2023 北京燕山初三二模

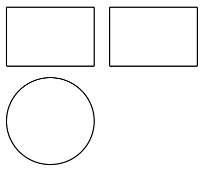
数　　学

2023 年 5 月

考 生 须 知	1．本试卷共 8 页，共三道大题，28 道小题。满分 100 分。考试时间 120 分钟。 2．在试卷和答题纸上准确填写学校名称、班级、姓名和准考证号。 3．试题答案一律填涂或书写在答题纸上，在试卷上作答无效。 4．在答题纸上，选择题、画图题用 2B 铅笔作答，其他试题用黑色字迹签字笔作答。 5．考试结束，请将本试卷和答题纸一并交回。

一、选择题（共 16 分，每题 2 分）

第 1－8 题均有四个选项，符合题意的选项只有一个．



1．右图是某几何体的三视图，该几何体是

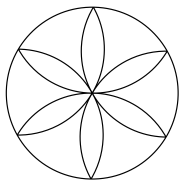
A．圆柱　　B．圆锥

C．长方体　　D．三棱柱

2．我国自主研发的“北斗系统”在卫星导航、通信、遥感等多项核心技术方面取得了突破，已经在国民经济和国防建设等多个领域得到了广泛的应用．2023 年 2 月，北斗终端数量在交通运输营运车辆领域超过 8 000 000 台．将 8 000 000 用科学记数法表示应为

A．0.8×10^6　　B．8×10^6　　C．8×10^7　　D．80×10^5

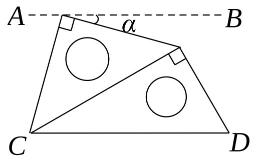
3．图中的图形为轴对称图形，该图形的对称轴的条数为



A．2　　B．4

C．6　　D．8

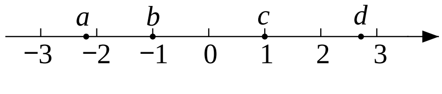
4．一副三角板如图摆放，直线 $AB\parallel CD$，则 $\angle\alpha$ 的度数是



A．15°　　B．30°

C．45°　　D．75°

5．实数 a，b，c，d 在数轴上的对应点的位置如图所示，下列结论中正确的是



A．$|a|<|b|$　　B．$ac>0$　　C．$b+c>0$　　D．$d-a>0$

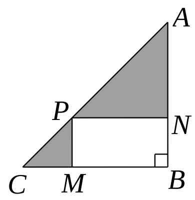
6．一个不透明的袋子中装有红、黄小球各两个，除颜色外四个小球无其他差别，从中随机同时摸出两个球，那么两个球的颜色相同的概率是

A．$\frac{2}{3}$　　B．$\frac{1}{2}$　　C．$\frac{1}{3}$　　D．$\frac{1}{4}$

7．如果 $a-b=1$，那么代数式 $(\frac{b^2}{a}-a)\cdot\frac{2a}{a+b}$ 的值为

A．2　　B．1　　C．-1　　D．-2

8．如图，某小区有一块三角形绿地 ABC，其中 $\angle B=90°$，$AB=BC$．计划在绿地上建造一个矩形的休闲书吧 $PMBN$，使点 P，M，N 分别在边 AC，BC，AB 上．记 $PM=x$ m，$PN=y$ m，图中阴影部分的面积为 S m^2．当 x 在一定范围内变化时，y 和 S 都随 x 的变化而变化，则 y 与 x，S 与 x 满足的函数关系分别是



A．一次函数关系，二次函数关系　B．一次函数关系，反比例函数关系

C．二次函数关系，一次函数关系　D．反比例函数关系，二次函数关系

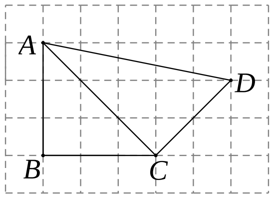
二、填空题（共 16 分，每题 2 分）

9．若代数式 $\dfrac{1}{x-3}$ 有意义，则实数 x 的取值范围是__________．

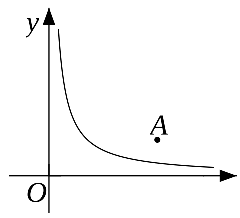
10．分解因式：$a^3-4a^2+4a=$__________．

11．方程组 $\begin{cases}2x-y=4,\\x-2y=-1\end{cases}$ 的解为__________．

12．如图所示的网格是正方形网格，点 A，B，C，D 均在格点上，则 $S_{\triangle ABC}$____________$S_{\triangle ACD}$（填“＞”，“＜”或“＝”）．



