(x)$的图象关于直线$x=\frac{5\pi}{4}$对称

C. $f(x)+f(-x)=\sqrt{2}\cos x$　　D. $f(x)$的图象关于点$\left(-\frac{5\pi}{4},0\right)$对称

10. 有一组样本数据$x_1,x_2,\cdots,x_6$，其中任何两个数都不相等，现在删去其中一个数据，得到一组新数据，则下列判断正确的是

A. 新数据的极差可能等于原数据的极差

B. 新数据的中位数可能等于原数据的中位数

C. 若新数据的平均数等于原数据的平均数，则新数据的方差大于原数据的方差

D. 若新数据的平均数等于原数据的平均数，则新数据的20%分位数小于原数据的20%分位数

11. 已知定义在**R**上的函数$f(x)$满足$f(x+y)=xf(y)+yf(x)$，定义在**R**上的函数$g(x)$满足$g(x+1)=(x+1)(x^2+2x)$，则

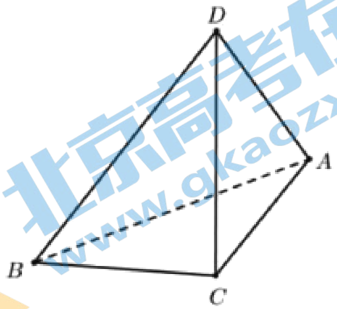
A. $f(x)$不是奇函数　　B. $f(x)$既是奇函数又是偶函数

C. $g(x)$是奇函数　　D. $g(x)$既不是奇函数又不是偶函数

12. 如图，在三棱锥$D-ABC$中，平面$ABC\perp$平面ABD, $AB=AC=BC=BD=3, AD=2$，则

A. 三棱锥$D-ABC$的体积为$\sqrt{6}$

B. 点C到直线AD的距离为$\dfrac{\sqrt{34}}{2}$



C. 二面角$B-AD-C$的正切值为$\dfrac{3\sqrt{6}}{4}$

D. 三棱锥$D-ABC$外接球的球心到平面ABD的距离为$\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

三、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分.

13. 若双曲线的焦距为6，实轴长为2，则该双曲线的虚轴长为__________.

14. 在矩形$ABCD$中，O为对角线的交点，E为BC上一点，且向量$\overrightarrow{AE}$在向量$\overrightarrow{AD}$上的投影向量为$\frac{1}{3}\overrightarrow{AD}$，$\overrightarrow{OE}=\lambda\overrightarrow{AB}+\mu\overrightarrow{AD}$，则$\lambda-\mu=$__________.

15. 已知圆M与圆$O:x^2+y^2=1$内切，且圆M与直线$x=2$相切，则圆M的圆心的轨迹方程为__________.

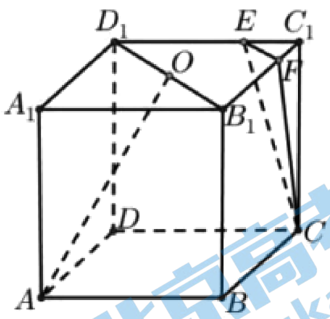
16 .已知$\theta\in\left(\dfrac{\pi}{4},\dfrac{\pi}{2}\right)$，则当$\tan2\theta-\tan\theta$取得最大值时，$\dfrac{\tan2\theta}{\tan\theta}=$__________.

四、解答题：本题共 6 小题，共 70 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

17.（10 分）如图，在正方体$ABCD-A_1B_1C_1D_1$中，O为B_1D_1的中点，$\overrightarrow{ED_1}=2\overrightarrow{C_1E},\overrightarrow{FB_1}=2\overrightarrow{C_1F}$.

（1）证明：B_1D_1 // 平面CEF.

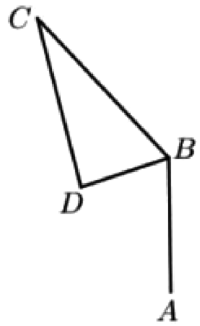
（2）求直线AO与平面CEF所成角的正弦值的平方.



18.（12 分）天门山，古称嵩梁山，位于湖南省张家界市永定区大庸中路 11 号，属武陵山脉向东进入洞庭湖平原的余脉.为了测量天门山的海拔，某人站在海拔 600 米的点 A 处，他让无人机从点 A 起飞，垂直向上飞行 400 米到达点 B 处，测得天门山的最高点 C 处的仰角为 $45°$，他遥控无人机从点 B 处移动到点 D 处（BD 平行于地平面），已知 B 与 D 之间的距离为 518 米，从点 D 处测得天门山的最高点 C 处的仰角为 $\alpha(\tan\alpha=2)$.