(第 12 题)



（第 13 题）

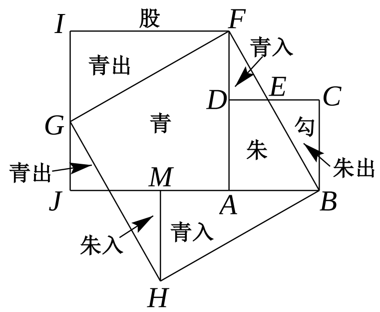
13．反比例函数 $y=\dfrac{k}{x}(k\neq 0)$ 在第一象限的图象如图所示，已知点 A 的坐标为(3，1)，写出一个满足条件的 k 的值__________．

14．校运动会前夕，要选 60 名身高基本相同的女生组成表演方队，现从全校 200 名女生中随机抽取 40 人，了解了她们的身高情况，数据如下：

身高/cm	145-150	150-155	155-160	160-165	165-170	170-175
人数/人	2	6	10	16	4	2

根据以上数据，估计入选表演方队的女生身高范围为__________cm．

15．魏晋时期，数学家刘徽利用如图所示的“青朱出入图”证明了勾股定理，其中四边形 $ABCD$，$AFIJ$ 和 $BFGH$ 都是正方形．如果图中 $\triangle BCE$ 与 $\triangle FDE$ 的面积比为 $\dfrac{16}{9}$，那么 $\tan\angle GFI$ 的值为__________．



16．一个 17 人的旅游团到一家酒店住宿，酒店的客房只有双人标准间和三人间，其中双人标准间每间每晚 100 元，三人间每间每晚 130 元．住宿要求男士只能与男士同住，女士只能与女士同住．

(1)若该旅游团一晚的住宿费用为 750 元，则他们租住了____ 间三人间；

(2)若该旅游团中共有 7 名男士，则租住一晚的住宿费用最少为_________元.

三、解答题（共 68 分，第 17－20 题，每题 5 分，第 21－22 题,每题 6 分，第 23－24 题，每题 5 分，第 25－26 题，每题 6 分，第 27－28 题，每题 7 分）

解答应写出文字说明，演算步骤或证明过程.

17．计算：$(\pi-3)^0-2\cos 45°+|-\sqrt{2}|+\sqrt{18}$．

18．解不等式组：$\begin{cases}1+x>5-3x,\\ x<\dfrac{x+6}{3}.\end{cases}$

19．**下面是小东设计的“作三角形一边上的高”的尺规作图过程.**

已知：$\triangle ABC$.

求作：边 BC 上的高 AD.

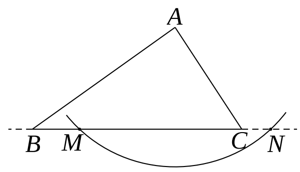
作法：如图 1,

①以点 A 为圆心，适当长为半径画弧，交直线 BC 于点 M，N;

②分别以点 M，N 为圆心，以大于 $\frac{1}{2}MN$ 的长为半径画弧，两弧相交于点 P（不同于点 A）；

③作直线 AP 交 BC 于点 D.

所以线段 AD 就是所求作的$\triangle ABC$ 的边 BC 上的高.



(图 1)

根据小东设计的尺规作图过程，

（1）使用直尺和圆规，补全图形(保留作图痕迹);

（2）完成下面的证明.

证明：连接 AM，AN，PM，PN.

∵AM=____，PM=_____，

∴AP 是线段 MN 的垂直平分线（_____）(填推理的依据)，

∴$AD\perp BC$ 于点 D,

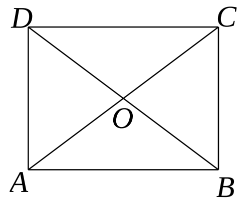
即线段 AD 为$\triangle ABC$ 的边 BC 上的高.

20．关于 x 的方程 $x^2+4x+m+2=0$ 有两个不相等的实数根.

(1) 求 m 的取值范围；

(2) 若 m 为正整数，求此时方程的根.