（1）设平面 β 过 BD 且平行于地平面，点 C 到平面 β 的距离为 h 米，求 BC 与 CD 的长（用 h 表示）；

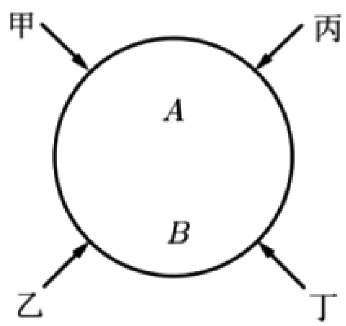
（2）已知 $\cos\angle BCD=\dfrac{9\sqrt{10}}{40}$，求天门山的海拔.



19.（12 分）艾伦·麦席森·图灵提出的图灵测试，指测试者与被测试者在隔开的情况下，通过一些装置（如键盘）向被测试者随意提问.(公众号浙江省高中数学)已知在某一轮图灵测试中有甲、乙、丙、丁 4 名测试者，每名测试者向一台机器（记为 A）和一个人（记为 B）各提出一个问题，并根据机器 A 和人的作答来判断谁是机器，若机器 A 能让至少一半的测试者产生误判，则机器 A 通过本轮的图灵测试. 假设每名测试者提问相互独立，且甲、乙、丙、丁四人之间的提问互不相同，而每名测试者有 60% 的可能性会向 A 和 B 问同一个题. 当同一名测试者提出的两个问题相同时，机器 A 被误判的可能性为 10%，当同一名测试者提的两个问题不相同时，机器 A 被误判的可能性为 35%.

（1）当回答一名测试者的问题时，求机器 A 被误判的概率；

（2）按现有设置程序，求机器 A 通过本轮图灵测试的概率.



20.（12 分）已知 S_n 为数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和，$a_1=1, S_{n+1}+S_n=(n+1)^2$.

（1）证明：$a_{n+1}+a_n=2n+1$.

（2）求 $\{a_n\}$ 的通项公式.

（3）若 $b_n=\dfrac{1-a_n}{2^{n+1}}$，求数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和 T_n.

21.（12 分）已知抛物线 $C: y^2=2px$ 经过点 $(2,-2\sqrt{6})$，直线 $l_1: y=kx+m(km\neq 0)$ 与 C 交于 A, B 两点（异于坐标原点 O）.

（1）若 $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=0$，证明：直线 l_1 过定点.

（2）已知 $k=2$，直线 l_2 在直线 l_1 的右侧，$l_1 // l_2, l_1$ 与 l_2 之间的距离 $d=\sqrt{5}, l_2$ 交 C 于 M, N 两点，试问是否存在 m，使得 $|MN|-|AB|=10$？若存在，求 m 的值；若不存在，说明理由.

22.（12 分）已知函数 $f(x)=\cos ax+\frac{1}{2}x^2-1$.

（1）当 $a=1$ 时，求 $f(x)$ 的单调区间；

（2）若 $x=0$ 是 $f(x)$ 的极大值点，求 a 的取值范围.

浙江省百校起点24届调研测试
高三数学考试参考答案

1. B 【解析】本题考查集合的交集,考查数学运算的核心素养.

由 $N=\{x|0<x<3\}$,得 $M\cap N=(1,3)$.

2. B 【解析】本题考查等比数列的定义,考查逻辑推理的核心素养.

因为 $a_n+a_{n+1}=(-\frac{1}{2})^n+(-\frac{1}{2})^{n+1}=(-\frac{1}{2})^n(1-\frac{1}{2})=-(-\frac{1}{2})^{n+1}$,所以 $\{a_n+a_{n+1}\}$ 的首项为 $-\frac{1}{4}$,且 $\frac{a_{n+1}+a_{n+2}}{a_n+a_{n+1}}=-\frac{1}{2}$,所以 $\{a_n+a_{n+1}\}$ 是公比为 $-\frac{1}{2}$ 的等比数列.

3. A 【解析】本题考查复数的运算、共轭复数、复平面,考查数学运算的核心素养.

因为 $z=\frac{10+5i}{2-i}=\frac{5(2+i)}{2-i}=\frac{5(2+i)^2}{(2+i)(2-i)}=3+4i$,所以 $i\bar{z}=i(3-4i)=4+3i$,则 $i\bar{z}$ 在复平面内对应的点位于第一象限.

4. C 【解析】本题考查二项式定理,考查数学运算的核心素养.

$(2x-y)^5$ 的展开式中,x^2y^3 的系数为 $C_5^3\times2^2\times(-1)^3=-40$.

5. C 【解析】本题考查台体的体积,考查应用意识.

依题意可得该牛皮鼓的体积可视为两个相同的圆台(上底面半径为 25 cm,下底面半径为 30 cm,高为 30 cm)的体积之和,所以该牛皮鼓的体积为 $2\times\frac{1}{3}\pi\times30\times(25^2+25\times30+30^2)=45500\pi\ cm^3$.

6. D 【解析】本题考查对数大小的比较,考查逻辑推理与数学运算的核心素养.

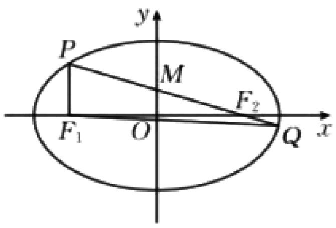
因为 $\frac{3}{2}=\log_3 3\sqrt{3}<a=\log_3 6<\log_3 9=2$,$c=\log_{\frac{1}{4}}\frac{1}{8}=\log_4 8=\log_{2^2}2^3=\frac{3}{2}$,所以 $b>a>c$.

7. D 【解析】本题考查导数的几何意义及直线的倾斜角,考查数学运算与逻辑推理的核心素养.

$y'=3x^2-4x$,则 l 的斜率为 $3k^2-4k$.因为 l 的倾斜角小于 $135°$,所以 l 的斜率小于 -1 或不小于 0,则 $3k^2-4k<-1$ 或 $3k^2-4k\geqslant0$,解得 $k\in(-\infty,0]\cup(\frac{1}{3},1)\cup[\frac{4}{3},+\infty)$.

8. D 【解析】本题考查椭圆的定义与性质,考查直观想象的核心素养.

如图,连接 F_1Q,由 $\overrightarrow{MF_2}=2\overrightarrow{F_2Q}$,得 $|PF_2|=4|F_2Q|$,设 $|F_2Q|=t$,则 $|PF_2|=4t$,$|PF_1|=2a-4t$,$|QF_1|=2a-t$.由余弦定理得 $|QF_1|^2=|PF_1|^2+|PQ|^2-2|PF_1||PQ|\cos\angle F_1PQ$,即 $(2a-t)^2=(2a-4t)^2+(5t)^2-2(2a-4t)\times5t\times\frac{2a-4t}{4t}$,整理得 $t=\frac{5}{14}a$,则



$|F_1F_2|=\sqrt{(4t)^2-(2a-4t)^2}=\sqrt{16at-4a^2}=\frac{2\sqrt{21}}{7}a$,故 $e=\frac{2c}{2a}=\frac{|F_1F_2|}{2a}=\frac{\sqrt{21}}{7}$.

9. BCD 【解析】本题考查三角函数的图象及其性质、三角恒等变换,考查逻辑推理与数学运算的核心素养.

因为 $f(x)=\sin(x+\frac{\pi}{4})$，所以 $f(x)$ 的最小正周期为 2π. 因为 $f(\frac{5\pi}{4})=\sin\frac{3\pi}{2}=-1$，$f(-\frac{5\pi}{4})=\sin(-\pi)=0$，所以 $f(x)$ 的图象关于直线 $x=\frac{5\pi}{4}$ 对称，$f(x)$ 的图象关于点 $(-\frac{5\pi}{4},0)$ 对称.

$f(x)+f(-x)=\sin(x+\frac{\pi}{4})+\sin(-x+\frac{\pi}{4})=\sqrt{2}\cos x$.

10. ACD **【解析】本题考查统计中的极差、中位数、平均数、方差、百分位数，考查数据处理能力与推理论证能力.**

对于 A 选项，如果删去的不是最大值或最小值，那么极差不变，所以 A 正确.

对于 B 选项，删除前有 6 个数据，中位数是按从小到大的顺序排列后中间两个数的平均数，因为任何两个数据都不相等，所以中位数不会等于 6 个数据中的任何一个，而删除后有 5 个数据，中位数是 6 个数据中的某一个，所以 B 错误.

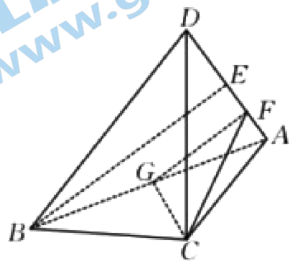
对于 C 选项，平均数不变意味着删去的数据刚好等于平均数，在方差公式中，分子不变，分母变小，所以方差变大，所以 C 正确.