21．如图，在▱$ABCD$中，对角线AC，BD交于点O，$AO=BO$．



(1)求证：四边形$ABCD$是矩形；

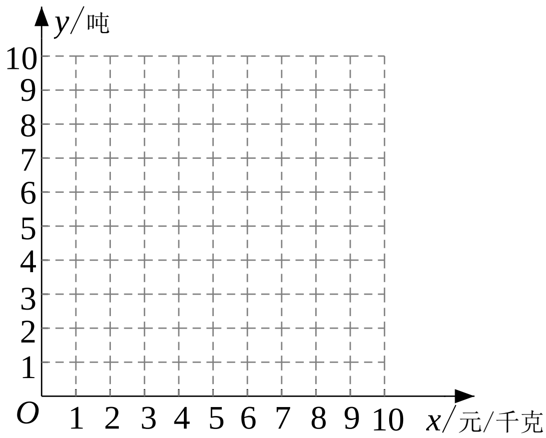
(2)若$AD=3$，$AB=4$，$\angle ADB$的平分线DE交AB于点E，求AE的长．

22．某蔬菜批发基地为指导2023年的番茄销售，对历年的市场行情和供求情况进行了调查统计，得到番茄的售价x(单位：元/千克)与相应需求量y_1(单位：吨)以及供给量y_2(单位：吨)的几组数据：

售价x/元/千克	…	2	3	4	5	6	…
需求量y_1/吨	…	9.5	8.875	8	6.875	5.5	…
供给量y_2/吨	…	1	2	3	4	5	…

(1)根据表中数据，供给量y_2与售价x之间满足____函数关系(填“一次”、“二次”或“反比例”)，它的函数表达式为______；需求量y_1与售价x之间近似满足函数关系$y_1=ax^2+c(a<0)$，它的函数表达式为_____．

(2)在同一平面直角坐标系中，画出(1)中所确定的函数的图象；



(3) 结合函数图象，解决问题：为使番茄的供需平衡(即供给量与需求量相等)，售价应定为_________元/千克．

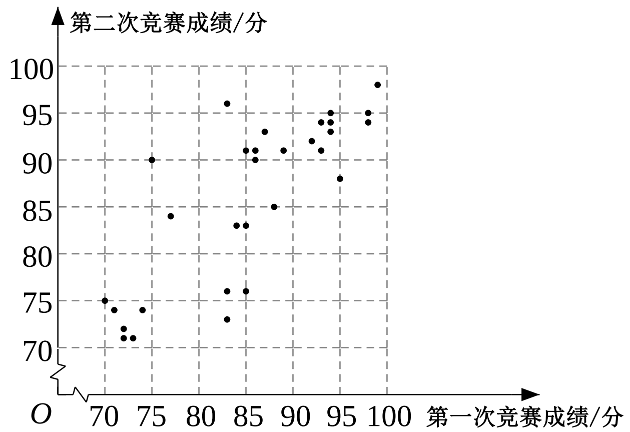
23．在平面直角坐标系xOy中，一次函数$y=kx+b$($k>0$)与反比例函数$y=\dfrac{m}{x}$($m\neq0$)的图象交于点$A(1，6)$和点B．

(1)若点$B(-6，-1)$，求该一次函数和反比例函数的解析式；

(2)当$x<-3$时，对于x的每一个值，函数$y=\dfrac{m}{x}$($m\neq0$)的值大于一次函数$y=kx+b$($k>0$)的值，直接写出k的取值范围．

24．为了深入学习领会党的二十大精神，某校团委组织了两次“二十大知识竞赛”．从中随机抽取了 30 名学生两次竞赛成绩(百分制)的数据，并对数据(成绩)进行整理、描述和分析．下面给出了部分信息：

a．两次竞赛学生成绩情况统计图：



b．两次竞赛学生的获奖情况如下：

竞赛 \ 奖项		参与奖	优秀奖	卓越奖
第一次竞赛	人数	8	m	n
	平均分	73	85	95
第二次竞赛	人数	9	5	16
	平均分	74	85	93

(说明：成绩≥90，获卓越奖；80≤成绩＜90，获优秀奖；成绩＜80，获参与奖)