对于 D 选项，平均数不变意味着删去的数据刚好等于平均数，在按从小到大的顺序排列的 6 个数据中，因为 $6\times20\%=1.2$，$5\times20\%=1$，所以原数据的 20% 分位数是第 2 个数，新数据的 20% 分位数是前 2 个数的平均数，且该数值小于第 2 个数，所以 D 正确.

11. BC **【解析】本题考查抽象函数与具体函数的奇偶性，考查逻辑推理与数学抽象的核心素养.**

令 $x=y=0$，得 $f(0)=0$，令 $y=0$，得 $f(x)=xf(0)=0$，则 $f(-x)=f(x)=-f(x)=0$，所以 $f(x)$ 既是奇函数又是偶函数. 由 $g(x+1)=(x+1)(x^2+2x)=(x+1)[(x+1)^2-1]$，得 $g(x)=x^3-x$，因为 $g(-x)=-g(x)$，所以 $g(x)$ 是奇函数.

12. ACD **【解析】本题考查立体几何初步中的体积、距离、二面角，考查空间想象能力与运算求解能力.**



如图，取 AB 的中点 G，连接 CG，因为平面 $ABC\perp$ 平面 ABD，且平面 $ABC\cap$ 平面 $ABD=AB$，所以 $CG\perp$ 平面 ABD. 取 AD 的中点 E，连接 BE，因为 $AB=BD$，所以 $BE\perp AD$，则 $BE=\sqrt{AB^2-AE^2}=2\sqrt{2}$. 因为 $CG=3\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{3\sqrt{3}}{2}$，

所以 $V_{D-ABC}=\frac{1}{3}\times\frac{3\sqrt{3}}{2}\times\frac{1}{2}\times2\times2\sqrt{2}=\sqrt{6}$，A 正确. 取 AE 的中点 F，连接 FG，CF，则 $FG\parallel BE$，所以 $FG\perp AD$. 因为 $CG\perp$ 平面 ABD，所以 $CG\perp AD$，又 $CG\cap FG=G$，所以 $AD\perp$ 平面 CFG，则 $AD\perp CF$，则 $CF=\sqrt{CG^2+FG^2}=\frac{\sqrt{35}}{2}$，$\angle CFG$ 为二面角 $B-AD-C$ 的平面角，且 $\tan\angle CFG=\frac{CG}{FG}=\frac{3\sqrt{6}}{4}$，B 错误，C 正确. 设 $\triangle ABD$，$\triangle ABC$ 的外心分别为 K，M，则 $GK\perp AB$，又平面 $ABD\perp$ 平面 ABC，所以 $GK\perp$ 平面 ABC. 设三棱锥 $D-ABC$ 外接球的球心为

O，则 $OK\perp$ 平面 ABD，$OM\perp$ 平面 ABC，所以四边形 $OMGK$ 为矩形，则 $OK=MG=\frac{1}{3}CG=\frac{\sqrt{3}}{2}$. 故三棱锥 $D-ABC$ 外接球的球心到平面 ABD 的距离为 $\frac{\sqrt{3}}{2}$，D 正确.

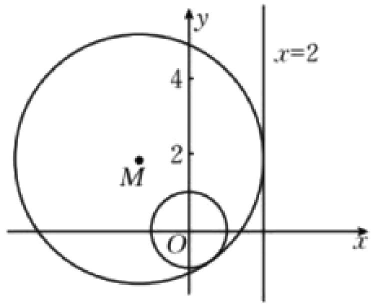
13. $4\sqrt{2}$ 【解析】本题考查双曲线的性质，考查数学运算的核心素养.

依题意可得 $2c=6$，$2a=2$，则 $c=3$，$a=1$，所以该双曲线的虚轴长为 $2b=2\sqrt{c^2-a^2}=4\sqrt{2}$.

14. $\frac{2}{3}$ 【解析】本题考查投影向量与平面向量的基本定理，考查直观想象的核心素养.

在矩形 $ABCD$ 中，因为向量 $\overrightarrow{AE}$ 在向量 $\overrightarrow{AD}$ 上的投影向量为 $\frac{1}{3}\overrightarrow{AD}$，所以 $\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AD}$，又 $\overrightarrow{AO}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}$，所以 $\overrightarrow{OE}=\overrightarrow{AE}-\overrightarrow{AO}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}-\frac{1}{6}\overrightarrow{AD}$，所以 $\lambda-\mu=\frac{1}{2}+\frac{1}{6}=\frac{2}{3}$.

15. $y^2=1-2x$ 【解析】本题考查圆与圆的位置关系、直线与圆的位置关系，考查直观想象与数学运算的核心素养.



设 $M(x,y)$，点 M 到直线 $x=2$ 的距离为 d，如图，M 只能在直线 $x=2$ 的左侧，则 $d=2-x$，依题意可得 $|MO|+1=d$，即 $\sqrt{x^2+y^2}=(2-x)-1$，化简可得 $y^2=1-2x$，故圆 M 的圆心的轨迹方程为 $y^2=1-2x$.

16. $\frac{1-\sqrt{5}}{2}$ 【解析】本题考查三角恒等变换与导数的应用，考查数学建模与数学运算的核心素养.

设 $\tan\theta=x$，则 $x>1$，$\tan 2\theta-\tan\theta=\frac{2x}{1-x^2}-x=\frac{x+x^3}{1-x^2}$.

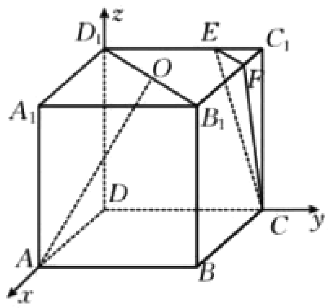
设函数 $f(x)=\frac{x+x^3}{1-x^2}(x>1)$，则 $f'(x)=\frac{-x^4+4x^2+1}{(1-x^2)^2}=-\frac{(x^2-\sqrt{5}-2)(x^2+\sqrt{5}-2)}{(1-x^2)^2}(x>1)$.

当 $1<x^2<\sqrt{5}+2$ 时，$f'(x)>0$；当 $x^2>\sqrt{5}+2$ 时，$f'(x)<0$.

所以当 $x^2=\sqrt{5}+2$ 时，$f(x)$ 取得最大值，即 $\tan 2\theta-\tan\theta$ 取得最大值，

此时 $\frac{\tan 2\theta}{\tan\theta}=\frac{2}{1-x^2}=\frac{2}{1-(\sqrt{5}+2)}=\frac{1-\sqrt{5}}{2}$.

17. (1)证明：因为 $\overrightarrow{ED_1}=2\overrightarrow{C_1E}$，$\overrightarrow{FB_1}=2\overrightarrow{C_1F}$，所以 $\frac{ED_1}{C_1E}=\frac{FB_1}{C_1F}=2$，



所以 $EF/\!/B_1D_1$，…………………………………………………… 2 分

因为 $B_1D_1\not\subset$ 平面 CEF，$EF\subset$ 平面 CEF，所以 $B_1D_1/\!/$ 平面 CEF.

……………………………………………………………………………… 4 分

(2)解：如图，以 D 为坐标原点建立空间直角坐标系 $Dxyz$，设 $AB=3$，

则 $A(3,0,0)$，$C(0,3,0)$，$O(\frac{3}{2},\frac{3}{2},3)$，$E(0,2,3)$，$F(1,3,3)$，………………………… 5 分

$\overrightarrow{CE}=(0,-1,3)$，$\overrightarrow{EF}=(1,1,0)$. …………………………………………………… 6 分

设平面 CEF 的法向量为 $\boldsymbol{m}=(x,y,z)$，则 $\begin{cases}\overrightarrow{CE}\cdot\boldsymbol{m}=-y+3z=0,\\ \overrightarrow{EF}\cdot\boldsymbol{m}=x+y=0,\end{cases}$ …………………… 7 分

令 $x=3$，得 $\boldsymbol{m}=(3,-3,-1)$， …………………………………………………… 8 分

因为 $\overrightarrow{AO}=(-\frac{3}{2},\frac{3}{2},3)$，所以 $\cos\langle\overrightarrow{AO},\boldsymbol{m}\rangle=\frac{\overrightarrow{AO}\cdot\boldsymbol{m}}{|\overrightarrow{AO}||\boldsymbol{m}|}=\frac{-12}{\frac{3\sqrt{6}}{2}\times\sqrt{19}}=-\frac{8}{\sqrt{114}}$， …… 9 分

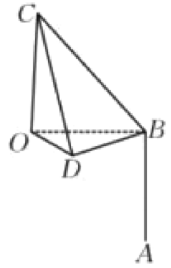
所以直线 AO 与平面 CEF 所成角的正弦值为 $\frac{8}{\sqrt{114}}$，其平方为 $\frac{64}{114}=\frac{32}{57}$． …………… 10 分