c．第二次竞赛获卓越奖的学生成绩如下：

90 90 91 91 91 91 92 93 93 94 94 94 95 95 96 98

根据以上信息，回答下列问题：

(1) 写出表中 m，n 的值；

(2) 甲同学第一次竞赛成绩是 83 分，第二次竞赛成绩是 96 分，在图中用“○”圈出代表甲同学的点；

(3) 下列推断合理的是_____．

①第二次竞赛成绩数据的中位数是 90；

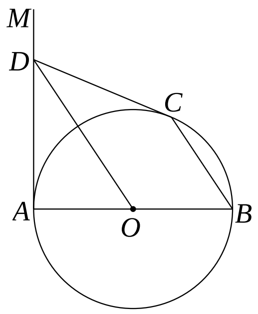
②两次竞赛都获得卓越奖的有 10 人；

③第二次竞赛的平均成绩高于第一次竞赛的平均成绩．

25．如图，AB 为⊙O 的直径，BC 为弦，射线 AM 与⊙O 相切于点 A，过点 O 作 $OD \parallel BC$ 交 AM 于点 D，连接 DC．

(1) 求证：DC 是⊙O 的切线；

(2) 过点 B 作 $BE \perp AB$ 交 DC 的延长线于点 E，连接 AC 交 OD 于点 F．若 $AB=12$，$BE=4$，求 AF 的长．

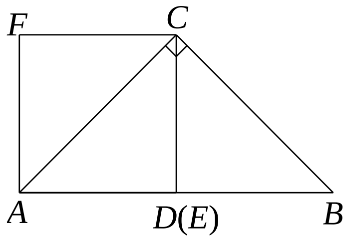


26．在平面直角坐标系 xOy 中，抛物线 $y=ax^2-4a^2x\ (a>0)$.

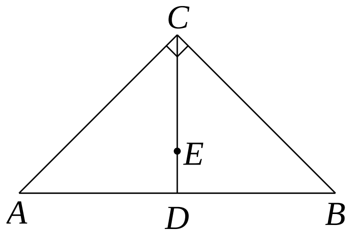
(1) 求抛物线与 x 轴的交点坐标及抛物线的对称轴(用含 a 的式子表示)；

(2) 已知点 $P(a-1,\ y_1)$，$Q(a+5,\ y_2)$在该抛物线上，若 $y_1\cdot y_2<0$，求 a 的取值范围.

27．△ABC 中，∠ACB＝90°，AC＝BC，点 D 为边 AB 的中点，点 E 在线段 CD 上，连接 AE，将线段 AE 绕点 A 逆时针旋转 90° 得到线段 AF，连接 CF.



(图 1)

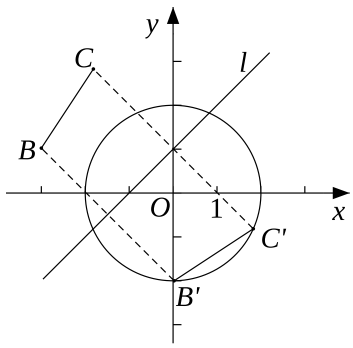


(图 2)

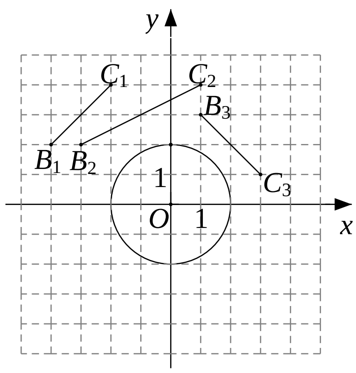
(1) 如图 1，当点 E 与点 D 重合时，求证：CF＝AE；

(2) 当点 E 在线段 CD 上(与点 C，D 不重合)时，依题意补全图 2；用等式表示线段 CF，ED，AD 之间的数量关系，并证明.

28．在平面直角坐标系 xOy 中，⊙O 的半径为 2．对于直线 l 和线段 BC，给出如下定义：若将线段 BC 关于直线 l 对称，可以得到⊙O 的弦 $B'C'$ (B'，C'分别是 B，C 的对应点)，则称线段 BC 是以直线 l 为轴的⊙O 的“关联线段”．例如，图 1 中线段 BC 是以直线 l 为轴的⊙O 的“关联线段”.



(图 1)



(图 2)

(1) 如图 2，点 B_1，C_1，B_2，C_2，B_3，C_3 的横、纵坐标都是整数.