评分细则：

【1】第(1)问中，未写“$B_1D_1\not\subset$平面 CEF，$EF\subset$平面 CEF”扣 1 分．

【2】第(2)问中，建系方式不唯一，平面 CEF 的法向量不唯一，如果建系的方式相同，那么只要所求法向量与 $\boldsymbol{m}=(3,-3,-1)$ 共线即可．

18．解：(1)如图，过 C 作 $CO\perp\beta$，垂足为 O，则 $CO=h$ 米，$\angle CBO=45°$，$\angle CDO=\alpha$，



……………………………………………………………………………………… 2 分

在 Rt$\triangle COB$ 中，$BC=\frac{h}{\sin 45°}=\sqrt{2}h$ 米． ………………………………… 3 分

在 Rt$\triangle COD$ 中，$CD=\frac{h}{\sin\alpha}$ 米， ………………………………………………… 4 分

因为 $\tan\alpha=2$，所以 $\sin\alpha=\frac{2}{\sqrt{5}}$， ………………………………………………………… 5 分

所以 $CD=\frac{\sqrt{5}h}{2}$ 米． ……………………………………………………………………… 6 分

(2)在 $\triangle BCD$ 中，由余弦定理得 $BD^2=BC^2+CD^2-2BC\cdot CD\cos\angle BCD$， ………… 7 分

由(1)得 $518^2=2h^2+\frac{5}{4}h^2-\sqrt{10}h^2\times\frac{9\sqrt{10}}{40}$，整理得 $518^2=h^2$，即 $h=518$， ………… 10 分

所以天门山的海拔为 $600+400+518=1518$ 米． ……………………………………… 12 分

评分细则：

【1】第(1)问中，$\sin\alpha=\frac{2\sqrt{5}}{5}$ 不扣分，结果未带单位(米)，共扣 1 分．

【2】第(2)中，结果未带单位(米)，扣 1 分．

19．解：(1)用 M 表示事件“测试者提出的两个问题相同”，N 表示事件“测试者对机器产生误判”，则 $P(N)=P(NM)+P(N\overline{M})=P(M)P(N|M)+P(\overline{M})P(N|\overline{M})$ ……………… 3 分

$=0.6\times0.1+(1-0.6)\times0.35=0.2$． ……………………………………………………… 5 分

(2)设 X 为 4 名测试者中产生误判的人数，由(1)可知，$X\sim B(4,0.2)$，…………………………… 7 分

若机器通过本轮的图灵测试，则 4 名测试者中至少有 2 名产生误判， …………………… 8 分

所以机器 A 通过图灵测试的概率 $P=1-P(X=0)-P(X=1)=1-C_4^0\times0.2^0\times(1-0.2)^4-C_4^1\times0.2\times(1-0.2)^3=0.1808$． ………………………………………………………… 12 分

评分细则：

【1】第(1)问中,得到“$P(N)=P(M)P(N|M)+P(\overline{M})P(N|\overline{M})$”,但未写“$P(N)=P(NM)+P(N\overline{M})$”,不扣分.

【2】第(2)问中,得到“$P=1-C_4^0\times0.2^0\times(1-0.2)^4-C_4^1\times0.2\times(1-0.2)^3=0.1808$”,但未写“4 名测试者中至少有 2 名产生误判”,不扣分. 第(2)问还可以用直接法求解,解析如下:

设 X 为 4 名测试者中产生误判的人数,由(1)可知,$X\sim B(4,0.2)$, ……………………… 7 分

若机器 A 通过本轮的图灵测试,则 4 名测试者中至少有 2 名产生误判, ……………… 8 分

所以机器 A 通过图灵测试的概率 $P=P(X=2)+P(X=3)+P(X=4)=C_4^2\times0.2^2\times(1-0.2)^2+C_4^3\times0.2^3\times(1-0.2)+C_4^4\times0.2^4=0.1808$. ……………………………… 12 分

20. (1)证明:当 $n=1$ 时,$S_2+S_1=4$,则 $a_2+2a_1=4$,因为 $a_1=1$,所以 $a_2=2$. …………… 1 分

当 $n\geqslant2$ 时,由 $S_{n+1}+S_n=(n+1)^2$,得 $S_n+S_{n-1}=n^2$,两式相减得 $a_{n+1}+a_n=2n+1$. ……………………………………………………………………………………… 2 分

又 $a_1+a_2=3=2\times1+1$,所以当 $n\in\mathbf{N}^*$ 时,$a_{n+1}+a_n=2n+1$. ……………………… 3 分

(2)解:$a_{n+2}-a_n=(a_{n+2}+a_{n+1})-(a_{n+1}+a_n)=(2n+3)-(2n+1)=2$, …………… 4 分

所以$\{a_n\}$的奇数项是以 1 为首项,2 为公差的等差数列,偶数项是以 2 为首项,2 为公差的等差数列, ……………………………………………………………………………… 5 分

所以$\{a_n\}$是以 1 为首项,1 为公差的等差数列,故 $a_n=n$. ……………………………… 6 分

(3)解:$T_n=0-\frac{1}{2^3}-\frac{2}{2^4}-\cdots-\frac{n-1}{2^{n+1}}$, ……………………………………………… 7 分

则$\frac{1}{2}T_n=-\frac{1}{2^4}-\frac{2}{2^5}-\cdots-\frac{n-1}{2^{n+2}}$, ……………………………………………… 8 分

则 $T_n-\frac{1}{2}T_n=-(\frac{1}{2^3}+\frac{1}{2^4}+\cdots+\frac{1}{2^{n+1}})+\frac{n-1}{2^{n+2}}$, ……………………………… 9 分

所以$\frac{1}{2}T_n=-\frac{\frac{1}{8}-\frac{1}{2^{n+2}}}{1-\frac{1}{2}}+\frac{n-1}{2^{n+2}}=\frac{n+1}{2^{n+2}}-\frac{1}{4}$, ……………………………… 11 分

故 $T_n=\frac{n+1}{2^{n+1}}-\frac{1}{2}$. ……………………………………………………………… 12 分

评分细则:

【1】第(2)问中,得到 $a_{n+1}+a_n=2n+1$ 后,还可以通过下面的方法得到数列$\{a_n\}$的通项公式:

由 $a_{n+1}+a_n=2n+1$,得 $a_{n+1}-(n+1)=-(a_n-n)$,因为 $a_1-1=0$,所以 $a_n-n=0$,即 $a_n=n$.

【2】第(3)问还可以用裂项相消法求解,过程如下:

因为 $b_n=\frac{1-a_n}{2^{n+1}}=\frac{n+1-2n}{2^{n+1}}=\frac{n+1}{2^{n+1}}-\frac{n}{2^n}$, ……………………………………… 9 分

所以 $T_n=\frac{2}{2^2}-\frac{1}{2}+\frac{3}{2^3}-\frac{2}{2^2}+\cdots+\frac{n+1}{2^{n+1}}-\frac{n}{2^n}=\frac{n+1}{2^{n+1}}-\frac{1}{2}$. ……………………… 12 分

21. (1)证明:将点$(2,-2\sqrt{6})$代入 $y^2=2px$,得 $24=4p$,即 $p=6$. ……………………… 1 分

联立$\begin{cases}y^2=12x,\\y=kx+m(k\neq0),\end{cases}$ 得 $ky^2-12y+12m=0$, ……………………………… 2 分

设 $A(x_1,y_1),B(x_2,y_2)$,则 $y_1y_2=\frac{12m}{k}$, ………………………………………………… 3 分

$x_1x_2=\frac{y_1^2}{12}\cdot\frac{y_2^2}{12}=\frac{(y_1y_2)^2}{144}=\frac{m^2}{k^2}$. ……………………………………………… 4 分

因为$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=0$,所以$\frac{m^2}{k^2}+\frac{12m}{k}=0$ 恒成立,则 $m=-12k$, ……………………… 5 分

所以 l_1 的方程为 $y=k(x-12)$,故直线 l_1 过定点$(12,0)$. ……………………………… 6 分

(2)解:联立$\begin{cases}y^2=12x,\\y=2x+m,\end{cases}$ 得 $4x^2+(4m-12)x+m^2=0$,

则$\begin{cases}x_1+x_2=-m+3,\\x_1x_2=\frac{m^2}{4},\end{cases}$ ………………………………………………………………… 7 分

且 $\Delta=(4m-12)^2-16m^2=48(3-2m)>0$,即 $m<\frac{3}{2}$, ……………………………………… 8 分

$|AB|=\sqrt{1+2^2}\,|x_1-x_2|=\sqrt{1+2^2}\sqrt{(x_1+x_2)^2-4x_1x_2}=\sqrt{5}\cdot\sqrt{9-6m}$, ………… 9 分

设 $l_2:y=2x+n$,同理可得$|MN|=\sqrt{5}\cdot\sqrt{9-6n}$. ……………………………………… 10 分

因为直线 l_2 在 l_1 的右侧,所以 $n<m$,则 $d=\frac{m-n}{\sqrt{5}}=\sqrt{5}$,即 $n=m-5$. ……………… 11 分