① 在线段 B_1C_1，B_2C_2，B_3C_3 中，以直线 l_1：$y=x+4$ 为轴的⊙O 的“关联线段”是______；

② 在线段 B_1C_1，B_2C_2，B_3C_3 中，存在以直线 l_2：$y=-x+b$ 为轴的⊙O 的“关联线段”，求 b 的值；

(2) 已知直线 l_3：$y=-\sqrt{3}x+m$ (m>0)交 x 轴于点 A．在△ABC 中，AB=6，BC=2，若线段 BC 是以直线 l_3 为轴的⊙O 的“关联线段”，直接写出 m 的最大值与最小值，以及相应的 AC 的长.

参考答案

第一部分 选择题

一、选择题（共 16 分，每题 2 分）

题号	1	2	3	4	5	6	7	8
答案	A	B	C	A	D	C	D	A

第二部分 非选择题

二、填空题（共 16 分，每题 2 分）

9．$x \neq 3$　　10．$a(a-2)^2$　　11．$\begin{cases} x=3, \\ y=2 \end{cases}$

12．＜　　13．答案不唯一，如，1　　14．160-165

15．$\dfrac{4}{7}$　　16．(1) 5； (2)790

三、解答题（共 68 分，第 17－20 题，每题 5 分，第 21－22 题，每题 6 分，第 23－24 题，每题 5 分，第 25－26 题，每题 6 分，第 27－28 题，每题 7 分）

17．(本题满分 5 分)

解：原式＝$1-2\times\dfrac{\sqrt{2}}{2}+\sqrt{2}+3\sqrt{2}$ ……………………………………………4 分

＝$1+3\sqrt{2}$． ……………………………………………5 分

18．(本题满分 5 分)

解：原不等式组为$\begin{cases} 1+x>5-3x, & ① \\ x<\dfrac{x+6}{3}. & ② \end{cases}$

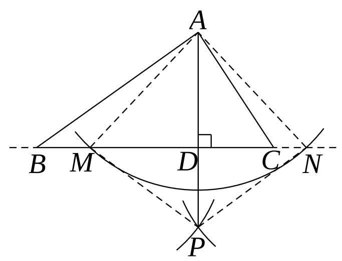
解不等式①，得 $x>1$， ……………………………………………2 分

解不等式②，得 $x<3$， ……………………………………………4 分

∴原不等式组的解集为$1<x<3$． ……………………………………………5 分

19．(本题满分 5 分)

解：(1) 使用直尺和圆规，补全图形，如图； ……………………………………2 分



(2) AN， PN，

(到线段两端距离相等的点在线段的垂直平分线上) ……………………5 分

20．解：(1)由题意，得$\Delta=4^2-4\times1\times(m+2)$

$=16-4m-8$

$=8-4m$． ……………………………………………1 分

∵该方程有两个不相等的实数根，

∴$8-4m>0$，

∴$m<2$. ……………………………………………2 分

(2) ∵m 为正整数，且 $m<2$，

∴$m=1$. ……………………………………………3 分

此时，方程为 $x^2+4x+3=0$，

解得 $x_1=-3$，$x_2=-1$.

∴当 $m=1$ 时，方程的根为 $x_1=-3$，$x_2=-1$. ……………………………5 分

21．(本题满分 6 分)

(1) 证明：∵四边形 $ABCD$ 是平行四边形，

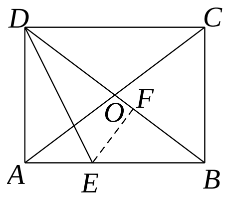
∴$AC=2AO$，$BD=2BO$.

∵$AO=BO$，

∴$AC=BD$，

∴平行四边形 $ABCD$ 为矩形. ……………………………………………3 分

(2) 解：如图，过点 E 作 $EF\perp BD$ 于点 F.



∵四边形 $ABCD$ 是矩形，

∴$\angle DAB=90°$，

∴$EA\perp AD$.

∵DE 为$\angle ADB$ 的角平分线，

∴$EF=EA$，$DF=DA$.

∵$AD=3$，$AB=4$，

∴$BD=\sqrt{AD^2+AB^2}=\sqrt{3^2+4^2}=5$.

$DF=DA=3$，

∴$BF=BD-DF=2$.

在$\triangle BEF$ 中，$\angle BFE=90°$，设 $EF=EA=x$，则 $BE=4-x$，

由 $\sin\angle FBE=\dfrac{EF}{BE}=\dfrac{x}{4-x}=\dfrac{3}{5}$，

解得 $x=\dfrac{3}{2}$，

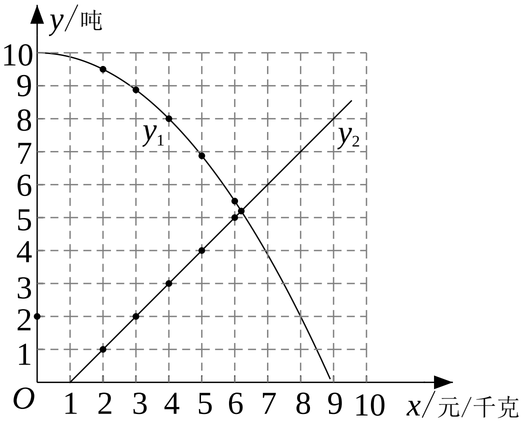
∴$AE=\dfrac{3}{2}$. ……………………………………………6 分

22．(本题满分 6 分)

解：(1) 一次，$y_2=x-1$，

$y_1=-\dfrac{1}{8}x^2+10$. ……………………………………………3 分

(2)



……………………………………………5 分

(3) 6.2. ……………………………………………6 分

23．(本题满分 5 分)

解：(1) 将点 $A(1，6)$，$B(-6，-1)$的坐标分别代入 $y=kx+b$ 中，

得 $\begin{cases} k+b=6, \\ -6k+b=-1, \end{cases}$

解得 $\begin{cases} k=1, \\ b=5, \end{cases}$

∴一次函数的解析式 $y=x+5$.

将点 $A(1，6)$的坐标代入 $y=\dfrac{m}{x}$ 中，

得 $m=6$，

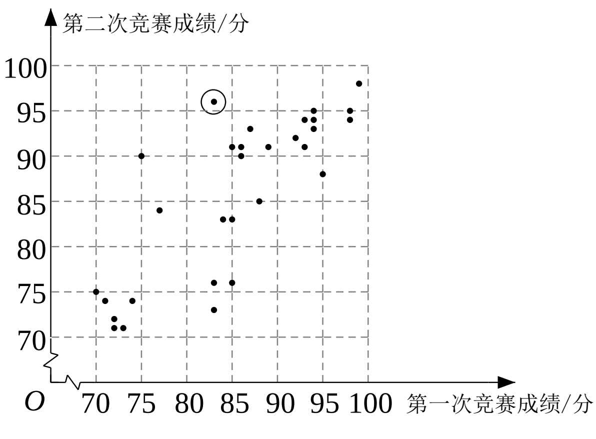
∴反比例函数的解析式 $y=\dfrac{6}{x}$. ……………………………………………3 分

(2) $k\geqslant 2$. ……………………………………………5 分

24．(本题满分 5 分)

解：(1) $m=12$，$n=10$. ……………………………………………2 分

(2)



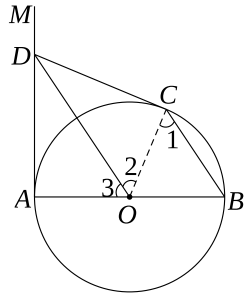
……………………………………………3 分

(3) ①③. ……………………………………………5 分

25．(本题满分 6 分)

(1) 证明：如图，连接 OC.

∵AM 与⊙O 相切于点 A，



∴$OA \perp AD$.

∵$OD // BC$，

∴$\angle 1 = \angle 2$，$\angle B = \angle 3$.

∵$OC = OB$，

∴$\angle 1 = \angle B$，

∴$\angle 2 = \angle 3$.

又∵$OC = OA$，$OD = OD$，

∴$\triangle DOC \cong \triangle DOA$，

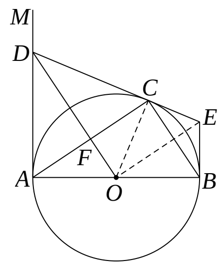
∴$\angle OCD = \angle OAD = 90^\circ$，

即 $OC \perp DC$.

又∵OC 是⊙O 的半径，

∴DC 是⊙O 的切线.　　　　………………………………………3 分

(2) 解：如图，连接 OE.