所以$|MN|-|AB|=\sqrt{5}[\sqrt{9-6(m-5)}-\sqrt{9-6m}]=10$,

即 $\sqrt{39-6m}=2\sqrt{5}+\sqrt{9-6m}$,解得 $m=\frac{31}{24}$,

因为$\frac{31}{24}<\frac{3}{2}$,所以 $m=\frac{31}{24}$. ………………………………………………………………… 12 分

评分细则:

【1】第(1)问中,联立$\begin{cases}y^2=12x,\\y=kx+m(k\neq0),\end{cases}$ 消去 y 得 $k^2x^2+(2km-12)x+m^2=0$,也可以求得 $m=-12k$,从而得到直线 l_1 过定点$(12,0)$.

【2】第(2)问中,还可以用$|AB|=\sqrt{1+(\frac{1}{2})^2}\,|y_1-y_2|=\frac{\sqrt{5}}{2}\sqrt{(y_1+y_2)^2-4y_1y_2}$,得到$|AB|=\sqrt{5}\cdot\sqrt{9-6m}$. 解析中,未写$\frac{31}{24}<\frac{3}{2}$,但是得到 $m=\frac{31}{24}$,不扣分.

22. 解:(1)当 $a=1$ 时,$f(x)=\cos x+\frac{1}{2}x^2-1$,则 $f'(x)=x-\sin x$. ……………………… 1 分

令函数 $g(x)=x-\sin x$,则 $g'(x)=1-\cos x\geqslant0$,可得 $g(x)$单调递增. ……………… 2 分

又 $g(0)=0$,所以当 $x\in(0,+\infty)$时,$g(x)>0$,当 $x\in(-\infty,0)$时,$g(x)<0$. ………… 3 分

所以 $f(x)$的单调递减区间为$(-\infty,0)$,单调递增区间为$(0,+\infty)$. ……………………… 4 分

(2)若 $a=0$,则 $f(x)=\frac{1}{2}x^2$,此时 $x=0$ 是 $f(x)$的极小值点,故 $a\neq0$. ……………… 5 分

$f'(x)=x-a\sin ax$，令函数 $h(x)=x-a\sin ax$，则 $h'(x)=1-a^2\cos ax=1-a^2\cos|a|x$.
…………………………………………………………………………………………… 6分

令函数 $\varphi(x)=1-a^2\cos|a|x(a\neq0)$，可知 $\varphi(x)$ 在区间 $[0,\frac{\pi}{|a|})$ 上单调递增. ………… 7分

①当 $\varphi(0)=1-a^2\geqslant0$ 且 $a\neq0$，即 $-1\leqslant a\leqslant1$ 且 $a\neq0$ 时，$\varphi(x)\geqslant\varphi(0)\geqslant0$，此时 $h(x)$ 在区间 $[0,\frac{\pi}{|a|})$ 上单调递增，则 $h(x)\geqslant h(0)=0$，此时 $x=0$ 不可能是 $f(x)$ 的极大值点. …… 8分

②当 $\varphi(0)=1-a^2<0$，即 $a<-1$ 或 $a>1$ 时，由 $\varphi(x)$ 在区间 $[0,\frac{\pi}{|a|})$ 上单调递增，可知存在 $m\in(0,\frac{\pi}{|a|})$，使得当 $x\in[0,m)$ 时，$\varphi(x)<0$，则 $h(x)$ 在 $[0,m)$ 上单调递减， ………… 9分

从而 $h(x)\leqslant h(0)=0$，即 $f'(x)\leqslant0$，$f(x)$ 在 $[0,m)$ 上单调递减. ……………………… 10分

由 $f(-x)=\cos(-ax)+\frac{1}{2}(-x)^2-1=\cos ax+\frac{1}{2}x^2-1=f(x)$，可得 $f(x)$ 为偶函数，$f(x)$ 的图象关于 y 轴对称，此时 $x=0$ 是 $f(x)$ 的极大值点. ……………………………… 11分

综上，a 的取值范围为 $(-\infty,-1)\cup(1,+\infty)$. ……………………………………… 12分

评分细则：

【1】第(1)问中，最后没有回答函数的单调区间，而是写为"$f(x)$ 在 $(-\infty,0)$ 上单调递减，在 $(0,+\infty)$ 上单调递增"不扣分.

【2】第(2)问中，在说明 $a\neq0$ 后，也可以先讨论 $a>0$，再根据函数的奇偶性，确定 $a<0$ 中满足条件的 a 的范围，最后求两种情况的 a 的取值集合的并集，即得满足题意的 a 的取值范围.