∵$BE \perp AB$，

∴BE 为⊙O 的切线.

∵EC 也为⊙O 的切线，

∴$EC = EB$.

又∵$OC = OB$，

∴$OE \perp BC$.

∵AB 是⊙O 的直径，$AB = 12$，

∴$OA = OB = 6$，$\angle ACB = 90^\circ$，即 $AC \perp BC$，

∴$OE // AC$，

∴$\angle EOB = \angle FAO$.

∵$OD // BC$，

∴$AC \perp OD$ 于点 F，

∴$\angle AFO = 90^\circ$.

在 Rt$\triangle OBE$ 中，$\angle OBE = 90^\circ$，$OB = 6$，$BE = 4$，

∴$OE = \sqrt{OB^2 + BE^2} = \sqrt{6^2 + 4^2} = 2\sqrt{13}$，

∴$\cos\angle EOB = \dfrac{OB}{OE} = \dfrac{6}{2\sqrt{13}} = \dfrac{3\sqrt{13}}{13}$.

在 Rt$\triangle AFO$ 中，$\angle AFO = 90^\circ$，$OA = 6$，

∴$\cos\angle FAO = \dfrac{AF}{AO} = \dfrac{AF}{6} = \dfrac{3\sqrt{13}}{13}$，

∴$AF = \dfrac{18\sqrt{13}}{13}$.　　　　………………………………………6 分

26．(本题满分 6 分)

解：(1) $y = ax^2 - 4a^2x = ax(x - 4a)$，

当 $y = 0$ 时，$ax(x - 4a) = 0$，

解得 $x_1 = 0$，$x_2 = 4a$，

即抛物线与 x 轴交于点(0，0)和($4a$，0).

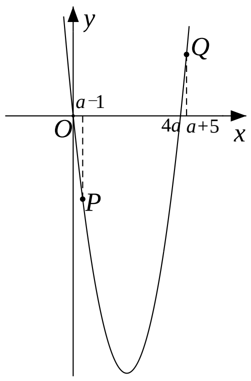
抛物线的对称轴为直线 $x=-\dfrac{-4a^2}{2a}=2a$． ……………………………3 分

(2) ∵抛物线与 x 轴交于点(0，0)和($4a$，0)，$a>0$，$y_1\cdot y_2<0$，

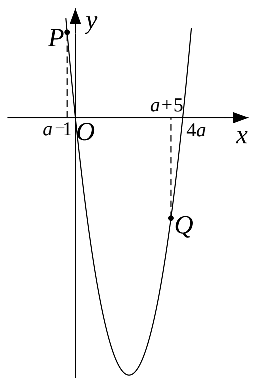
∴ $\begin{cases}0<a-1<4a,\\ a+5>4a,\end{cases}$（如图 1） 或 $\begin{cases}a-1<0,\\ 0<a+5<4a,\end{cases}$（如图 2）

解得 $1<a<\dfrac{5}{3}$，或无解；

∴ $1<a<\dfrac{5}{3}$． ……………………………………6 分



(图 1)



(图 2)

27．(本题满分 7 分)

(1)证明：∵∠*ACB*＝90°，*AC*＝*BC*，点 *D* 为 *AB* 中点，

∴*CD*⊥*AD* 于点 *D*，*AD*＝*CD*，

∵将线段 *AE* 绕点 *A* 逆时针旋转 90° 得到线段 *AF*，

∴*AF*＝*AE*，∠*FAE*＝90°.

∵点 *E* 与点 *D* 重合，

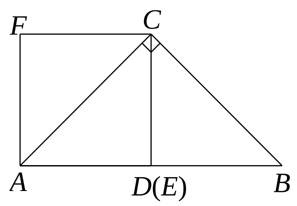
∴*AF*⊥*AD*，*AF*＝*AD*，

∴*AF*∥*CD*，且 *AF*＝*CD*，

∴四边形 *ADCF* 为平行四边形，

∴*CF*＝*AD*，

即 *CF*＝*AE*. ……………………………………………3 分



(2) 依题意补全图形，如图. ……………………………………………4 分

线段 *CF*，*ED*，*AD* 之间的数量关系：*CF*＝*ED*＋*AD*. ……………………………5 分

证法一：如图，过点 *F* 作 *FG*⊥*AB* 交 *DA* 延长线于点 *G*.

∵∠*ACB*＝90°，*AC*＝*BC*，点 *D* 为 *AB* 中点，

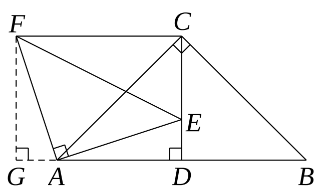
∴*CD*⊥*AB* 于点 *D*，*AD*＝*CD*，

∴∠*FGA*＝∠*ADE*＝90°，

∴*FG*∥*CD*.

∵将线段 *AE* 绕点 *A* 逆时针旋转 90°，

得到线段 *AF*，



∴*AF*＝*AE*，∠*FAE*＝90°，

∴∠*FAG*＋∠*EAD*＝90°，∠*FAG*＋∠*GFA*＝90°，

∴∠*GFA*＝∠*EAD*，

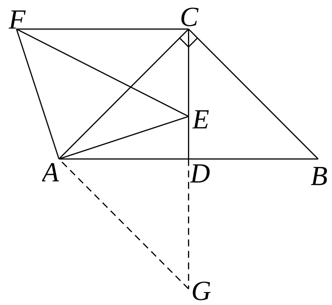
∴Rt△*FAG*≌Rt△*AED*，

∴*GA*＝*ED*，*FG*＝*AD*＝*CD*，

∴四边形 *FGDC* 为矩形，

∴*CF*＝*DG*＝*AG*＋*AD*＝*ED*＋*AD*. ……………………………………7 分

证法二：如图，延长 *ED* 到 *G*，使 *DG*＝*AD*，连接 *AG*.



∵$\angle ACB=90°$，$AC=BC$，点 D 为 AB 中点，

∴$CD\perp AB$ 于点 D，$AD=CD$，

∴$DG=AD=CD$，

∴$\angle CAG=90°$，且 $AC=AG$.

∵将线段 AE 绕点 A 逆时针旋转 90°

得到线段 AF，

∴$AF=AE$，$\angle FAE=90°$，

∴$\angle CAG=\angle FAE$.

∵$\angle FAC=\angle FAE-\angle CAE$，

$\angle EAG=\angle CAG-\angle CAE$，

∴$\angle FAC=\angle EAG$，

∴$\triangle FAC\cong\triangle EAG$，

∴$CF=EG$，

∴$CF=ED+DG=ED+AD$. ……………………………………7 分

28．(本题满分 7 分)

解：(1)① B_1C_1； ……………………………………………1 分

② ∵直线 l_2：$y=-x+b$ 与 x 轴夹角为 45°，

∴线段 $B_1C_1\perp$ 直线 l_2，

∴线段 B_1C_1 关于直线 l_2 的对称线段还在直线 B_1C_1 上，不可能是⊙O 的弦.

∵⊙O 的最长的弦即直径为 4，

$B_2C_2=\sqrt{20}>4$，

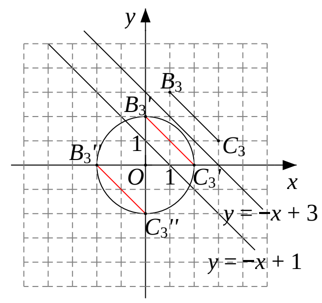
∴线段 B_2C_2 的对称线段不可能是⊙O 的弦；

∵线段 B_3C_3∥直线 l_2，且 $B_3C_3=2\sqrt{2}$，

∴线段 B_3C_3 的对称线段可以是⊙O 的弦.

线段 B_3C_3 的对称线段 $B_3'C_3'$∥B_3C_3，

且 $B_3'C_3'=2\sqrt{2}$.



如图，平移线段 B_3C_3 使之成为⊙O 的弦，有两种情况：

(ⅰ) B_3'，C_3'的坐标分别为(0，2)，(2，0)，此时 $b=3$；

(ⅱ) B_3''，C_3''的坐标分别为(－2，0)，(0，－2)，此时 $b=1$.

综上所述，$b=1$ 或 3. ……………………………………………3 分

(2) m 的最大值为 $8\sqrt{3}$，$AC=2\sqrt{13}$；

m 的最小值为 $4\sqrt{3}$，$AC=2\sqrt{7}$. ……………………………………………7 分